



Кузаконь, В. М. Гладкі многовиди.
Геометричні та топологічні аспекти [Текст] :
праці Ін-ту математики НАН України. Т. 97 /
В. М. Кузаконь, В. Ф. Кириченко,
О. О. Пришляк ; НАН України, Ін-т математики.
- Київ, 2013. - 500 с. - Бібліогр.: с. 484-494.

Книга присвячена дослідженню топологічних та геометричних властивостей диференціально-геометричних структур на гладких многовидах. В першому розділі досліджуються топологічні властивості типових класів функцій та векторних полів. В розділах 2—6 наводяться основні конструкції сучасної диференціальної геометрії. Основна увага приділена обґрунтуванню метода приєднаних G -структур, який використовується в наступних главах при вивченні конкретних структур на многовидах. Закінчується книга побудовою диференціальних інваріантів та дослідженням їх контактних симетрій.

Для студентів та науковців, що бажають ознайомитися з основними геометричними та топологічними конструкціями сучасної теорії многовидів.

ВСТУП

Топологія є відносно новою наукою і вивчає такі властивості об'єктів, які не змінюються при неперервних відображеннях. Основними об'єктами наших досліджень будуть функції та векторні поля на многовидах. В першій главі ми досліджуємо топологічні властивості многовидів і наводимо топологічні класифікації для деяких класів функцій та векторних полів на многовидах розмірності 2 і 3.

Геометрія є однією з найдавніших наук, початок якої, по суті, датується початком трудової діяльності людини. З ускладненням цієї діяльності ускладнювався і предмет геометричного дослідження. Якщо на ранньому етапі розвитку людського суспільства геометрія вивчала, головним чином, плоскі лінійні конфігурації, то і плином часу в сферу геометричного дослідження вже криволінійні конфігурації, причому, довільної розмірності, а в подальшому і геометричні об'єкти більш загальної і складнішої природи.

Важливо відзначити, що істотні зміни зазнавав не тільки предмет, а й методи геометричного дослідження. Одним з найреволюційніших зрушень у цьому напрямку стало впровадження теоретико-групових методів в геометрію. Найвиразніше ідея такого підходу прозвучала в знаменитій Ерлангенській програмі Клейна (1872 р.). І хоча в подальшому виявилось, що рамки, окреслені цією програмою, занадто вузькі для визначення предмета геомет-

ричного дослідження, ідея групового підходу виявилася дуже плідною. Спираючись на неї, Елі Картан заснував чудовий метод диференційно-геометричного дослідження, який назвали методом рухомого репера. Хоча Картан не привів строгого, з сучасної точки зору, обґрунтування цього методу, та він продемонстрував його універсальність і ефективність на величезному геометричному матеріалі. Подальший розвиток геометрії показав, що метод рухомого репера допускає абсолютно строге обґрунтування. Суть його полягає в тому, що дослідження геометрії самого многовида M з фіксованою на ньому геометричною структурою (наприклад, тензорною), цей метод зводить до дослідження геометрії іншого многовида, а саме, простору розшарування реперів над многовидом M , або підрозшарувань цього розшарування, відомих під назвою G -структур. Оскільки точками простору є реperi, то, вибираючи підрозшарування таким чином, щоб ці реperi були найтісніше пов'язані з геометрією досліджуваної структури (наприклад, щоб рівняння, які задають тензорну структуру, були б в такому репері найпростішими), можна домогтися, щоб особливості геометрії простору G -структури, що вносяться фіксацією вихідної структури на M , аналітично характеризувалися найпростіше. Тим самим автоматично будується аналітичний апарат, найпристосованіший до дослідження вихідної структури. На жаль, більшість дослідників методу рухомого репера, захоплюючись плідністю його використання, не звертали належної уваги на його обґрунтування. Це призвело до певної дискредитації цього методу у багатьох математиків, які звикли до сучасного рівня строгості викладу. Правда, ряд дослідників (Амброз, Сінгер, Кобаясі, Номідзу та ін.) побудували цілком строгий опис геометрії головних розшарувань, зокрема, головного розшарування реперів. Однак, за іронією долі ці дослідження, отримавши важливі додатки в різних областях геометрії, топології і математичної фізики, не отримали належної уваги у послідовників методу Картана, що призвело до створення істотного розриву між напрямками сучасної (або, як її іноді називають, глобальної) і класичної (або локальної) диференціальних геометрій.

У цій книзі зроблена спроба подолати цей розрив. Спочатку наведено строге обґрунтування основних положень методу рухомого репера (або, іншій термінології, методу приєднаних G -структур) на базі дослідження геометрії головних розшарувань (і зокрема G -структур). Дано докладний аналіз того, як факти багатовимірної диференціальної геометрії гладкого многовида, що належать до фундаментальних понять зв'язності і коваріантного диференціального числення, є "відгомонам" особливостей геометричної будови простору розшарування реперів над цим многовидом. Далі на базі розробленого апарата проводиться докладне дослідження (псевдо) ріманових структур на многовидах. Цей апарат також може бути застосований для вивчення інших диференціально-геометричних структур, що мають особливо важливу роль в сучасній диференціальній геометрії: майже комплексних, майже ермітових, майже контактних та інших.

В останньому розділі вивчаються диференціальні інваріанти, що зіставляють деяким нелінійним диференціальним операторам полілінійні об'єкти, так

звані ефективні форми. Вони використовуються при вивченні симетрій диференціальних операторів.

Автори щиро вдячні учасникам наукового семінару відділу топології Інституту математики НАН України В. Шарку, С. Максименку, Е. Полуляху, І. Власенку та В. Круглову за конструктивні ідеї та зауваження, підтримці благодійного фонду наукових досліджень "Наука," Міжнародному геометричному центру " $d\omega$ " учасникам щорічної міжнародної конференції "Геометрія в Одесі" та всім науковцям, що сприяли виходу цієї книжки.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ/.....	8
1. Гомотопні відображення.....	8
2. Кліткові простори/.....	10
3. Фундаментальна група.....	13
4.	
Накриття.....	17
5.	
Розшарування.....	19
Розділ 1. ТОПОЛОГІЯ МНОГОВИДІВ.....	21
1. Топологічні многовиди.....	21
2. Гладкі многовиди.....	25
3. Приклади гладких многовидів.....	28
4. Гладкі відображення гладких многовидів.....	35
5. Дотичні вектори, дотичний простір.....	36
6. Векторні поля на многовидах.....	41
7. Функції Морса.....	45
8. Розклад многовида на ручки.....	48
9. Топологічна класифікація компактних 2-вимірних Многовидів.....	54
10. Діаграми Хегора тривимірних многовидів.....	58
11. Вузли та зачеплення.....	59
12. Діаграми Кірбі.....	62
13. Топологічна еквівалентність векторних полів Морса- Смейла.....	65
14. Топологічна еквівалентність функцій.....	70

14.1. Локальна класифікація.....	71
14.2. Глобальна класифікація.....	79

Розділ 2. ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА НА МНОГОВИДАХ.....83

1. Алгебра гладких функцій гладкого многовида.....	83
2. Векторні поля як диференціювання алгебри функцій на гладкому многовиді.....	87
3. Дотичні вектори як інфінітезимальні диференціювання на гладкому многовиді.....	92
4. Алгебра Лі векторних полів гладкого многовида.....	94
5. Тензорна алгебра гладкого многовида.....	99
6. Алгебра Грассмана гладкого многовида. Оператор зовнішнього диференціювання.....	105
7. Диференціал гладкого відображення.....	115
8. ф-зв'язані векторні поля. Захоплення й анти- захоплення тензорів при гладких відображеннях.....	118
9. Розподіл та інтегрованість.....	121
10. Локальні потоки на многовидах.....	126
11. Диференціювання Лі.....	135

Розділ 3. ГРУПИ ЛІ ТА АЛГЕБРИ ЛІ.....143

1. Групи Лі.....	143
2. Явна побудова гладкої структури на групі $0(n, \mathbb{R})$. Конструкція Келі.....	148
3. Алгебри Лі.....	150
3.1. Алгебра Лі групи Лі. Структурні рівняння груп Лі.....	152
4. Повна лінійна група.....	156
5. Гомоморфізми груп Лі й алгебр Лі.....	160
6. Підгрупи Лі.....	162
7. Однопараметричні підгрупи груп Лі й експонентне Відображення.....	168
8. Експонентне відображення для повно лінійної групи.....	174
9. Деякі підгрупи Лі в $GL(n, \mathbb{C})$ і їх алгебри Лі.....	180
10. Накриття груп Лі.....	183
11. Властивості гомоморфізмів груп Лі й алгебр Лі.....	191
11.1. Неперервні гомоморфізми.....	195
12. Замкнені підгрупи групи Лі.....	198
13. Приєднане зображення.....	202
14. Автоморфізми й диференціювання білінійних операцій і форм.....	209
15. Приєднана група.....	213
16. Форма Кіллінга.....	214

17. Напівпрості алгебри L_i	216
18. Компактні групи L_i	219
19. Компактні алгебри L_i	222
Розділ 4. ДІЇ ГРУП НА МНОГОВИДАХ	227
1. Дія груп на многовидах.....	227
2. Однорідні простори.....	236
3. Фундаментальні векторні поля.....	252
Розділ 5. ГОЛОВНІ РОЗШАРУВАННЯ	257
1. Визначення та приклади головних розшарувань.....	257
2. Структурні рівняння головного розшарування.....	261
3. Зв'язності в головних розшаруваннях.....	265
4. Горизонтальний ліфт.....	271
5. Гомоморфізми зв'язностей.....	278
6. Структурні рівняння зв'язності. Теорема Картана-Лаптева.....	281
7. Існування та приклади зв'язностей.....	287
Розділ 6. ГОЛОВНІ РОЗШАРУВАННЯ РЕПЕРІВ	292
1. Головне розшарування реперів.....	292
2. Узагальнена лема Картана.....	298
3. Структурні рівняння головного розшарування реперів.....	310
4. Основна теорема тензорного аналізу.....	305
5. Зв'язність у головному розшаруванні реперів.....	310
5.1. Контраваріантна форма структурних рівнянь.....	318
6. Коваріантне диференціювання.....	320
7. Альтернативне визначення афінної зв'язності.....	327
7.1. Компоненти тензорів скруту й кривини.....	331
7.2. Тотожності Біанкі.....	333
7.3. Тотожність Річчі.....	337
8. Тензор афінної деформації.....	338
9. Паралелізм і геодезичні визначення.....	343
10. G-структури першого порядку на многовиді.....	350
11. Узагальнені головні розшарування.....	352
12. K-узагальнені G-структури.....	357
Розділ 7. РІМАНОВІ ТА ПСЕВДОРІМАНОВІ СТРУКТУРИ	364
1. Існування ріманової та псевдоріманової структур.....	364
2. $O(n, s, R)$ -структура.....	367
3. Основна теорема ріманової геометрії.....	369

4. Тензор Рімана-Кристоффеля.....	374
4.1. Секційна кривина.....	376
4.2. Тензор Річчі.....	380

Розділ 8. МАЙЖЕ ЕРМІТОВІ СТРУКТУРИ.....383

1. Комплексні структури.....	383
1.1. Тензорні добутки модулів.....	383
1.2. Комплексифікація лінійного простору.....	384
1.3. Комплексні структури.....	388
2. Ермітові структури.....	394
3. Майже комплексні, майже ермітові структури та приєднані G-структури.....	400
4. AH-структури та, h-геодезичні відображення.....	408
5. Узагальнені майже ермітові структури та їх класифікація.....	413
6. h-геодезичні перетворення GAH-структур і їх тензорні інваріанти.....	424

Розділ 9. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ І ЇХНІ КОНТАКТНІ СИМЕТРІЇ.....437

1. Симплектичні та контактні структури.....	437
2. Простір джетів, розподіл Картана та поля Лі.....	441
3. Простір джетів і нелінійні диференціальні рівняння.....	451
3.1. Диференціальні інваріанти.....	453
3.2. Диференціальні оператори й ефективні форми.....	454
4. Обчислення диференціальних інваріантів другого порядку субмерсій евклідових просторів.....	456
4.1. Дія структурно псевдогрупи Лі.....	456
4.2. Знаходження диференціальних інваріантів другого порядку.....	458
5. Метричні диференціальні інваріанти розшарування кривих на площині.....	462
6. Структура алгебри диференціальних інваріантів.....	464
7. Контактні симетрії диференціальних інваріантів субмерсій локально-евклідових просторів.....	468
7.1. Контактні симетрії диференціальних інваріантів субмерсії $\varphi: V_2 \rightarrow V_1$	469
8. Симетрії диференціальних інваріантів сім'ї поверхонь $\varphi: R^3 \rightarrow R$	477
8.1. Диференціальні інваріанти субмерсії $\varphi: R^3 \rightarrow R$	477

8.2. Контактні симетрії середньої кривини поверхні.....	478
8.3. Контактні симетрії гаусової кривини.....	481
ЛІТЕРАТУРА.....	484