

International scientific conference  
**«Algebraic and geometric  
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,  
Odesa,  
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

# Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум

**В. Маркітан**

(Інститут математики НАН України)

*E-mail:* v.p.markitan@pru.edu.ua

**М. Працьовитий**

(НПУ імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України)

*E-mail:* prats4444@gmail.com

Геометричні засоби допомагають вивчати збіжні та розбіжні числові ряди, їх швидкість збіжності і "розподіл" сум підрядів на числовій прямій. А це дозволяє властивості рядів інтегрувати у тополого-метричних термінах, а також в термінах теорії фракталів (фрактальної геометрії та фрактального аналізу). Початком досліджень в галузі геометрії числових рядів є робота Какея [1]. З цих пір теорія суттєво збагатилась і сьогодні магістральними напрямками її розвитку слід вважати:

- 1) пошук критеріїв ніде не щільності, нуль-мірності та канторвальності [4];
- 2) встановлення фрактальних характеристик множин підсум абсолютно збіжних рядів [2, 5];
- 3) вивчення властивостей арифметичних сум (скінченних та нескінченних) числових множин [2], а також
- 4) знаходження застосувань тополого-метричних властивостей рядів і теорії розподілів випадкових величин (нескінченні згортки Бернуллі) та ймовірнісної теорії чисел [4].

**Означення 1.** *Неповною сумою (підсумою) заданого збіжного числового ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

залежною від множини  $M \subset \mathbb{N}$ , називається число

$$x = x(M) = \sum_{n \in M \subset \mathbb{N}} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varepsilon_n, \quad \text{де } \varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n \in M, \\ 0, & \text{якщо } n \notin M. \end{cases}$$

**Означення 2.** *Множиною (всіх) неповних сум (множиною підсум) ряду (1) називається множина*

$$E(u_n) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n u_n, \quad (\varepsilon_n) \in A^{\infty}, \quad A = \{0, 1\} \right\}.$$

Добре відомо, що множина неповних сум ряду є континуальною, досконалою множиною одного з наступних топологічних типів:

- 1) скінченним об'єднанням відрізків;
- 2) гомеоморфною множині Кантора (додатної або нульової міри Лебега);
- 3) канторвалом – множиною гомеоморфною множині неповних сум ряду

$$\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{2}{4^3} + \dots, \quad (2)$$

яка є специфічним об'єднанням відрізків і ніде не щільної множини. Необхідні і достатні умови належності кожному з двох останніх типів сьогодні невідомі, хоча відомі деякі достатні умови. Для окремих вузьких класів рядів критерії також є відомими.

Зауважимо, що ряд (2) є результатом додавання двох рядів, які є сумами всіх членів нескінченно спадних геометричних прогресій. Їх множини неповних сум просто виражаються у термінах

четвіркового зображення чисел, а саме:

$$E' \left( \frac{3}{4^n} \right) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^4, \alpha_n \in \{0, 3\} \right\},$$

$$E'' \left( \frac{2}{4^n} \right) = \left\{ x : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{4^n} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^4, \alpha_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Для арифметичної суми цих множин виконується рівність

$$E' \left( \frac{3}{4^n} \right) \oplus E'' \left( \frac{2}{4^n} \right) = E \left( \frac{3}{4^{2k-1}} + \frac{2}{4^{2k}} \right).$$

Об'єктом нашого розгляду є структурні та тополого-метричні властивості множини неповних сум ряду (2) і розподілу випадкової величини

$$\xi = \frac{3\eta_1}{4} + \frac{2\eta_2}{4} + \frac{3\eta_3}{4^2} + \frac{2\eta_4}{4^2} + \dots + \frac{3\eta_{2k-1}}{4^k} + \frac{2\eta_{2k}}{4^k} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_n}{4^k}, \quad (3)$$

де  $(\eta_k)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 та 1 з ймовірностями  $p'_{0k}$  та  $p'_{1k}$  відповідно. Тоді  $(\tau_k)$  – послідовність випадкових величин, які набувають значень 0, 2, 3, 5 відповідно з ймовірностями:

$$p_{0k} = p'_{0,2k-1} \cdot p'_{0,2k}, \quad p_{2k} = p'_{0,2k-1} \cdot p'_{1,2k}, \quad p_{3k} = p'_{1,2k-1} \cdot p'_{0,2k}, \quad p_{5k} = p'_{1,2k-1} \cdot p'_{1,2k}.$$

Зауважимо, що розподіл випадкової величини  $\xi$  належить до класу нескінченних згорток Бернуллі, вивчення яких ведеться більше ста років і чимало проблем, з ними пов'язаних, до цих пір чекають на своє вирішення [4].

Зауважимо також, що випадкова величина  $\xi$  за формою є випадковою величиною, представленою четвірковим розкладом (в четвірковій системі числення) з нестандартним набором цифр  $\{0, 2, 3, 5\} \equiv A^*$ , які є незалежними випадковими величинами.

Симетрії алфавіту  $A^*$  в значній мірі індукують структурні властивості спектра  $S_\xi$  (множини точок росту функції розподілу  $F_\xi$ , що рівносильно мінімального замкненого носія розподілу).

Пропонуються результати дослідження лебегівської структури розподілу випадкової величини  $\xi$  (вміст дискретної, абсолютно неперервної та сингулярно неперервної компонент); автомобельних властивостей спектра розподілу; поведінки модуля характеристичної функції, тобто значення

$$L_\xi = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \sup |f_\xi(t)|, \quad \text{де} \quad f_\xi(t) = M e^{it\xi} = \prod_{n=1}^{\infty} (p_{0n} + p_{2n} e^{\frac{it2}{4^n}} + p_{3n} e^{\frac{it3}{4^n}} + p_{5n} e^{\frac{it5}{4^n}});$$

автозгорток розподілу тощо.

**Теорема 3.** *Розподіл випадкової величини  $\xi$  має чистий лебегівський тип, причому є*

1) *чисто дискретним тоді і тільки тоді, коли*

$$M = \prod_{n=1}^{\infty} \max_{i \in A^*} \{p_{in}\} > 0; \quad (4)$$

2) *чисто сингулярним, якщо  $M = 0$  і  $p_{2n} \cdot p_{3n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ;*

3) *абсолютно неперервним, якщо  $p_{0n} = p_{2n} = p_{3n} = p_{5n} = \frac{1}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .*

Крім вказаних об'єктів дослідження у доповіді розглядається інші числові ряди, що володіють певними властивостями однорідності, їх множини неповних сум та розподіли випадкових підсум незалежними доданками або ж такими, що мають марковську залежність.

## ЛІТЕРАТУРА

- [1] *Takeya S.* On the partial sums of an infinite series // Tôhoku Sci Rep. — 1914. — **3**, no. 4. — P. 159–164.
- [2] *Pratsiomytyi M.V., Kovalenko V.M.* Probability measures on fractal curves (probability distributions on Vicsek fractal) // Random Operators and Stochastic equations, 2015; **23(3)**. — P. 161 – 168.
- [3] *Працьовитий М.В.* Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.
- [4] *Працьовитий М.В., Савченко І.О.* Розподіли випадкових неповних сум знакододатного ряду з нелінійною властивістю однорідності // Теор. ймовірност. матем. статист. — 2014. — **91**. — С. 133–142.
- [5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296с.

<b>Damian Wiśniewski</b> <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	<b>66</b>
<b>Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M.</b> <i>History of formation of the decimal number concept</i>	<b>68</b>
<b>Yildiz S.</b> <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	<b>70</b>
<b>Yildiz S.</b> <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	<b>72</b>
<b>Безкоровайна Л.</b> <i>Про <math>A</math>-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	<b>73</b>
<b>Гречнёва М. О., Стеганцева П. Г.</b> <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом</i>	<b>74</b>
<b>Кузь А. М.</b> <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем <math>p</math>-адичних чисел</i>	<b>76</b>
<b>Маркітан В., Працьовитий М.</b> <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	<b>77</b>
<b>Подоусова Т. Ю.</b> <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	<b>80</b>
<b>Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В.</b> <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	<b>81</b>
<b>Працьовитий М. В., Лисенко І. М.</b> <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	<b>83</b>
<b>Пришляк О. О., Прус А. А.</b> <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	<b>86</b>
<b>Сердюк А. С., Соколенко І. В.</b> <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів <math>L_p</math> на класах періодичних цілих функцій</i>	<b>87</b>
<b>Синюкова О. М.</b> <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	<b>89</b>
<b>Скуратовський Р. В.</b> <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	<b>90</b>
<b>Черевко Є. В., Чепурна О. Є.</b> <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	<b>91</b>
<b>Федченко Ю. С.</b> <i>Про <math>P</math>-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	<b>93</b>
<b>Хомич Ю., Піструїл М.</b> <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	<b>94</b>
<b>Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.</b> <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	<b>96</b>
<b>Бологова Т. Н., Макаров В. И.</b> <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	<b>97</b>