УНИВЕРСИТЕТ ПО ХРАНИТЕЛНИ ТЕХНОЛОГИИ - ПЛОВДИВ

UNIVERSITY OF FOOD TECHNOLOGIES - PLOVDIV

SCIENTIFIC WORKS
Volume LVI, Issue 1
Plovdiv, October 23-24, 2009

НАУЧНА КОНФЕРЕНЦИЯ С МЕЖДУНАРОДНО УЧАСТИЕ

"ХРАНИТЕЛНА НАУКА, ТЕХНИКА И ТЕХНОЛОГИИ 2009"

'FOOD SCIENCE, ENGINEERING AND TECHNOLOGIES 2009'

НАУЧНИ ТРУДОВЕ

Том LVI, Свитък 1

Пловдив, 23 - 24 октомври 2009

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОЦЕНКИ ОДНОРОДНОСТИ ПРЕМИКСОВ И КОМБИКОРМОВ

Б. В. Егоров, А. В. Макаринская, И. С. Кац

В статье приведена статистическая оценка эффективности технологических процессов производства премиксов и комбикормов согласно закону распределения вероятностей. Рассмотрены варианты распределения плотности вероятности случайной величины при анализе ключевого компонента кормовой смеси в заданном сегменте.

Statistical foundation for estimation of premixes and mixed fodder uniformity

B. V. Iegorov, A. V. Makarinskaya, I. S. Kats

In clause statistical processing of quality of work of the process equipment is resulted by manufacture of mixed fodders and premix according to the law of distribution of probabilities. Variants of distribution of density of probability of a random variable are considered at the analysis of a key component of a fodder mix in the set segment.

1. Вступление.

Оценку эффективности функционирования технологических процессов смешивания при производстве комбикормов и премиксов проводят по одному из компонентов, входящему в состав комбикорма (премикса) в минимальном количестве, который называют ключевым или индикаторным компонентом. Для этого через равные промежутки времени отбирают пробы рассыпного комбикорма (премикса) на выходе из смесителя, после транспортирования (выгрузки транспортера, подъема и выгрузки нории), на этапах загрузки или выгрузки в бункера или силоса склада готовой продукции и изучают концентрацию этого компонента в смеси. Условно такие пробы называют большими. Из каждой большой пробы берут меньшие пробы, производят лабораторный анализ каждой из этих проб и концентрации ключевого компонента в этих пробах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют выборкой. Это конкретные числа. Находят, так называемую, среднее выборочное $\bar{x}$ по формуле:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ \ldots \ + x_n) \tag{1}$$

и выборочное среднее квадратичное отклонение s по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n}((x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ \ldots \ + (x_n - \bar{x})^2)} \tag{2}$$

Так поступают с каждой большой пробой. Собственно, числа $\bar{x}$ и s характеризуют в какой-то мере концентрацию ключевого компонента в большой пробе.

Пусть в соответствии с рецептом эта концентрация должна равняться c. При идеальной работе всех видов технологического и транспортного оборудования, участвующих в производственном процессе, и идеальной работе лаборанта $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а следовательно и $\bar{x}$, должны равняться c и потому s должно равняться нулю. На практике так не бывает.

Обычно выборочные средние для больших проб группируются около c. Однако, может случиться, что выборочная средняя одной или нескольких из больших проб значительно отличается от c, что можно назвать выбросом. В этом случае важно понять, возникло ли это отличие из-за сбоя в работе оборудования или из-за случайных факторов, воздействующих на производственный процесс. Из всех таких выбросов важно изучить первый по времени. Поэтому нас интересует выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а также $\bar{x}$ и s, именно для соответствующей большой пробы, которую можно назвать сомнительной.

Поясним, какую математическую задачу мы будем решать в настоящей работе. Исходя из того, для какого вида животных предназначен комбикорм и соответствующих рекомендаций зоотехнической науки о кормлении животных, мы можем допустить, что концентрация ключевого компонента может быть отличной от c, но не большей, чем некоторое число b ($b > c$), и не меньшей, чем некоторое число a ($a < c$). Таким образом, мы допускаем, чтобы концентрация принадлежала сегменту $[a, b]$, которому принадлежит c.

Наша цель выяснить по результатам выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взятой из анализируемой большой пробы, может ли концентрация ключевого компонента в данной пробе все же принадлежать сегменту $[a, b]$.

2. Постановка и решение задачи.

Число x_j будем рассматривать как конкретное значение некоторой случайной величины X_j, полученное в опыте, состоящем во взятии j-ой малой пробы из сомнительной большой пробы ($j = 1, 2, \ldots, n$).

Все X_j подчинены одинаковому закону распределения вероятностей, которое по многим причинам следует считать нормальным.

Математическое ожидание каждой случайной величины X_j - это истинная концентрация ключевого компонента в сомнительной большой пробе. Ясно, что $\bar{x}$ это конкретное значение случайной величины

$$\bar{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ \ldots \ + X_n), \tag{3}$$

а s - это конкретное значение случайной величины

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}((X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \ \ldots \ + (X_n - \bar{X})^2)}, \tag{4}$$

полученных в опыте, состоящем в получении выборки (сравним с равенствами (1) и (2)). Заметим, что математическое ожидание случайной величины $\bar{X}$ совпадает с математическим ожиданием каждой случайной величины X_j.

Решение поставленной задачи опирается на фундаментальный результат, согласно которому случайная величина

$$t = \frac{\bar{X} - m}{S}, \tag{5}$$

где m - это неизвестное, но вполне определенное математическое ожидание случайных величин X_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) и $\bar{X}$ (а значит и истинная концентрация

ключевого компонента в анализируемой пробе), подчиняется распределению Стьюдента со степенью свободы n-1 (см., например, [2], § 29.4).

Плотность вероятностей этого распределения

$$s_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{(n-1)\pi}}\left(1+\frac{x^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}, \tag{6}$$

где Γ - так называемая гамма-фукнция Эйлера.

Одной из первообразных функции $s_{n-1}(x)$ является

$$S_{n-1}(x) = \int_{-\infty}^{x} s_{n-1}(u)du = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\sqrt{(n-1)\pi}}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}du \tag{7}$$

Таблица значений этой функции приведена в монографии [3] (где $S_{n-1}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{(n-1)\pi}\cdot\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x}\left(1+\frac{u^2}{n-1}\right)^{-\frac{n}{2}}du$, если x < 0, то следует воспользоваться формулой $S_{n-1}(x) = 1 - S_{n-1}(-x)$.).

Как и плотность вероятности любой непрерывной случайной величины $s_{n-1}(x)$ обладает следующим свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_{n-1}(x)dx = 1. \tag{8}$$

Кроме того, для любого положительного числа ε<1 найдутся такие числа p_ε и q_ε, что

$$\int_{-\infty}^{q_\varepsilon} s_{n-1}(x)dx = \varepsilon, \qquad \int_{p_\varepsilon}^{+\infty} s_{n-1}(x)dx = \varepsilon \tag{9}$$

причем эти числа определяются однозначно равенствами (9), т.к. $s_{n-1}(x)$ > 0 при любом x. Заметим, что $q_\varepsilon = -p_\varepsilon$, поскольку функция $s_{n-1}(x)$ четна.

Дальнейший план работы таков. Выбираем малое положительное число ε - уровень значимости, например, ε =0,05 или ε =0,01. Выдвигаем гипотезу о математическом ожидании m случайной величины $\overline{X}$, а затем с помощью вышеизложенного выясним, согласуется ли гипотеза с результатом выборки.

Принимаемая гипотеза состоит в том, что m принадлежит сегменту $[a, b]$.

Рассмотрим два случая: $\overline{x} > b$ и $\overline{x} < a$.

Первый случай, когда $\overline{x} > b$. Так как $s_{n-1}(x)$ - плотность вероятности случайной величины $\frac{\overline{X}-m}{S}$, то

$$P\left(\frac{\overline{X}-m}{S}\geq\frac{\overline{x}-m}{s}\right)=\int_{\frac{\overline{x}-m}{s}}^{+\infty}s_{n-1}(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}s_{n-1}(u)du-\int_{-\infty}^{\frac{\overline{x}-m}{s}}s_{n-1}(u)du=1-S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-m}{s}\right) \qquad (10)$$

(см. равенства (8) и (7)).*)

Так как функция $S_{n-1}(x)$, определенная равенством (7), строго возрастает, то наибольшее значение выражение $1-S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-m}{s}\right)$ достигнет (при условии соблюдения гипотезы), если взять $m=b$. Оно примет тогда значение $1-S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-b}{s}\right)$, численная величина которого может быть найдена с помощью упомянутой ранее таблицы. Если окажется, все же, что это значение меньше, чем ε, то, сравнивая первый интеграл в (10) со вторым интегралом в строке (9), убедимся, что $\frac{\overline{x}-m}{s}>p_\varepsilon$. Однако, p_ε - это нижняя граница (критическая точка) так называемой правосторонней критической области, соответствующей уровню значимости ε, а $\frac{\overline{x}-b}{s}$ - это конкретное значение, которое приняла случайная величина $\frac{X-b}{S}$ в опыте, состоящем во взятии выборки из анализируемой большой пробы. Значит, в этом опыте произошло событие, вероятность которого меньше ε (см. (10)). Из-за малости ε мы его считаем практически невозможным и принятая гипотеза отвергается. Это говорит о том, что выброс нельзя объяснить только случайными воздействиями.

Второй случай, когда $\overline{x}<a$. Воспользуемся тем, что (см. (7))

$$P\left(\frac{\overline{X}-m}{S}\leq\frac{\overline{x}-m}{s}\right)=\int_{-\infty}^{\frac{\overline{x}-m}{s}}s_{n-1}(u)du=S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-m}{s}\right) \qquad (11)$$

Найденная вероятность примет наибольшее значение, если, не нарушая гипотезы, положить $m=a$. Она примет значение $S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}-a}{s}\right)$. Если окажется, что оно, все же, меньше ε, то, сравнивая интеграл в (11) с первым интегралом в (9), приходим к выводу, что $\frac{\overline{x}-m}{s}<q_\varepsilon$. Но q_ε это верхняя граница (критическая точка) левосторонней критической области соответствующей уровню значимости ε. Повторив рассуждения, проведенные при анализе ситуации, возникшей в первом случае, приходим к выводу, что должна быть отброшена гипотеза, согласно которой концентрация ключевого компонента находится в допустимых пределах (от *a* до *b*).

Примечание: *) $P\left(\frac{\overline{X}-m}{S}\geq\frac{\overline{x}-m}{s}\right)$ *- вероятность события заключающегося в том, что случайная величина* $\frac{X-m}{S}$ *принимает значение, большее, чем число* $\frac{\overline{x}-m}{s}$*, или равное ему.*

3. Выводы.

Производя статистическую оценку эффективности смешивания компонентов комбикормо можно поступать следующим образом. Дана выборка x_1, x_2, ..., x_n. По формулам (1) и (2) вычисляют $\bar{x}$ и s. Выбирают уровень значимости ε. Берут обычно ε = 0,05 или ε = 0,01.

Если $\bar{x} > b$, то вычисляют $\frac{\bar{x}-b}{s}$. Затем вычисляют значения $1-S_{n-1}\left(\frac{\bar{x}-b}{s}\right)$. Если окажется, что полученное число меньше, чем ε, то гипотеза отбрасывается.

Если $\bar{x} < a$, то вычисляют $\frac{\bar{x}-a}{s}$. Затем вычисляют $S_{n-1}\left(\frac{\bar{x}-a}{s}\right)$. Если окажется, что $S_{n-1}\left(\frac{\bar{x}-a}{s}\right) < \varepsilon$, то гипотеза отбрасывается.

Таким образом, с помощью предложенной статистической оценки случайных величин, количественно характеризующих ключевые компоненты премиксов и комбикормов, представляется возможным повысить уровень достоверности определения однородности получаемых смесей.

Литература

1. Егоров Б.В., Макаринская А.В, Кац И.С. Математические основы оценки стабильности технологических процессов производства премиксов и комбикормов // Зернові продукти і комбікорми, 2008. - № 2 (30). – С. 35-40.

2. Крамер Г. Математические методы статистики. - М.: Мир, 1975. - 648 с.

3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. - М.: Физ.-мат. ГИЗ, 1961. - 406 с.

Б.В. Егоров, д-р техн. наук, профессор,
А.В. Макаринская, канд. техн. наук, доцент,
И.С. Кац, д-р физ.-мат.наук, профессор
Одесская национальная академия пищевых технологий, г.Одесса
Tel: 380-487-12-41-40