

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

Т Р У Д Ы
ОДЕССКОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

имени И. В. СТАЛИНА

ТОМ VIII

ОДЕССА,

1957.

*Ответственный редактор трудов ОТИ
имени И. В. Сталина
кандидат технических наук, доцент П. Н. ПЛАТОНОВ*

*Редактор сборника
кандидат технических наук, доцент А. А. ИВАНОВ*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий VIII том «Трудов института» посвящен теоретическим работам общеобразовательных и общетехнических кафедр нашего института, а также содержит ряд работ, представляющих производственную ценность.

В данном томе представлены законченные и доложенные на конференциях научные исследования кафедр: высшей математики и теоретической механики, неорганической химии, сопротивления материалов, теории механизмов и деталей машин, электротехники.

Редакционная коллегия

Г. В. КОСТАНДИ

ПРИНЦИП СИЛЬВЕСТРА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

В отличие от способа доказательства Сильвестром теоремы Дирихле, в данной работе излагается новая лемма, которая в сочетании с квадратичными и биквадратичными формами позволяет установить наличие бесчисленного множества простых чисел в прогрессиях вида $24x + l$, где $(24, l) = 1$, а также бесчисленное множество простых чисел в некоторых лучах прогрессий.

Теорема Дирихле о том, что каждая арифметическая прогрессия с взаимно простыми первым членом и разностью содержит среди своих членов бесчисленное множество простых чисел, не имеет до сих пор элементарного доказательства. Существуют только элементарные доказательства для прогрессий видов: $kx + 1$ и $kx - 1$ при любом натуральном k , а также в случае $kx + l$, где $l \neq \pm 1$ для некоторых отдельных значений k .

В 1888 году Сильвестр [Л. 1] приводит элементарное доказательство теоремы Дирихле для всех случаев, когда разность прогрессии равна 8 или 12.

В основу своих рассуждений Сильвестр полагает следующий общий принцип:

„Для того чтобы доказать, что число простых чисел данной формы бесконечно, строим бесконечную последовательность целых попарно взаимно простых чисел, каждое из которых делится, по меньшей мере, на одно простое число данной формы“.

Для построения таких последовательностей он прибегает к таким двум леммам.

Лемма 1. Если $u_{x+1} = f(u_x)$, где f есть полином с целыми коэффициентами (целочисленный полином) и $f(f(0)) = f(0)$, то при любых натуральных r и s оказывается $(u_r, u_s) \mid f(0)$ ¹.

Лемма 2. Если $u_{x+1} = f(u_x)$ и, кроме того, $u_1 = f(0)$, то $(u_r, u_s) = u_t$, где $t = (r, s)$.

Эти две леммы обладают некоторыми неудобствами при употреблении, а именно; первая ограничивает выбор полинома f требованием $f(f(0)) = f(0)$, а вторая ограничивает выбор первого члена последовательности требованием $u_1 = f(0)$. Но самый серьезный

¹ Символом (a, b) мы обозначаем общий наибольший делитель чисел a и b . Если a делит b , то мы пишем $a \mid b$.

недостаток этих лемм состоит в том, что ни первая, ни вторая лемма не гарантируют взаимной простоты членов последовательности.

Две леммы Сильвестра можно заменить одной почти очевидной леммой, которая устраняет упомянутые выше недостатки, а именно:

Лемма 3. Если $u_{n+1} = f(\alpha_n \prod_{i=1}^n u_i)$, где α_n некоторый целый коэффициент, f есть целочисленный полином, причем $(\prod_{i=1}^n u_i, f(0)) = 1$, то при любых натуральных r и s оказывается $(u_r, u_s) = 1$.

Доказательство. Если $r > s$, то $u_r = f(0) \pmod{u_s}$, а потому

$$(u_r, u_s) = (u_s, f(0)) = 1.$$

Рассмотрим линейные делители некоторых квадратичных форм [Л. 2].

$x^2 + y^2$	$4z + 1.$
$x^2 + 2y^2$	$8z + 1, 3.$
$x^2 - 2y^2$	$8z + 1, 7.$
$x^2 + 3y^2$	$12z + 1, 7.$
$x^2 - 3y^2$	$12z + 1, 11.$
$x^2 + 5y^2$	$20z + 1, 3, 7, 9.$
$x^2 - 5y^2$	$20z + 1, 9, 11, 19.$
$x^2 + 6y^2$	$24z + 1, 5, 7, 11.$
$x^2 - 6y^2$	$24z + 1, 5, 19, 23.$
$x^2 + 7y^2$	$28z + 1, 9, 11, 15, 23, 25.$
$x^2 - 7y^2$	$28z + 1, 3, 9, 19, 25, 27.$
$x^2 + 10y^2$	$40z + 1, 7, 9, 11, 13, 19, 23, 37.$
$x^2 - 10y^2$	$40z + 1, 3, 9, 13, 27, 31, 37, 39.$

Полагая $f(x) = 2x^2 + 1$ и $u_1 = f(1) = 3$, найдем: $u_{n+1} = f(\prod_{i=1}^n u_i)$. Так как $f(0) = 1$, то, очевидно, при любом n окажется

$$(\prod_{i=1}^n u_i, f(0)) = 1.$$

Мы находим бесконечную последовательность попарно взаимно простых чисел: $f(1) = 3$, $f(1 \cdot 3) = 19$, $f(1 \cdot 3 \cdot 19) = 6499, \dots$

Каждое из этих чисел имеет вид $8m + 3$, так как при любом нечетном значении $x = 2m + 1$ окажется: $2^2 + 1 = 2(2m + 1)^2 + 1 = 2(4M + 1) + 1 = 8M + 3$.

Линейные делители квадратичной формы $2x^2 + y^2$ имеют вид $8z + 1, 3$, а потому каждый член рассматриваемой последовательности имеет по меньшей мере один простой делитель вида $8z + 3$, а потому простых чисел такого вида бесчисленное множество.

Положив: $f(x) = x^2 + 1$ и $u_1 = f(1) = 2$, находим: $u_{n+1} = f(\prod_{i=1}^n u_i)$.

Получаем последовательность:

$$f(2)=5; \quad f(2 \cdot 5)=101; \quad f(2 \cdot 5 \cdot 101)=1020101, \dots$$

В этом случае снова $f(0)=1$, а потому все члены рассматриваемой последовательности попарно взаимно просты.

Так как при любом n оказывается

$$\prod_{i=1}^n u_i = 2 \prod_{i=2}^n (8m_i + 5) = 8M + 2 \quad \text{и} \quad f(8M + 2) = 8N + 5,$$

то каждый член этой последовательности, начиная со второго, имеет вид $8N + 5$ и, делясь на линейные делители двух видов $8z + 1$ и $8z + 5$, содержит, по меньшей мере, один простой делитель вида $8z + 5$, чем и доказывается наличие бесконечного множества простых чисел такого вида.

Нет никакого труда с помощью нашей леммы обнаружить наличие бесконечного множества простых чисел видов $8z + l$, где $(8, l) = 1$ и видов $12z + l$, где $(12, l) = 1$.

Для этого достаточно воспользоваться, как это делает и Сильвестр, некоторыми квадратичными формами.

Мы получим более сильный аппарат, если воспользуемся биквадратичными формами, т. е. если мы будем искать такие числа, простые делители которых являются одновременными делителями двух квадратичных форм.

Рассмотрим

$$x^2 + Ay^2 = u^2 + Bv^2,$$

откуда

$$x^2 - u^2 = Bv^2 - Ay^2.$$

Если

$$D = (A, B), \quad \text{т. е.} \quad A = A_1 \cdot D \quad \text{и} \quad B = B_1 \cdot D, \quad \text{где} \quad (A_1, B_1) = 1,$$

то

$$(x + u)(x - u) = D(B_1v^2 - A_1y^2).$$

Положив

$$\begin{aligned} x - u &= D \\ x + u &= B_1v^2 - A_1y^2, \end{aligned}$$

находим:

$$x = \frac{1}{2} [B_1v^2 - A_1y^2 + D]$$

$$u = \frac{1}{2} [B_1v^2 - A_1y^2 - D]$$

Если

$$D, A_1 \text{ и } B_1$$

нечётны, то, полагая $v = y + 1$, находим:

$$x = \frac{1}{2} [(B_1 - A_1)y^2 + 2B_1y + B_1 + D] = ay^2 + by + c,$$

где

$$a = \frac{B_1 - A_1}{2}, \quad b = B_1, \quad c = \frac{B_1 + D}{2}.$$

Во всех остальных случаях, полагая $v = y$, имеем:

$$x = \frac{1}{2} [(B_1 - A_1)y^2 + D].$$

При этом окажется

$$x = at^2 + c \text{ или } x = at^3 + bt + c,$$

где $y = t$ или $y = 2t$, если D чётно, и $y = 2t + 1$, если D нечётно.

Воспользовавшись этим приёмом, можно доказать наличие бесчисленного множества простых чисел видов:

$$24z + 5, 7, 11, 13, 17, 19.$$

Для случая $24z + 5$ положим:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= u^2 + 6v^2, & (x+u)(x-u) &= 6v^2 - y^2 \\ x-u &= 1, & x+u &= 6v^2 - y^2, & v=y=2t+1 \\ x &= \frac{1}{2} [5y^2 + 1] = 10t^2 + 10t + 3, \end{aligned}$$

а потому

$$x^2 + y^2 = 100t^4 + 200t^3 + 164t^2 + 64t + 10.$$

Разделив на 2, находим полином:

$$f(t) = 50t^4 + 100t^3 + 82t^2 + 32t + 5,$$

линейные делители которого являются одновременными делителями двух форм:

$$x^2 + y^2 \text{ и } x^2 + 6y^2.$$

Это те делители вида $24z + 1, 5, 7, 11$ (делители формы $x^2 + 6y^2$), которые имеют вид $4z + 1$ (как делители формы $x^2 + y^2$), т. е. это числа двух видов: $24z + 1$ и $24z + 5$.

Положив

$$u_1 = f(1) = 269 \text{ и } u_{n+1} = f((-1)^n \prod_{i=1}^n u_i),$$

находим

$$u_i \equiv 5 \pmod{24}, \quad u_i \equiv -1 \pmod{f(0) = 5}$$

при любом значении индекса i , а потому

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i, f(0) \right) = (\pm 1, 5) = 1.$$

Итак, все числа данной последовательности попарно взаимно просты и каждое из них имеет вид

$$u_i = 24m_i + 5,$$

а потому каждое из них имеет по меньшей мере один простой делитель вида $24z + 5$, чем и доказывается наличие бесконечного множества простых чисел такого вида.

Для простых чисел вида $24z + 7$ воспользуемся формами:

$$\begin{aligned} x^2 + 3y^2 & \text{ с линейными делителями: } 24z + 1, 7, 13, 19 \\ \text{и } x^2 + 6y^2 & \text{ " " " " } 24z + 1, 5, 7, 11. \end{aligned}$$

Мы приходим к полиному

$$f(t) = 4t^4 + 8t^3 + 24t^2 + 20t + 7$$

Пусть

$$u_1 = f(2) = 271 \quad \text{и} \quad u_{n+1} = f(6\alpha_n \prod_{i=1}^n u_i),$$

где

$$a_n = (-4)^{n-1}.$$

В данном случае

$$u_1 \equiv -2 \pmod{7}$$

Допустив

$$u_1 \equiv u_2 \equiv u_3 \equiv \dots \equiv u_n \equiv -2 \pmod{7},$$

находим:

$$u_{n+1} = f(6 \cdot (-4)^{n-1} \cdot (-2)^n) = f(-1 \cdot (-2) \cdot (+8)^{n-1}) = f(2) = -2 \pmod{7}.$$

Таким образом, при любом значении n оказывается

$$\left(\prod_{i=1}^n u_{i2} f(0)\right) = ((-2)^n, 7) = 1.$$

Кроме того:

$$t = 6 \cdot (-4)^{n-1} \cdot \prod_{i=1}^n u_i \equiv 0 \pmod{24},$$

а потому при любом значении индекса i имеем:

$$u_i \equiv 7 \pmod{24}$$

т. е.

$$u_i = 24m_i + 7,$$

чем и обнаруживается наличие бесчисленного множества простых чисел вида $24z + 7$.

Для простых чисел вида $24z + 11$ имеем формы:

$x^2 - 3y^2$ с делителями $24z + 1, 11, 13, 23;$
 $x^2 + 6y^2$ " " $24z + 1, 5, 7, 11.$

Откуда находим:

$$f(t) = 2t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 11$$

$$\bar{u}_1 = f(2) = 107 \quad \text{и} \quad u_{n+1} = f(3 \prod_{i=1}^n u_i),$$

а потому

$$u_1 \equiv 11 \pmod{24}$$

$$u_i \equiv 8 \pmod{11}$$

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i, f(0)\right) = (8^n, 11) = 1,$$

и, следовательно, простых чисел вида $24z + 11$ бесчисленное множество.

Для простых чисел вида $24z + 13$ имеем:

$$\begin{array}{l} x^2 + 3y^2 \text{ с делителями } 24z+1, 7, 13, 19; \\ x^2 - 3y^2, \quad " \quad 24z+1, 11, 13, 23. \\ f(t) = 4t^4 + 9 \end{array}$$

$$u_1 = f(1) = 13; \quad \bar{u}_{n+1} = f\left(\prod_{i=1}^n u_i\right);$$

$$u_i \equiv 13 \pmod{24}$$

$$u_{2n} \equiv -2 \text{ и } u_{2n+1} \equiv 4 \pmod{9},$$

• а потому

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i, f(0) \right) = 1.$$

Для простых чисел вида $24z + 17$ рассмотрим формы:

$$x^2 + 2y^2 \quad \text{и} \quad x^2 - 2y^2.$$

Простые делители этих форм таковы:

$x^2 + 2y^2$ с простыми делителями: $24z + 1, 11, 17, 19.$
 $x^2 - 2y^2$ " " " $24z + 1, 7, 17, 23.$

Приходим к полиному

$$f(t) = t^4 + 1.$$

Затем

$$u_1 = f(2) = 17 \quad \text{и} \quad u_{n+1} = f\left(2 \prod_{i=1}^n u_i\right);$$

$$u_i \equiv 17 \pmod{24} \quad \text{и} \quad \left(\prod_{i=1}^n u_i, f(0) \right) = 1.$$

Наконец, для простых чисел вида $24z + 19$ пользуемся формами:

$$\begin{array}{l} x^2 + 3y^2 \text{ с делителями } 24z + 1, 7, 13, 19. \\ x^2 - 6y^2 \text{ „ „ „ „ } 24z + 1, 5, 19, 23. \\ f(t) = 4t^4 + 8t^3 - 4t + 19 \end{array}$$

$$u_1 = f(2) = 139 \quad \text{и} \quad u_{n+1} = f\left(\alpha_n \prod_{i=1}^n u_i\right),$$

где $\alpha_{2m+1} = 5$ и $\alpha_{2m} = 2$

$$u_i \equiv 19 \pmod{24} \quad \text{и} \quad \left(\prod_{i=1}^n u_i, f(0) \right) = 1.$$

Присоединяя сюда простые числа видов $24z + 1$, наличие бесконечного множества которых доказывается элементарно; мы исчерпаем все прогрессии вида:

$$24z + l, \text{ где } (l, 24) = 1.$$

Рассмотрим совокупность прогрессий вида:

$$(1) \kappa x + b, \quad \kappa x + b^{a_1}, \quad \kappa x + b^{a_2}, \dots,$$

где показатели $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ пробегают приведенную систему вычетов по модулю $\varphi(k)$. Такую совокупность прогрессий называют отделом прогрессий [Л. 3] или лучом прогрессий [Л. 4].

Так, например, если $k=10$, то $\varphi(k)=\varphi(2)\varphi(5)=4$.

Здесь мы имеем только два показателя: 1 и 3.

Так как $1^3 \equiv 1$; $3^3 \equiv 7$; $7^3 \equiv 3$; $9^3 \equiv 9 \pmod{10}$, то мы имеем всего 3 луча:

- 1) $10x+1$;
- 2) $10x+3, 7$;
- 3) $10x+9$.

Если $k=28$, то $\varphi(k)=\varphi(4)\varphi(7)=2 \cdot 6=12$ и показатели имеют значения:

1, 5, 7, 11.

В данном случае имеем всего 8 лучей:

- 1) $28x+1$;
- 2) $28x+3, 19$;
- 3) $28x+5, 17$;
- 4) $28x+9, 25$;
- 5) $28x+11, 23$;
- 6) $28x+13$;
- 7) $28x+15$;
- 8) $28x+27$.

Действительно:

$$\left. \begin{array}{l} 3^1 \equiv 3; \quad 3^5 \equiv 19; \quad 3^7 \equiv 3; \quad 3^{11} \equiv 19 \\ 19^1 \equiv 19; \quad 19^5 \equiv 3; \quad 19^7 \equiv 19; \quad 19^{11} \equiv 3 \end{array} \right\} \pmod{28}$$

и т. д.

Рассмотрим числа вида

$$f(t) = 10t + 3$$

Простые делители $f(t)$ могут иметь вид:

$$10z + 1, 3, 7, 9.$$

Но числа видов $10z+1$ и $10z+9$ не могут воссоздать числа вида $10t+3$, т. е. $f(t)$ при любом целом t делится по меньшей мере на один простой делитель вида $10z+3$ или $10z+7$.

Положив

$$u_1 = f(1) = 13 \quad \text{и} \quad u_{n+1} = f\left(\prod_{i=1}^n u_i\right),$$

находим:

$$u_i \equiv 3 \pmod{10} \quad \text{и} \quad u_i \equiv 1 \pmod{f(0)=3},$$

т. е.

$$\left(\prod u_i, f(0)\right) = (1, 3) = 1.$$

Таким образом, в луче прогрессий $10z+3, 7$ находится бесчисленное множество простых чисел. Однако приведенные здесь рассуждения не позволяют решить вопрос о том, в какой именно из двух прогрессий $10z+3$ или $10z+7$, а может быть и в каждой из них, заключено бесчисленное множество простых чисел.

Для луча прогрессий $28x+9, 25$ воспользуемся формами:

$$\begin{array}{ll} x^2 + 7y^2 & \text{с делителями } 28z+1, 9, 11, 15, 23, 25 \\ \text{и } x^2 - 7y^2 & \text{" " " } 28z+1, 3, 9, 19, 25, 27. \end{array}$$

Находим:

$$f(t) = 4t^4 + 49$$

Положив

$$u_1 = f(1) = 53 \quad \text{и} \quad u_{n+1} = f\left(\prod_{i=1}^n u_i\right),$$

получим:

$$u_{2n} \equiv 9 \quad \text{и} \quad u_{2n+1} \equiv 25 \pmod{28}.$$

Кроме того,

$$f(0) = 49$$

$$\prod_{i=1}^{2n} u_i \equiv 1 \quad \text{и} \quad \prod_{i=1}^{2n+1} u_i \equiv 4 \pmod{7}$$

т. е.

$$\left(\prod_{i=1}^n u_i, f(0)\right) = 1.$$

Этим доказывается наличие бесчисленного множества простых чисел в луче прогрессий $28x + 9, 25$.

Для прогрессий вида $20x + l$ мы находим такие лучи:

- | | | |
|------------------|----------------|--------------------|
| 1) $20x + 1;$ | 3) $20x + 9;$ | 5) $20x + 13, 17;$ |
| 2) $20x + 3, 7;$ | 4) $20x + 11;$ | 6) $20x + 19.$ |

Для луча $20z + 3, 7$ может служить квадратичная форма $x^2 + 5y^2$.

Для луча $20z + 9$ воспользуемся двумя формами $x^2 + 5y^2$ и $x^2 + y^2$.

Для луча $20z + 11$ рассмотрим $x^2 - 5y^2$, а для луча $20z + 13, 17$ имеем $x^2 + y^2$ и $10z + 3$.

Пользуясь квадратичными и биквадратичными формами, можно обнаружить бесчисленное множество простых чисел в различных лучах прогрессий.

ЛИТЕРАТУРА: .

1. Sylvester M., Preuve élémentaire du théorème de Dirichlet sur les progressions arithmétiques dans les cas où la raison est 8 ou 12, Comptes Rendus hebdomadaire des Séances de l'Académie des Sciences. T. 106., Paris, 1888.

2. Чебышев П., Теория сравнений, 1901.

3. Frobenius G., Über Beziehungen zwischen den Primidealen eines algebraischen Körpers und den Substitutionen seiner Gruppe, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1896.

4. Чеботарев Н. Г., Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданному классу подстановок, Известия Российской Академии наук, VI серия, т. XVII, 1923.

Э. Х. ГОХМАН

ОБ ОДНОМ ВЫВОДЕ ФОРМУЛЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ СТИЛЬТЪЕСА

В настоящей статье дано определение интеграла Стильтъеса, обобщающее его классическое определение, основанное на понятии предела по С. Шатуновскому. Приводится простое доказательство формулы интегрирования по частям для обобщенного таким образом интеграла.

Сегментом $[a, b]$, где $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, мы называем множество всех значений x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$. Каждой системе „точек деления“:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$$

отвечает „разбиение“ q сегмента $[a, b]$ на сегменты

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]. \quad (1)$$

Разбиение q_1 сегмента $[a, b]$ мы будем называть продолжением разбиения q и писать: $q_1 > q$, если q_1 совпадает с q или получается из q добавлением новых точек деления.

Если q_1 и q_2 —какие-либо два разбиения сегмента $[a, b]$, то через $q_1 q_2$ или $q_2 q_1$ мы обозначаем разбиение этого сегмента, составленное при участии всех точек деления разбиений q_1 и q_2 . Очевидно, что $q_1 q_2 > q_1$ и $q_1 q_2 > q_2$.

Таким образом, для каждых двух данных разбиений сегмента $[a, b]$ существует разбиение, являющееся продолжением каждого из данных разбиений.

Если $\delta = [\alpha, \beta]$ —какой-нибудь сегмент и $g(x)$ —какая-нибудь функция, определенная на концах α и β этого сегмента, то мы полагаем

$$\delta g = g(\beta) - g(\alpha).$$

В частности, при $\alpha = \beta$ будет $\delta g = 0$.

Пусть теперь $f(x)$ и $g(x)$ —две функции, определенные и конечные на данном сегменте $\Delta = [a, b]$. Мы будем обозначать через $\sigma_{fdg}(q)$ или просто через $\sigma(q)$ всякую сумму вида

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i g, \quad (2)$$

где q —какое-либо разбиение (1) сегмента $[a, b]$, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i]$ и $\{\xi_i\}$ —

какая-либо система „промежуточных точек“, удовлетворяющих условиям

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots, n).$$

В том частном случае, когда каждое из чисел ξ_i совпадает с каким-либо из концов соответствующего сегмента $[x_{i-1}, x_i]$, сумму (2) мы будем обозначать через $\sigma_{fdg}^*(q)$ или просто — через $\sigma^*(q)$.

В общем случае положим

$$\Delta'_i = [x_{i-1}, \xi_i], \quad \Delta''_i = [\xi_i, x_i] \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Тогда очевидно $\Delta_i g = \Delta'_i g + \Delta''_i g$.

Поэтому

$$\sigma(q) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i g = \sum_{i=1}^n \{ f(\xi_i) \cdot \Delta'_i g + f(\xi_i) \cdot \Delta''_i g \} = \sigma^*(q'),$$

где q' — разбиение сегмента $[a, b]$ при помощи точек деления

$$x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n, x_n.$$

Таким образом, каждому разбиению q сегмента $[a, b]$ и любому набору промежуточных точек $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ отвечает такое продолжение q' разбиения q , что

$$\sigma(q) = \sigma^*(q'). \quad (3)$$

Установим теперь эквивалентность следующих двух определений интеграла Стильтьеса.

Пусть I — какое-либо число. Мы положим

$$I = \int_a^b f(x) dg(x), \quad (4)$$

если любому положительному числу ε отвечает такое разбиение q_0 сегмента $[a, b]$, что

$$|\sigma_{fdg}(q) - I| < \varepsilon \quad (q > q_0), \quad (1^\circ)$$

$$|\sigma_{fdg}^*(q) - I| < \varepsilon \quad (q > q_0). \quad (2^\circ)$$

Если равенство (4) имеет место в смысле определения (1°), то это равенство имеет место и в смысле определения (2°), ибо для каждого q любое из значений $\sigma^*(q)$ является одним из значений $\sigma(q)$.

Пусть теперь дано, что (4) имеет место в смысле определения (2°). Как было отмечено выше, для каждого разбиения q существует такое разбиение $q' > q$, что имеет место (3). Поэтому

$$|\sigma_{fdg}(q) - I| = |\sigma_{fdg}^*(q') - I|. \quad (5)$$

Согласно условию, наперед данному, $\varepsilon > 0$ отвечает такое разбиение q_0 сегмента $[a, b]$, что правая часть (5) будет меньше ε , если только $q' > q_0$.

Так как $q' > q$, то при выполнении условия $q > q_0$ будет $q' > q_0$ и, поэтому, согласно (5),

$$|\sigma_{fdg}(q) - I| < \varepsilon \quad (q > q_0).$$

Таким образом, доказано, что (4) имеет место в смысле определения (1°).

Эквивалентность обоих определений доказана.

Рассмотрим какой-нибудь сегмент $\Delta = [\alpha, \beta]$.

Нетрудно видеть, что

$$\delta(fg) = f(\beta)g(\beta) - f(\alpha)g(\alpha) = f(\beta)[g(\beta) - g(\alpha)] + [f(\beta) - f(\alpha)]g(\alpha).$$

Следовательно

$$\delta(fg) = f(\beta) \cdot \delta g + \delta f \cdot g(\alpha). \quad (6)$$

Аналогично

$$\delta(fg) = [f(\beta) - f(\alpha)]g(\beta) + f(\alpha)[g(\beta) - g(\alpha)]$$

и, следовательно

$$\delta(fg) = \delta f \cdot g(\beta) + f(\alpha) \cdot \delta g. \quad (7)$$

Сопоставляя (6) и (7), мы приходим к следующему выводу:

$$\delta(fg) = \delta f \cdot g(\eta) + f(\zeta) \cdot \delta g, \quad (8)$$

где η — обозначаем любой из концов сегмента $\Delta = [\alpha, \beta]$, а ζ — есть другой из концов этого сегмента.

Теорема. Если существует один из интегралов $\int_a^b f(x) dg(x)$, $\int_a^b g(x) df(x)$, то существует другой из них и, при этом выполняется равенство:

$$f(b)g(b) - f(a)g(a) = \int_a^b f(x) dg(x) + \int_a^b g(x) df(x). \quad (9)$$

Доказательство. Пусть q — какое-либо разбиение (1) сегмента $[a, b]$, и $\{\xi_i\}$ — какая-либо система промежуточных точек:

$$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i,$$

Тогда, полагая

$$\Delta'_i = [x_{i-1}, \xi_i], \quad \Delta''_i = [\xi_i, x_i]$$

и применяя (8) к каждому из сегментов Δ'_i и Δ''_i , будем иметь:

$$\Delta'_i(fg) = f(\xi_i) \cdot \Delta'_i g + \Delta'_i f \cdot g(x_{i-1})$$

$$\Delta''_i(fg) = f(\xi_i) \cdot \Delta''_i g + \Delta''_i f \cdot g(x_i).$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$\Delta_i(fg) = f(\xi_i) \cdot \Delta_i g + \{g(x_{i-1}) \cdot \Delta'_i f + g(x_i) \cdot \Delta''_i f\}.$$

Складывая эти равенства при $i = 1, 2, \dots, n$, будем иметь

$$\Delta(fg) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i g + \sum_{i=1}^n \{g(x_{i-1}) \cdot \Delta'_i f + g(x_i) \cdot \Delta''_i f\},$$

где $\Delta = [a, b]$. Обозначая через q' разбиение сегмента Δ точками деления $x_0, \xi_1, x_1, \xi_2, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n, x_n$, мы сможем последнее равенство переписать в виде:

$$\Delta(fg) = \sigma_{fdg}(q) + \sigma_{gdf}^*(q').$$

Пусть I_1 и I_2 — два какие-либо числа, удовлетворяющие условию

$$\Delta(fg) = I_1 + I_2. \quad (10)$$

Тогда вычитая это равенство из предыдущего, будем иметь:

$$0 = [\sigma_{fg}(q) - I_1] + [\sigma_{gdf}^*(q') - I_2]$$

и, следовательно,

$$|\sigma_{fg}(q) - I_1| = |\sigma_{gdf}^*(q') - I_2|. \quad (11)$$

Пусть теперь дано, что существует интеграл $\int_a^b g(x) df(x)$.

Мы тогда полагаем

$$I_2 = \int_a^b g(x) df(x). \quad (12)$$

Для наперед данного $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение q_0 сегмента $[a, b]$, что правая часть (11) будет меньше ε , если только $q' > q_0$.

Так как $q' > q$, то при выполнении условия $q > q_0$ будем иметь $q' > q_0$. Поэтому, согласно (11)

$$|\sigma_{fg}^*(q) - I_1| < \varepsilon \quad (q > q_0).$$

Таким образом, доказано, что существует интеграл $\int_a^b f(x) dg(x)$ и, при этом,

$$I_1 = \int_a^b f(x) dg(x). \quad (13)$$

На основании (12) и (13) из (10) получаем (9). Таким образом, теорема доказана.

Заметим, что определение интеграла Стильтьеса, которым мы здесь пользовались, не совпадает с классическим определением, гласящим:

$$I = \int f(x) dg(x),$$

если любому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta_i g - I \right| < \varepsilon,$$

когда скоро $\Delta_i x < \delta$ и $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$. Нетрудно показать, что, если существует интеграл $\int_a^b f(x) dg(x)$ в смысле классического определения, то этот интеграл существует и в смысле определения (1°) и имеет то же числовое значение, что и в смысле классического определения. Обратное неверно.

Б. С. ДМИТРИЕВ

О МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ОСНОВНЫХ СТЕХИОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАКОНОВ В КУРСЕ НЕОРГАНИЧЕСКОЙ ХИМИИ

В работе рассмотрены общие алгебраические формулировки основных законов химии, облегчающие изучение и применение их для решения практических задач курса неорганической химии в высшей школе.

Важной особенностью естественных и технических наук является количественный характер изучаемых ими закономерностей, которые могут быть представлены в общих математических формулировках.

Законы физики, наряду со словесной формулировкой, основанной на учете существенных признаков явления, имеют общие формулировки, выраженные определенным уравнением различной степени сложности.

Нельзя представить себе преподавателя физики средней и высшей школы, который, говоря о законе Бойля-Мариотта, ограничился бы словесным выражением закона и подбором частных примеров его проявления.

В данном случае фигурируют такие выражения:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

$$P = \frac{\kappa}{V}$$

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 = \dots = \kappa$$

$$(PV)_T = \kappa$$

Следует отметить, что законы физики, в принципе, более просты, чем законы химические, так как физические законы отражают более простую форму движения материи, чем химические превращения.

Есть основание считать, что последовательное применение общих алгебраических формулировок основных химических законов может быть полезным в курсе высшей школы.

Можно наблюдать, что часть студентов относится к изложению стехиометрических законов как к некоторой „словесности“, над которой не следует особенно задумываться именно вследствие кажущейся простоты этой „словесности“.

Обобщенные алгебраические формулировки законов, отражающие обычно феноменологическую (экспериментальную) сторону явления, должны фиксировать внимание студентов на ранее изложенном учебном материале, побуждать их к более глубокому изучению сущности закона и к его сознательному практическому применению.

Основными стехиометрическими законами химии являются:

- 1) закон сохранения веса (массы) (Ломоносов — Лавуазье);
- 2) закон постоянства состава химических соединений (И. Пруст);
- 3) закон кратных отношений (Дж. Дальтон);
- 4) закон эквивалентов (И. Рихтер и др.);
- 5) закон целых объемов (И. Гей-Люссак);
- 6) закон Авогадро и основанное на нем уравнение Клапейрона — Менделеева.

Формула Жерара, выражающая зависимость между грамм-молекулярным весом газа и его относительной плотностью при нормальных условиях, по существу, представляет собой алгебраическое выражение закона Авогадро в его химической трактовке (Л. 1).

Алгебраические формулировки стехиометрических законов должны отвечать таким основным требованиям:

- 1) полностью соответствовать смыслу словесной формулировки закона;

- 2) система обозначений должна быть единой для всех законов;

- 3) выражать химическую специфичность законов.

Автор остановился на следующей системе обозначений:

m — масса (или вес),

m_A, m_B и т. д. — масса (или весовое количество) химического элемента или химического соединения;

$\sum m$ — общая масса начальная (до реакции);

$\sum m_{\kappa}$ — общая масса конечная (после реакции);

$m'_A, m''_A, \dots, m'_B, m''_B$

и т. д. — масса (или вес) элемента, определяемая в результате анализов одного и того же химического соединения (содержащего A и B);

$m_A^{(1)}, m_A^{(2)}, \dots, m_B^{(1)}, m_B^{(2)}$

и т. д. — масса (или вес) элемента, определяемая в результате анализов различных соединений (содержащих A и B);

K — постоянная величина;

n — (если нужно, с индексами) — целое число;

$\mathcal{E}$ — химический эквивалент (и граммэквивалент) элемента и химического соединения;

M — граммоллекулярный и молекулярный вес;

V — объем газа или пара;

V_m — граммоллекулярный объем газа или пара;

δ — плотность газа или пара (вес единицы объема);

E — энергия;

a — атомный (и граммотомный) вес элемента;

ω — валентность элемента в данном соединении¹.

¹ Возможна, конечно, и другая система обозначения.

1. Алгебраические формулировки закона сохранения веса (массы) при химических реакциях

В учебнике проф. В. В. Шарвина — „Введение в химию“ (1931 г.) даны общие выражения:

$$1) P_a + P_b = P_m + P_n \quad \text{и} \quad 2) m_a + m_b = m_m + m_n$$

(для закона сохранения веса и массы) [Л. 2].

Эти формулы, далее, обобщаются весьма формальными алгебраическими выражениями: $\Sigma p = 0$ и $\Sigma m = 0$ (алгебраические суммы весов и масс, исчезающих и возникающих при реакции).

В книге кратко изложена сущность закона взаимосвязи массы и энергии ($E = mc^2$).

Вышеприведенные алгебраические выражения для закона сохранения веса (или массы) следует видоизменить так:

$$P_A + P_B + \dots = P_C + P_D + \dots \quad \text{и} \quad m_A + m_B + \dots = m_C + m_D + \dots$$

(поскольку нет оснований ограничиваться уравнением реакций двойного обмена).

Это выражение применимо для решения числовых примеров.

Обозначив $m_A + m_B + \dots$ через $\Sigma_k m$ и $m_C + m_D + \dots$ — через $\Sigma_k m$, получаем $\Sigma_k m = \Sigma_k m$ — закон сохранения массы в химической трактовке.

Учитывая энергетические эффекты химических реакций, можем написать: $\Sigma_k m = \Sigma_k m \pm m_E$ или $\Sigma_k m = \Sigma_k m \pm \Delta m_E$, где m_E и Δm_E представляют собой изменения массы, связанные с выделением или поглощением энергии. Δm_E — положительное число. Необходимо здесь же отметить крайнюю незначительность изменения массы при химических реакциях и значительность этого дефекта массы в ядерных процессах (в соответствии с закономерностью $\Delta E = \Delta mc^2$, выражающей общую взаимосвязь массы и энергии).

Приводимые в некоторых учебниках указания о неточности закона сохранения массы излишни, так как, в общем смысле, этот закон совершенно точен.

Необходимо подчеркивать, что каждое уравнение химической реакции представляет собой иллюстрацию закона сохранения веса и поясняет его сущность с атомистической точки зрения (число атомов и их вес остаются практически без изменения).

2. О формулировке закона постоянства состава химических соединений

Алгебраическая формулировка этого закона должна подчеркивать его экспериментальную сторону — связь с результатами множества анализов данного химического соединения.

В соответствии с приведенными выше обозначениями имеем:

$$\frac{m_{A'}}{m_{B'}} = \frac{m_{A''}}{m_{B''}} = \frac{m_{A'''}}{m_{B'''}} = \dots = \kappa$$

Вообще:

$$\frac{m_A}{m_B} = \kappa \quad \text{и} \quad m_A = \kappa \cdot m_B$$

Это отвечает положению, что элементы соединяются между собой в определенных весовых отношениях.

Формулировка является общей, так как она имеет в виду не только бинарные соединения.

Смысл k — весовое количество (и масса) элемента A , приходящееся на 1 весовую часть элемента B в данном соединении.

Необходимо учитывать, что закон эквивалентов и закон кратных отношений конкретизируют и детализируют закон постоянства состава.

Не так уже редки случаи, когда учащиеся и студенты затрудняются в решении простых задач, связанных с законом постоянства состава.

Объяснение внутренней (атомистической) природы закона постоянства состава химических соединений, по существу, было дано М. В. Ломоносовым (1741):

«Смешанное тело (химическое соединение) есть то, которое состоит из двух или нескольких различных начал (элементов), так соединенных между собой, что каждая отдельная его корпускула (молекула) имеет такое же отношение частей начал, из которых тело состоит, как (для целых отдельных начал) имеет и все смешанное тело» (Л. 3).

В приведенной формулировке М. В. Ломоносова прямо не сказано, что любое весовое количество начала состоит из атомов («элементов»), но смысл ее, несомненно, сводится к утверждению, что относительный количественный состав одной корпускулы (напр., AB) такой же, как любого числа корпускул ($n \cdot AB$).

Именно так следует пояснять атомистический смысл закона постоянства состава.

Б. М. Кедров отмечает, что Ломоносов сформулировал в общем виде принцип атомистического истолкования будущих законов химической стехиометрии. С этим мнением Б. М. Кедрова следует согласиться, однако, нельзя говорить о целочисленности и кратности составных частей химического соединения в целом, так как закон кратных отношений обнаруживается при сопоставлении весового состава двух или нескольких химических соединений (Л. 4).

Высказывания М. В. Ломоносова непосредственно связаны с законом постоянства состава.

3. Закон кратных отношений

В соответствии с указанными выше обозначениями, имеем:

$$\frac{m_A^{(1)}}{m_B^{(1)}} : \frac{m_A^{(2)}}{m_B^{(2)}} : \dots = n^{(1)} : n^{(2)} : \dots$$

Дроби выражают весовые количества элемента A , приходящиеся на одну весовую часть элемента B (в нескольких соединениях) $n^{(1)}$, $n^{(2)}$ и т. д. — целые числа.

Выражение это является общим, так как при расчете не на одну, а на несколько весовых частей элемента B , соответствующие коэффициенты перед дробями сократятся.

Нельзя согласиться с той чисто исторической трактовкой закона кратных отношений, в которой он по традиции излагается в руководствах. Это — общий закон целочисленных отношений, а не только закон простых и кратных отношений.

Кратность весовых отношений в строго арифметическом смысле этого термина является исключением, а не правилом.

В курсе общей химии Б. В. Некрасова (1952) (Л. 5) отмечается, что закон кратных отношений неприменим к окислам азота, если расчет вести на одну весовую часть не азота, а кислорода.

Расчет показывает, что весовые количества азота в данном случае относятся как целые числа: 60, 30, 20, 15, 12 вместо 1 : 2 : 3 : 4 : 5 — для кислорода.

Эти весовые отношения для азота было бы затруднительно вывести на основании экспериментальных данных, но, ведь, объективность существования и степень общности закона природы не определяется чувствительностью применяемых методов исследования. Отношения должны быть целочисленными во всех случаях, так как существование закона кратных отношений определяется наличием целых чисел атомов двух элементов в сопоставляемых химических соединениях.

Атомистическое объяснение закона кратных (целочисленных) отношений следует проводить, пользуясь химическим языком. Если студент хорошо понимает качественный и количественный смысл формул: NO , NO_2 , N_2O_3 и т. д., Si_2O и SiO , SO_2 и SO_3 и т. д., объяснение не составляет большого труда.

Необходимо, конечно, сделать обобщающий логический вывод из этих примеров: на одно и то же число атомов одного элемента в рассматриваемых соединениях приходится разные, но целые числа атомов другого элемента.

4. Закон эквивалентов

В соответствии с применяемыми обозначениями, получаем:

$$m_A : m_B : m_C : \dots = \mathcal{E}_A : \mathcal{E}_B : \mathcal{E}_C : \dots$$

Это выражение является общим, так как индексы $A, B, \dots$ могут означать и элементы и химические соединения.

Выражая эквиваленты элементов через атомные веса и валентности элементов в данном соединении, получаем:

$$m_A : m_B : \dots = \frac{a_A}{W_A} : \frac{a_B}{W_B} : \dots$$

5. Закон целых объемов

Иногда говорят о двух объемных законах Гей-Люссака. По существу же закон один, так как объемные отношения газов, вступающих в реакцию, определяют объемные отношения газов, получаемых в результате реакции (и наоборот).

В соответствии с принятыми обозначениями получаем общую формулировку закона целых объемов с учетом объемов газов, вступающих в реакцию и образующихся в результате реакции:

$$v_n^{(1)} : v_n^{(2)} : \dots : v_k^{(1)} : v_k^{(2)} : \dots = n_n^{(1)} : n_n^{(2)} : \dots : n_k^{(1)} : n_k^{(2)} : \dots$$

Общее выражение закона упрощается, если объемы начальные и конечные не дифференцируются:

$$v^{(1)} : v^{(2)} : v^{(3)} : \dots = n^{(1)} : n^{(2)} : n^{(3)} : \dots$$

$$\text{или } v_A : v_B : v_C : \dots = n_A : n_B : n_C : \dots$$

Число n в каждом случае равно числу молекул газа, согласно химическому уравнению реакции, а объемы газов прямо пропорциональны числу молекул и наоборот.

6. Закон Авогадро

Физическая формулировка закона Авогадро лишена химического содержания, она «равнодушна» к качественной характеристике вещества. По существу, эта формулировка сводится к положению: в равных объемах различных газов, при одинаковых физических условиях, содержится одинаковое число частиц (в дальнейшем — кинетических единиц)¹.

Работы Жерара и строгое разграничение понятий об атомном и молекулярном весе (1860) обусловили возможность химической трактовки закона Авогадро.

Химическое понимание закона Авогадро связано с понятием о граммоллекулярном весе и граммоллекулярном объеме.

Эти величины связаны между собой равенством: $M = V_m \cdot \delta$, где V_m — граммоллекулярный объем газа, δ — вес одного литра (абсолютная плотность газа).

Отсюда имеем для всех газов:

$$\frac{M_1}{\delta_1} = \frac{M_2}{\delta_2} = \frac{M_3}{\delta_3} = \dots = \frac{M_n}{\delta_n} = V_m = \kappa \quad 1$$

и $\frac{M}{\delta} = \kappa II$, где κ имеет размерность объема.

Выражения I и II представляют собой алгебраические формулировки закона Авогадро [Л. 1].

Исходя из закона Авогадро, получаем следующие формулы:

$$1) M = 2,016 D_{H_2}, \quad 2) M = 29 D_{возд} \quad \text{и} \quad 3) M = \frac{mRT}{pv}$$

(уравнение Клапейрона—Менделеева).

$M = 2,016 D_{H_2}$ означает, что молекулярный вес газа или пара равен молекулярному весу водорода, умноженному на плотность газа по водороду, а не удвоенной плотности по водороду. Последняя формулировка может быть исключена из учебной практики.

Отметим, что 29 — не средний молекулярный вес воздуха, а средне-взвешенный.

Изложенная в предлагаемой работе методическая трактовка основных стехиометрических законов химии применялась нами в течение ряда лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. Менделеев Д. И., Основы химии, т. I, 1947, стр. 223—224.
2. Шарвин В. В., Введение в химию, 1931, стр. 18—19.
3. Меншуткин Б. Н., Труды М. В. Ломоносова по физике и химии, 1936, стр. 49.
4. Кедров Б. М., Атомистика Дальтона, 1949, стр. 101, 114, 248.
5. Некрасов Б. В., Курс общей химии, 1952, стр. 210.

¹ Средняя кинетическая энергия частиц любого рода при данной температуре есть величина постоянная — $\bar{E} = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} kT$.

Н. С. НИКИТЕНКО

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КРИТИЧЕСКИХ СКОРОСТЕЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ КОНСОЛЬНЫХ ВАЛОВ

В данной статье изложено развитие метода А. Н. Крылова для определения критических скоростей консольных валов без учета и с учетом гироскопического эффекта. Получено решение в частности для вала в двух подшипниках с консолью, что отвечает расчетной схеме валопривода вальцевого станка.

Существующие методы определения критических скоростей вращающихся валов при их поперечных колебаниях разделяют на „точные“ и „приближенные“.

Точные методы позволяют найти все критические скорости данного вала, приближенные — только скорости, соответствующие определенным формам колебаний. Значение критической скорости, полученное при помощи приближенных методов, отличается от точного значения, причем ошибка зависит от избранного метода и формы колебаний.

Из различных способов точного определения критических скоростей наиболее рациональным является точный метод А. Н. Крылова [Л. 1], благодаря которому вместо многочисленных уравнений для определения произвольных постоянных приходится решать во всех случаях два уравнения с двумя неизвестными.

В 1932 году А. Н. Крылов применил этот метод к определению критических скоростей однопролетных валов [Л. 2]. В 1935 году Е. Б. Лунц распространил этот метод на многоопорные валы [Л. 3].

В данной работе разработан теоретический аппарат для определения критических скоростей вращающихся консольных валов при помощи точного метода с применением функций Крылова. Наличие на валу сосредоточенных масс и промежуточных опор не препятствует применению этого метода и дает возможность учесть гироскопический эффект шкивов без изменения схемы решения.

Описываемый метод определения критических скоростей валов является необходимым теоретическим основанием для исследования влияния упругой среды на критические скорости валоприводов вальцевых станков.

1. Методика определения критических скоростей

Точный метод сводится к интегрированию дифференциального уравнения динамического равновесия.

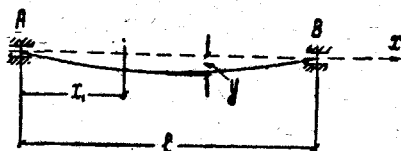


Рис. 1.
Однопролетный вал.

Дифференциальное уравнение динамического равновесия вала будет:

$$y^{IV} - \frac{p \omega^2}{g E I_z} y = 0,$$

где y — динамический прогиб,
 p — вес единицы длины вала,
 ω — угловая скорость вращения вала,
 E — модуль нормальной упругости материала вала,
 I_z — момент инерции площади его сечения,

Обозначая

$$\frac{p \omega^2}{g E I_z} = \kappa^4,$$

получим

$$y^{IV} - \kappa^4 y = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$y = A \operatorname{Ch} \kappa x + B \operatorname{Sh} \kappa x + C \cos \kappa x + D \sin \kappa x$$

заменяется по методу А. Н. Крылова решением в виде:

$$y = A S(\kappa x) + B T(\kappa x) + C U(\kappa x) + D V(\kappa x), \quad (1)$$

где

$$S(\kappa x), \quad T(\kappa x), \quad U(\kappa x), \quad V(\kappa x)$$

—любые частные решения, линейно-независимые между собой и удовлетворяющие нашему уравнению.

Эти частные решения подчиняются условию:

$S(0) = 1$	$S'(0) = 0$	$S''(0) = 0$	$S'''(0) = 0$
$T(0) = 0$	$T'(0) = 1$	$T''(0) = 0$	$T'''(0) = 0$
$U(0) = 0$	$U'(0) = 0$	$U''(0) = 1$	$U'''(0) = 0$
$V(0) = 0$	$V'(0) = 0$	$V''(0) = 0$	$V'''(0) = 1$

Тогда, приняв частные решения в виде:

$$\begin{aligned} S(\kappa x) &= A_1 \operatorname{Ch} \kappa x + B_1 \operatorname{Sh} \kappa x + C_1 \cos \kappa x + D_1 \sin \kappa x \\ T(\kappa x) &= A_2 \operatorname{Ch} \kappa x + B_2 \operatorname{Sh} \kappa x + C_2 \cos \kappa x + D_2 \sin \kappa x \\ U(\kappa x) &= A_3 \operatorname{Ch} \kappa x + B_3 \operatorname{Sh} \kappa x + C_3 \cos \kappa x + D_3 \sin \kappa x \\ V(\kappa x) &= A_4 \operatorname{Ch} \kappa x + B_4 \operatorname{Sh} \kappa x + C_4 \cos \kappa x + D_4 \sin \kappa x, \end{aligned}$$

находим на основании единичной матрицы, что

$$\begin{aligned} S(\kappa x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{Ch} \kappa x + \cos \kappa x) \\ T(\kappa x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{Sh} \kappa x + \sin \kappa x) \\ U(\kappa x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{Ch} \kappa x - \cos \kappa x) \\ V(\kappa x) &= \frac{1}{2} (\operatorname{Sh} \kappa x - \sin \kappa x). \end{aligned}$$

Приведенный выбор частных решений даёт возможность записать решение уравнения динамического равновесия, содержащее лишь две постоянных произвольных.

Найдем зависимости между функциями Крылова и производными

$$\begin{aligned} S'(\kappa x) &= \frac{\kappa}{2} (\operatorname{Sh} \kappa x - \sin \kappa x) = \kappa V(\kappa x) \\ S''(\kappa x) &= \frac{\kappa^2}{2} (\operatorname{Ch} \kappa x - \cos \kappa x) = \kappa^2 U(\kappa x) \\ S'''(\kappa x) &= \frac{\kappa^3}{2} (\operatorname{Sh} \kappa x + \cos \kappa x) = \kappa^3 T(\kappa x) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

и составим таблицу

Табл. 1			
Φ	Φ'	Φ''	Φ'''
$S(\kappa x)$	$\kappa V(\kappa x)$	$\kappa^2 U(\kappa x)$	$\kappa^3 T(\kappa x)$
$T(\kappa x)$	$\kappa S(\kappa x)$	$\kappa^2 V(\kappa x)$	$\kappa^3 U(\kappa x)$
$U(\kappa x)$	$\kappa T(\kappa x)$	$\kappa^2 S(\kappa x)$	$\kappa^3 V(\kappa x)$
$V(\kappa x)$	$\kappa U(\kappa x)$	$\kappa^2 T(\kappa x)$	$\kappa^3 S(\kappa x)$

Из таблицы видно, что функции $S(\kappa x)$, $T(\kappa x)$, $U(\kappa x)$, $V(\kappa x)$ обладают свойством круговой замены до производных четвертого порядка включительно.

В уравнении (1) величины A , B , C , D — постоянные произвольные.

При наличии внешней нагрузки уравнение упругого динамического равновесия имеет вид:

$$EI_2 y^{IV} - \frac{p}{g} \omega^2 y = F(x_1).$$

Примем $x = \frac{x_1}{l}$, тогда перепишем уравнение

$$y^{IV} - \frac{p}{g} \omega^2 \frac{l^4}{EI_2} y = \frac{l^4}{EI_2} F(x_1).$$

Обозначим $\frac{p \omega^2 l^4}{g E I_2} = \kappa^4$, $\frac{l^4}{E I_2} F(x_1) = f(x)$

и получим:

$$y^{IV} - \kappa^4 y = f(x) \quad (2)$$

Общее решение этого уравнения будет складываться из суммы общего решения (1), приведенного выше, и частного решения полного уравнения $\Phi(x)$

$$y = N + \Phi(x).$$

При наличии сосредоточенной нагрузки Q

$$\Phi(x) = \frac{l^3}{\kappa^3 E I_2} Q V(x-a), \quad (3)$$

а при наличии сосредоточенного момента M :

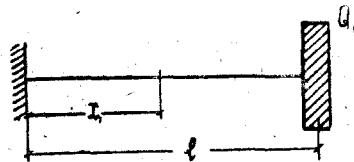
$$\Phi(x) = \frac{l^3}{\kappa^2 E I_2} M U(x-a) \quad (4)$$

Имея выражения $\Phi(x)$, мы можем составить уравнение упругой линии для вала с каким угодно числом сосредоточенных сил и пар.

Расчет консольного вала, нагруженного сосредоточенной силой

Рассмотрим вал, заделанный жестко одним концом (длинный подшипник).

Прямое применение метода Крылова не дает положительных результатов. Так, в данном примере A и B равны нулю из граничных условий:



$$y(0) = 0; \quad y'(0) = 0$$

и мы имеем решение

$$y = CU(\kappa x) + DV(\kappa x); \quad x = \frac{x_1}{l}.$$

Используя условия на правом конце

$$y''(l) = 0; \quad y'''(l) = Q,$$

получим систему уравнений такого вида

$$\left. \begin{aligned} CU''(\kappa) + DV''(\kappa) &= 0 \\ CU'''(\kappa) + DV'''(\kappa) &= Q \end{aligned} \right\}$$

Решение этих уравнений оказывается сложным.

Для установления принципа решения вращающихся валов этого типа применим следующий метод. Рассмотрим сперва сосредоточенную массу, расположенную не на конце консоли, и составим уравнения для I и II участка вала.

Для I участка

$$0 \leq x \leq a \quad a = \frac{x_1}{l}$$

$$v = CU(\kappa x) + DV(\kappa x).$$

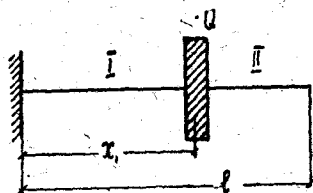


Рис. 3. Консольный вал с нагрузкой в любом месте.

Для II участка

$$a \leq x \leq l$$

$$y = CU(\kappa x) + DV(\kappa x) + \Phi(x),$$

где

$$\Phi(x) = \frac{l^3}{\kappa^3 EI} QV[\kappa(x-a)].$$

Заметим, что для вращающегося вала сила не задается, известна лишь масса шкива m

$$Q = m\omega^2 y_{(a)} = m\omega^2 [CU(\kappa a) + DV(\kappa a)],$$

тогда

$$y = CU(\kappa x) + DV(\kappa x) + \frac{l^3}{\kappa^3 EI} m\omega^2 [CU(\kappa a) + DV(\kappa a)] V[\kappa(x-a)],$$

но

$$\frac{p\omega^2 l^4}{gEI} = \kappa^4, \quad \text{а} \quad \frac{m\omega^2 l^3}{\kappa^3 EI} = \frac{mg}{pl} \kappa.$$

Обозначим $\frac{mg}{pl} = \alpha$ и тогда заменим $\frac{m\omega^2 l^3}{\kappa^3 EI}$ через $\alpha \kappa$.

Окончательно для II участка уравнение примет вид:

$$y = CU(\kappa x) + DV(\kappa x) + \alpha \kappa [CU(\kappa a) + DV(\kappa a)] V[\kappa(x-a)]$$

при

$$x=1 \quad y''=0; \quad y'''=0$$

$$CU''(\kappa) + DV''(\kappa) + \alpha \kappa [CU(\kappa a) + DV(\kappa a)] V''[\kappa(1-a)] = 0$$

$$CU'''(\kappa) + DV'''(\kappa) + \alpha \kappa [CU(\kappa a) + DV(\kappa a)] V'''[\kappa(1-a)] = 0.$$

Теперь перейдем к интересующему нас случаю, когда груз находится на конце консоли, т. е. положим $a=1$, при этом заметим, что $V''(0)=0$, а $V'''(0)=\kappa^3$, что и дает нам возможность рассмотреть случай $a=1$.

Тогда будем иметь систему уравнений в виде:

$$CU''(\kappa) + DV''(\kappa) = 0$$

$$CU'''(\kappa) + DV'''(\kappa) + \alpha \kappa [CU(\kappa) + DV(\kappa)] \kappa^3 = 0$$

или

$$\begin{cases} CU''(\kappa) + DV''(\kappa) = 0 \\ C[U'''(\kappa) + \alpha \kappa^4 U(\kappa)] + D[V'''(\kappa) + \alpha \kappa^4 V(\kappa)] = 0. \end{cases} \quad (5)$$

$$\Delta(\kappa) = U''(\kappa) [V'''(\kappa) + \alpha \kappa^4 V(\kappa)] - V''(\kappa) [U'''(\kappa) + \alpha \kappa^4 U(\kappa)] = 0.$$

Заменяя производные их значениями, а затем и самими функциями, произведя все алгебраические преобразования, получим характеристическое уравнение

$$\Delta(\kappa) = \text{Sh } \kappa \cos \kappa + 1 + \alpha \kappa [\text{Sh } \kappa \cos \kappa - \text{Ch } \kappa \sin \kappa] = 0. \quad \text{I}$$

Трансцендентное уравнение имеет бесчисленное множество корней. Для вычисления удобны таблицы Хаяси, помещенные в книге Крылова [Л. 1], а также таблицы Гогенемзера и Прагера [Л. 5].

По разработанной выше методике, дающей возможность применять метод Крылова, рассчитаем одноконсольный вал. Начало координат для каждого участка в отдельности обязательно выберем на левом конце.

2. Определение критических скоростей консольных валов

А. Ненагруженный одноконсольный вал

Общее решение для первого участка

$$y_1 = A_1 S(\kappa_1 x_1) + B_1 T(\kappa_1 x_1) + C_1 U(\kappa_1 x_1) + D_1 V(\kappa_1 x_1), \text{ где } \kappa_1^4 = \frac{p \omega^2 l^4}{g E I}, \quad x_1 = \frac{x_1'}{l}.$$

Общее решение для второго участка

$$y_2 = A_2 S(\kappa_2 x_2) + B_2 T(\kappa_2 x_2) + C_2 U(\kappa_2 x_2) + D_2 V(\kappa_2 x_2), \text{ где } \kappa_2^4 = \frac{p \omega^2 c^4}{g E I}, \quad x_2 = \frac{x_2'}{c}.$$

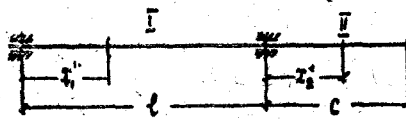


Рис. 4.

Одноконсольный вал без нагрузки.

Используем граничные условия на левом конце 1 участка

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0; \quad y_1'' = 0.$$

Тогда

$$y_1 = B_1 T(\kappa_1 x_1) + D_1 V(\kappa_1 x_1).$$

При $x_1 = l$, $y_1 = 0$, откуда $B_1 = -D_1 \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)}$

$$y_1 = D_1 \left[V(\kappa_1 x_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} T(\kappa_1 x_1) \right].$$

Используя условие на левом конце II участка: $x_2 = 0$; $y_2 = 0$, получим

$$y_2 = B_2 T(\kappa_2 x_2) + C_2 U(\kappa_2 x_2) + D_2 V(\kappa_2 x_2).$$

Условия сопряжения двух участков запишутся следующим образом:

$$y_1'(1) = y_2'(0) \quad \text{и} \quad y_1''(1) = y_2''(0).$$

Тогда

$$y_2 = D_1 [n T(\kappa_2 x_2) + m U(\kappa_2 x_2)] + D_2 V(\kappa_2 x_2),$$

где

$$n = U(\kappa_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} (S \kappa_1); \quad m = T(\kappa_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} V(\kappa_1).$$

На конце II участка

$$y_2''(1) = 0; \quad y_2'''(1) = 0.$$

Подставив эти граничные условия в уравнение II участка, получаем систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} D_1 [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] + D_2 V''(\kappa_2) &= 0 \\ D_1 [n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2)] + D_2 V'''(\kappa_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Детерминант, дающий возможность найти решения, отличные от нуля, имеет вид:

$$\Delta(\kappa) = [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] V'''(\kappa_2) - [n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2)] V''(\kappa_2) = 0.$$

Подставляя вместо производных их значения и делая соответствующие алгебраические преобразования, получаем характеристическое уравнение в виде, удобном для получения числовых результатов.

$$\Delta(\kappa) = (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 - Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) + 2 Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (1 + Ch \kappa_2 \cos \kappa_2) = 0. \quad \Pi$$

Частота колебаний может быть определена из двух формул:

$$\omega = \kappa_1^2 \sqrt{\frac{g E I}{\rho l^4}}, \quad \text{либо} \quad \omega = \kappa_2^2 \sqrt{\frac{g E I}{\rho c^4}}.$$

Б. Одноконсольный вал, нагруженный сосредоточенной силой на конце консоли

Решение для соответствующих участков вала будет:

$$y_1 = B_1 T(\kappa_1 x_1) + D_1 V(\kappa_1 x_1); \quad \text{затем} \quad y_1 = D_1 [V(\kappa_1 x_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} T(\kappa_1 x_1)].$$

Применив методику, изложенную выше, получим решение для II участка в виде:

$$y_2 = D_1 n T(\kappa_2 x_2) + D_1 m U(\kappa_2 x_2) + D_2 V(\kappa_2 x_2)$$

и решение для III участка:

$$y_3 = D_1 n T(\kappa_2 x_2) + D_1 m U(\kappa_2 x_2) + D_2 V(\kappa_2 x_2) + \alpha \kappa_2 [D_1 n T(\kappa_2 a) + D_1 m U(\kappa_2 a) + D_2 V(\kappa_2 a)] V[\kappa_2 (x_2 - a)].$$

При

$$x_2 = 1 \quad y_2'' = 0 \quad y_2''' = 0$$

$$\begin{aligned}
& D_1 [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] + D_2 V''(\kappa_2) + \\
& + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2 a) + m U(\kappa_2 a)] + D_2 V(\kappa_2 a) \} V''[\kappa_2(1-a)] = 0 \\
& D_1 [n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2)] + D_2 V'''(\kappa_2) + \\
& + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2 a) + m U(\kappa_2 a)] + D_2 V(\kappa_2 a) \} V'''[\kappa_2(1-a)] = 0
\end{aligned}$$

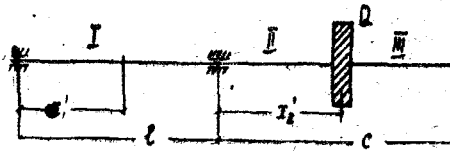


Рис. 5. Одноконсольный вал с нагрузкой Q на конце консоли.

Если $a \neq 1$, т. е. нагрузка приложена на конце консоли, то уравнения примут вид

$$\begin{aligned}
& D_1 [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] + D_2 V''(\kappa_2) + \\
& + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2) + m U(\kappa_2)] + D_2 V(\kappa_2) \} V''(0) = 0, \\
& D_1 [n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2)] + D_2 V'''(\kappa_2) + \\
& + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2) + m U(\kappa_2)] + D_2 V(\kappa_2) \} V'''(0) = 0,
\end{aligned}$$

но

$$V''(0) = 0, \text{ а } V'''(0) = \kappa_2^3 S(0) = \kappa_2^3$$

Перепишем уравнения, сгруппировав величины у постоянных D_1 и D_2 .

$$\left. \begin{aligned}
& D_1 [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] + D_2 V''(\kappa_2) = 0 \\
& D_1 \{ n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 [n T(\kappa_2) + m U(\kappa_2)] \} + \\
& + D_2 [V'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 V(\kappa_2)] = 0
\end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Детерминант имеет вид:

$$\begin{aligned}
\Delta(\kappa) &= [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] [V'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 V(\kappa_2)] - \\
&- \{ n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 [n T(\kappa_2) + m U(\kappa_2)] \} V''(\kappa_2) = 0.
\end{aligned}$$

Преобразовав детерминант при помощи подстановки функций и их производных и выполнив все алгебраические преобразования, получим характеристическое уравнение для вала с нагрузкой на конце консоли:

$$\begin{aligned}
\Delta(\kappa) &= (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 - Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) + \\
&+ 2 Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (1 + Ch \kappa_2 \cos \kappa_2) - 2 \alpha \kappa_2 (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) Sh \kappa_2 \sin \kappa_2 + \\
&+ 2 \alpha \kappa_2 Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 - Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) = 0. \quad \text{III}
\end{aligned}$$

Полученное характеристическое уравнение содержит в себе два первых слагаемых, которые имеются во II уравнении, и два слагаемых, зависящих от нагрузки (α). Если нагрузка на консоли отсутствует, то получается уравнение II для определения частоты собственных колебаний одноконсольного вала без нагрузки.

3. Определение критических скоростей консольных валов с учетом гироскопического эффекта

Существующие приближенные способы определения частоты собственных колебаний с учетом гироскопического эффекта очень трудоёмки и требуют значительно большего времени, чем при применении точного способа. Е. Б. Лунц показал это наглядно на примере в своей работе „Состояние и задачи исследования в области вибраций“.

Мы применяем в нашей работе точный метод Крылова, который даёт нам возможность без особого труда составить дифференциальное уравнение динамического равновесия с учетом гироскопического эффекта в таком же порядке.

А. Определение критического числа оборотов консольного вала с учетом гироскопического эффекта

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq a & \quad y_0 = C U(\kappa x) + D V(\kappa x), \quad \text{т. к. } y_0(0) = 0 \text{ и } y_0'(0) = 0 \\ a \leq x \leq l & \quad y_1 = C U(\kappa x) + D V(\kappa x) + \varphi_1(x) \end{aligned}$$

здесь

$$\varphi_1(x) = \frac{l^2}{\kappa^2 E I} \left\{ \frac{l}{\kappa} Q V[\kappa(x-a)] + \frac{M}{l} U[\kappa(x-a)] \right\}$$

$$Q = m \omega^2 y_0(a); \quad M = -K \omega^2 y_0'(a),$$

где K — момент инерции шкива, $K = m \rho^2$.

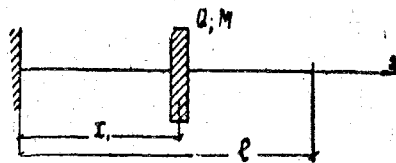


Рис. 6. Консольный вал с нагрузкой Q и M .

Подставив значение $\varphi_1(x)$ в y_1 , получим общее решение в виде

$$\begin{aligned} y_1 = & C U(\kappa x) + D V(\kappa x) + \frac{l^2}{\kappa^2 E I} \left\{ \frac{l}{\kappa} m \omega^2 [C U(\kappa a) + D V(\kappa a)] V[\kappa(x-a)] - \right. \\ & \left. - \frac{K \omega^2}{l} [C U'(\kappa a) + D V'(\kappa a)] U[\kappa(x-a)] \right\}. \end{aligned}$$

На правом конце граничные условия будут

$$y_1''(l) = 0 \quad \text{и} \quad y_1'''(l) = 0.$$

Заметим, что

$$U'(\kappa a) = \kappa T(\kappa a); \quad V'(\kappa a) = \kappa U(\kappa a).$$

Введем обозначения

$$\frac{m \omega^2 l^3}{\kappa^2 E I} = \alpha \kappa \quad \text{и} \quad \frac{m \rho^2 \omega^2 l}{E I} = \beta.$$

Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} CU''(\kappa) + DV''(\kappa) + \alpha\kappa\{[CU(\kappa a) + DV(\kappa a)] V''[\kappa(1-a)]\} - \\ - \frac{\beta}{\kappa}\{[CT(\kappa a) + DU(\kappa a)] U''[\kappa(1-a)]\} = 0, \\ CU'''(\kappa) + DV'''(\kappa) + \alpha\kappa\{[CU(\kappa a) + DV(\kappa a)] V'''[\kappa(1-a)]\} - \\ - \frac{\beta}{\kappa}\{[CT(\kappa a) + DU(\kappa a)] U'''[\kappa(1-a)]\} = 0. \end{aligned}$$

Положим, что груз находится на конце консоли, т. е. $a=1$, тогда

$$\begin{aligned} V''(0) = 0, U''(0) = \kappa^2, V'''(0) = \kappa^2, U'''(0) = 0 \\ CU''(\kappa) + DV''(\kappa) - \beta\kappa[CT(\kappa) + DU(\kappa)] = 0 \\ CU'''(\kappa) + DV'''(\kappa) + \alpha\kappa^4[CU(\kappa) + DV(\kappa)] = 0. \end{aligned}$$

Выделим произвольные постоянные

$$\begin{cases} C[U''(\kappa) - \beta\kappa T(\kappa)] + D[V''(\kappa) - \beta\kappa U(\kappa)] = 0 \\ C[U'''(\kappa) + \alpha\kappa^4 U(\kappa)] + D[V'''(\kappa) + \alpha\kappa^4 V(\kappa)] = 0. \end{cases}$$

Определитель для определения значения κ будет иметь вид:

$$\Delta(\kappa) = [U''(\kappa) - \beta\kappa T(\kappa)][V'''(\kappa) + \alpha\kappa^4 V(\kappa)] - \\ - [V''(\kappa) - \beta\kappa U(\kappa)][U'''(\kappa) + \alpha\kappa^4 U(\kappa)] = 0. \quad (8)$$

Заменим производные их значениями, произведем алгебраические преобразования, тогда детерминант получит окончательный вид

$$\begin{aligned} \Delta(\kappa) = Ch\kappa \cos \kappa + 1 + \alpha\kappa(Sh\kappa \cos \kappa - Ch\kappa \sin \kappa) - \\ - \frac{\beta}{\kappa}(Sh\kappa \cos \kappa + Ch\kappa \sin \kappa) + \alpha\beta(1 - Ch\kappa \cos \kappa) = 0. \end{aligned} \quad IV$$

Заметим, что первые два слагаемых составляют характеристическое уравнение для консоли, рассчитанной без учета жирокопического эффекта (I); в два последних слагаемых входит величина β , характеризующая влияние жирокопического эффекта.

Критическое число оборотов получим из формул:

$$n_{кр} = \frac{30 \omega}{\pi}; \quad \text{где } \omega = \kappa^2 \sqrt{\frac{gEI}{\rho l^4}}.$$

Б. Определение критического числа оборотов одноконсольного вала с учетом жирокопического эффекта

Для вала (рис. 7) уравнения по участкам получают вид:

$$I. 0 \leq x_1 \leq l; \quad x_1 = \frac{x_1'}{l}; \quad y_1 = A_1 S(\kappa_1 x_1) + B_1 T(\kappa_1 x_1) + C_1 U(\kappa_1 x_1) + \\ + D_1 V(\kappa_1 x_1) \text{ или, если}$$

$$y_1(0) = 0, \quad \text{а } y_1''(0) = 0$$

$$y_1 = B_1 T(\kappa_1 x_1) + D_1 V(\kappa_1 x_1), \quad \text{где } \kappa_1^4 = \frac{\rho_1 \omega^2 l^4}{g E_1 I_1}.$$

$$\text{При } x_1 = 1 \quad y_1 = 0$$

$$y_1 = D_1 [V(\kappa_1 x_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} T(\kappa_1 x_1)].$$

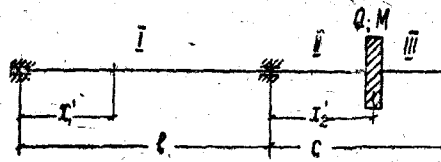


Рис. 7. Одноконсольный вал с нагрузкой Q и M.

II. Общее решение для второго участка будет

$$0 \leq x_2 \leq 1 \quad \Rightarrow x_2 \frac{x_3}{c}$$

$$y_2 = B_2 T(\kappa_2 x_2) + C_2 U(\kappa_2 x_2) + D_2 V(\kappa_2 x_2);$$

$$A_2 = 0, \text{ т. к. при } x_2 = 0 \quad y_2 = 0.$$

Используем условия сопряжения

$$y_1'(1) = y_2'(0) \quad \text{и} \quad y_1''(1) = y_2''(0)$$

и получим

$$B_2 = D_1 n, \quad \text{где } n = U(\kappa_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} S(\kappa_1)$$

$$C_2 = D_1 m, \quad \text{где } m = T(\kappa_1) - \frac{V(\kappa_1)}{T(\kappa_1)} V(\kappa_1).$$

Тогда y_2 перепишем в следующем виде:

$$y_2 = D_1 [n T(\kappa_2 x_2) + m U(\kappa_2 x_2)] + D_2 V(\kappa_2 x_2).$$

При $x_2 = a$ появляется нагрузка.

$$y_2 = D_1 [n T(\kappa_2 x_2) + m U(\kappa_2 x_2)] + D_2 V(\kappa_2 x_2) + \varphi_1(x),$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{c^2}{\kappa_2^2 E_2 I_2} \left\{ \frac{c}{\kappa_2} Q V[\kappa_2(x_2 - a)] + \frac{M}{c} U[\kappa_2(x_2 - a)] \right\},$$

$$Q = m \omega^2 y_2(a); \quad M = -K \omega^2 y_2'(a)$$

$$y_2 = D_1 [n T(\kappa_2 x_2) + m U(\kappa_2 x_2)] + D_2 V(\kappa_2 x_2) +$$

$$+ \frac{c^2}{\kappa_2^2 E_2 I_2} \left\{ \frac{c}{\kappa_2} m \omega^2 \{D_1 [n T(\kappa_2 a) + m U(\kappa_2 a)] + D_2 V(\kappa_2 a)\} V[\kappa_2(x_2 - a)] - \right. \\ \left. - \frac{K \omega^2}{c} \{D_1 [n T'(\kappa_2 a) + m U'(\kappa_2 a)] + D_2 V'(\kappa_2 a)\} U[\kappa_2(x_2 - a)] \right\}.$$

Обозначим

$$\frac{m \omega^2 c^3}{\kappa_2^3 E_2 I_2} = \alpha \kappa_2; \quad \frac{mg}{pc} = \alpha \quad \frac{K \omega^2 c}{E_2 I_2} = \beta$$

и замечая, что

$$T(\kappa_2 a) = \kappa_2 S(\kappa_2 a); \quad U'(\kappa_2 a) = \kappa_2 T(\kappa_2 a); \quad V'(\kappa_2 a) = \kappa_2 U(\kappa_2 a)$$

перепишем решение:

$$y_2 = D_1 [n T(\kappa_2 x_2) + m U(\kappa_2 x_2)] + D_2 V(\kappa_2 x_2) + \\ + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2 a) + m U(\kappa_2 a)] + D_2 V(\kappa_2 a) \} V[\kappa_2 (x_2 - a)] - \\ - \frac{\beta}{\kappa_2} \{ D_1 [n S(\kappa_2 a) + m T(\kappa_2 a)] + D_2 U(\kappa_2 a) \} U[\kappa_2 (x_2 - a)].$$

Используем условия на правом конце при

$$x_2 = 1 \quad y_2'' = 0 \quad y_2''' = 0$$

$$D_1 [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] + D_2 V''(\kappa_2) + \\ + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2 a) + m U(\kappa_2 a)] + D_2 V(\kappa_2 a) \} V''[\kappa_2 (1 - a)] - \\ - \frac{\beta}{\kappa_2} \{ D_1 [n S(\kappa_2 a) + m T(\kappa_2 a)] + D_2 U(\kappa_2 a) \} U''[\kappa_2 (1 - a)] = 0 \\ D_1 [n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2)] + D_2 V'''(\kappa_2) + \\ + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2 a) + m U(\kappa_2 a)] + D_2 V(\kappa_2 a) \} V'''[\kappa_2 (1 - a)] - \\ - \frac{\beta}{\kappa_2} \{ D_1 [n S(\kappa_2 a) + m T(\kappa_2 a)] + D_2 U(\kappa_2 a) \} U'''[\kappa_2 (1 - a)] = 0.$$

В нашем примере груз на конце, т. е. $a = 1$,
тогда

$$V''(0) = 0, \quad V'''(0) = \kappa_2^3, \quad U''(0) = \kappa_2^2, \quad U'''(0) = 0$$

уравнения примут окончательный вид

$$D_1 [n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2)] + D_2 V''(\kappa_2) - \\ - \frac{\beta}{\kappa_2} \{ D_1 [n S(\kappa_2) + m T(\kappa_2)] + D_2 U(\kappa_2) \} \kappa_2^2 = 0 \\ D_1 [n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2)] + D_2 V'''(\kappa_2) + \\ + \alpha \kappa_2 \{ D_1 [n T(\kappa_2) + m U(\kappa_2)] + D_2 V(\kappa_2) \} \kappa_2^3 = 0.$$

Объединим члены с одинаковыми постоянными

$$D_1 \{ n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2) - \beta \kappa_2 [n S(\kappa_2) + \\ + m T(\kappa_2)] \} + D_2 \{ V''(\kappa_2) - \beta \kappa_2 U(\kappa_2) \} = 0 \\ D_1 \{ n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 [n T(\kappa_2) + \\ + m U(\kappa_2)] \} + D_2 \{ V'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 V(\kappa_2) \} = 0$$

Тогда определитель получит вид

$$\Delta(\kappa) = \{ n T''(\kappa_2) + m U''(\kappa_2) - \beta \kappa_2 [n S(\kappa_2) + m T(\kappa_2)] \} [V'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 V(\kappa_2)] - \\ - \{ n T'''(\kappa_2) + m U'''(\kappa_2) + \alpha \kappa_2^4 [n T(\kappa_2) + m U(\kappa_2)] \} [V''(\kappa_2) - \beta \kappa_2 U(\kappa_2)] = 0. \quad (9)$$

Для получения решений, отличных от нуля, определитель нашей системы (9) должен быть равен нулю, что и дает нам непосредственно уравнение для определения κ .

После всех преобразований определитель получит вид:

$$\Delta(\kappa) = (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 - Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) + \\ + 2 Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (1 + Ch \kappa_2 \cos \kappa_2) - \\ - 2 \alpha \kappa_2 (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) Sh \kappa_2 \sin \kappa_2 + \\ + 2 \alpha \kappa_2 Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 - Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) - \\ - \frac{2\beta}{\kappa_2} Ch \kappa_2 \cos \kappa_2 (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) -$$

$$\begin{aligned}
& - \alpha \beta (Ch \kappa_1 \sin \kappa_1 - Sh \kappa_1 \cos \kappa_1) (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 - Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) - \\
& - \frac{2 \beta}{\kappa_2} Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (Sh \kappa_2 \cos \kappa_2 + Ch \kappa_2 \sin \kappa_2) + \\
& + 2 \alpha \beta Sh \kappa_1 \sin \kappa_1 (1 - Ch \kappa_2 \cos \kappa_2) = 0.
\end{aligned}$$

Обращает на себя внимание то, что первые четыре слагаемых мы имели в уравнении III, когда производили расчет одноконсольного вала без учета гироскопического эффекта. Четыре последних слагаемых, куда входит сомножителем „ β “, дают влияние гироскопического эффекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов А. Н. О расчете балок, лежащих на упругом основании, изд. АН СССР, 1931.
2. Крылов А. Н. Об определении критических скоростей вращающегося вала, изд. АН СССР, 1932.
3. Лунц Е. Б. О поперечных колебаниях валов, ОНТИ, 1935.
4. Филиппов А. П. Методы расчета сооружений на колебания, 1941.
5. Гогенемзер К. и Прагер В. Динамика сооружений, 1936.
6. Пфайффер П. Колебания упругих тел, 1934.
7. Тимошенко С. П. Теория колебаний в инженерном деле, 1934.
8. Бернштейн С. А. Основы динамики сооружений, 1941.
9. Ананьев И. В. Справочник по расчету собственных колебаний упругих систем, 1946.

В. Я. БЕЛЕЦКИЙ

**УТОЧНЕНИЕ РАЗМЕРОВ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ
С НИЗШИМИ ПАРАМИ, ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЗАДАННЫЙ
ЗАКОН ДВИЖЕНИЯ¹**

В работе описывается новый метод, касающийся уточнения основных размеров шарнирного четырехзвенного механизма, приводится расчет его параметров, дается оценка отклонения закона движения, осуществляемого механизмом от заданного.

Как известно [Л. 1], плоский механизм с низшими парами воспроизводит требуемую зависимость, осуществляемую движением ведомого звена, входящего в кинематическую пару со стойкой, лишь приближенно.

Параметры кинематической схемы такого механизма, удовлетворяющие условию первого приближения к заданному закону движения и некоторым другим требованиям (проворачиваемости механизма, ограничениям величины угла передачи), могут быть определены графическим методом, разработанным доктором технических наук, проф. Н. И. Левитским и кандидатом технических наук, доц. Б. И. Степановым [Л. 2].

Для дальнейшего уточнения основных размеров механизма пользуются одним из методов, предложенных проф. Н. И. Левитским [Л. 3] и доцентами И. Ш. Пинскером [Л. 4], С. А. Черкудиновым [Л. 5] и Е. П. Новодворским [Л. 6].

Ниже излагается новый метод уточнения основных размеров шарнирного четырехзвенника, который может быть распространен и на случай кривошипно-шатунного механизма.

1. Вычисление трех параметров механизма

На рис. 1 изображен шарнирный четырехзвенный механизм $ABCD$ с ведущим звеном AB , длина которого принимается равной единице, шатуном l , ведомым (рабочим) звеном r и стойкой d . Углы α и φ , отсчитываемые против направления вращения часовой стрелки, определяют соответственно положения ведущего и рабочего звеньев относительно стойки.

¹ Доложено на семинаре по теории машин и механизмов Института машиноведения Академии наук СССР 29 декабря 1952 года.

Между перечисленными величинами существует следующая зависимость:

$$\cos(\psi - \alpha) + \frac{d}{r} \cos \alpha - d \cos \psi + \frac{l^2 - r^2 - d^2 - 1}{2r} = 0. \quad (1)$$

При вычислении трех параметров d , r и l — кинематической схемы шарнирного четырехзвенника должны быть заданы:

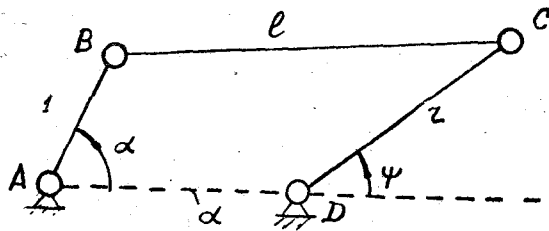


Рис. 1. Шарнирный четырехзвенный механизм

а) значения углов α для ряда расчетных положений механизма на заданном участке приближения и

б) соответствующие им величины угла ψ в виде функциональной зависимости $\psi = \psi(\alpha)$, которая может быть задана в аналитической, графической или в табличной форме.

Так как каждый из параметров d , r и l имеет постоянную, не зависящую от значения угла α величину, то, взяв производную от обеих частей уравнения (1) по α и обозначив отношение $\frac{d\psi}{d\alpha}$ через i , получим:

$$(1 - i) \sin(\psi - \alpha) - \frac{d}{r} \sin \alpha + i \cdot d \sin \psi = 0. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения:

$$u = (1 - i) \sin(\psi - \alpha); \quad (3)$$

$$v = \sin \alpha; \quad (4)$$

$$t = i \sin \psi; \quad (5)$$

$$p_1 = \frac{d}{r}; \quad (6)$$

$$p_2 = d. \quad (7)$$

Тогда уравнение (2) примет следующий вид:

$$u - v \cdot p_1 + t \cdot p_2 = 0. \quad (8)$$

Отсюда находим:

$$p_2 = \frac{v}{t} p_1 - \frac{u}{t}. \quad (9)$$

Дифференцируя по α обе части уравнения (9), будем иметь:

$$(v' \cdot t - v \cdot t') p_1 - u' \cdot t + u \cdot t' = 0,$$

или:

$$p_1 = \frac{u' \cdot t - u \cdot t'}{v' \cdot t - v \cdot t'}. \quad (10)$$

В силу зависимостей (3) — (5):

$$u' = -i' \sin(\psi - \alpha) - (1 - i)^2 \cos(\psi - \alpha); \quad (11)$$

$$v' = \cos \alpha; \quad (12)$$

$$t' = i' \sin \psi + i^2 \cos \psi. \quad (13)$$

Располагая рядом заданных значений величин α и ψ , можем определить при помощи уравнений (3)–(5) и (11)–(13) ряд соответственных значений правой части равенства (10), которые будем обозначать $\bar{p}_1$. Они будут, конечно, различными, между тем, коэффициент p_1 (см. соотношение 6) постоянен. Если бы в каждом положении механизма имело место тождество $\bar{p}_1 = p_1$, то заданная зависимость $\psi = \psi(\alpha)$ воспроизводилась бы механизмом вполне точно. Поэтому ясно, что величина разности $\bar{p}_1 - p_1$ характеризует собой меру отклонения Δ_ψ фактически получаемого при помощи механизма угла ψ_m от заданного его значения ψ .

В таком случае естественно выбрать величину коэффициента p_1 таким образом, чтобы она была равна среднему арифметическому всех полученных значений $\bar{p}_1$, т. е.

$$p_1 = \frac{(\bar{p}_1)_0 + (\bar{p}_1)_1 + (\bar{p}_1)_2 + \dots + (\bar{p}_1)_m}{m+1}, \quad (14)$$

где $m+1$ — число расчетных положений механизма.

Для определения величины коэффициента p_2 поступим следующим образом. Выявим одно из положений механизма, в котором $\bar{p}_1 = p_1$ и, следовательно, $\Delta_\psi = 0$. Другими словами, установим, при каком значении угла α механизм воспроизводит заданную зависимость $\psi = \psi(\alpha)$ вполне точно.

В общем случае может оказаться, что условие $\bar{p}_1 = p_1$ не удовлетворяется ни в одном из рассмотренных $m+1$ расчетных положений механизма. Тогда, построив график $\bar{p}_1 = p_1(\alpha)$, можно найти значение угла α , при котором упомянутое равенство осуществляется в первом, грубом приближении. Дальнейшее уточнение может быть произведено путем нескольких проб.

Если α^* — это значение угла α , которому соответствует $\bar{p}_1 = p_1$, а u^* , v^* и t^* — значения функций u , v и t при $\alpha = \alpha^*$, то из уравнения (9), которое примет вид

$$p_2 = \frac{v^*}{t^*} p_1 - \frac{u^*}{t^*}, \quad (15)$$

найдется величина параметра p_2 .

После этого из уравнений (7) и (6) определяются параметры d и r

$$d = p_2; \quad (16)$$

$$r = \frac{p_2}{p_1}. \quad (17)$$

На основании уравнений (1), (6) и (7) при условии $\alpha = \alpha^*$ будем иметь:

$$\frac{l^2 - r^2 - d^2 - 1}{2r} = -\cos(\psi^* - \alpha^*) - \cos \alpha^* \cdot p_1 + p_2 \quad (18)$$

Поэтому, обозначая правую часть этого уравнения через p_0 , найдем:

$$l = \sqrt{2rp_0 + r^2 + d^2 + 1}. \quad (19)$$

Итак, при уточнении величин трех параметров d , r и l кинематической схемы шарнирного четырехзвенника значение коэффициента

$p_1 = \frac{d}{r}$ находится как среднее арифметическое его переменных значений, обеспечивающих точное осуществление заданной зависимости. После этого отыскивается один из узлов интерполирования, что дает возможность установить величины и остальных двух искомым параметров. Отметим, что, как это следует из предыдущего, в узлах интерполирования совпадают не только заданные и фактические значения функции $\psi = \psi(\alpha)$, но и их первые и вторые производные по α , поэтому узлы интерполяции будут трехкратными.

2. Вычисление четырех параметров механизма

Если, кроме трех параметров d , r и l кинематической схемы шарнирного четырехзвенника, подлежит уточнению (с целью осуществления большего приближения к заданной функции) также и величина ψ_0 угла ψ в начальном положении механизма, то должны быть известны:

а) величина угла α поворота ведущего звена на заданном участке приближения и

б) функциональная зависимость $\psi_s = \psi_s(\alpha)$, в которой ψ_s — угол поворота рабочего звена механизма относительно своего начального положения, определяемого углом $\psi = \psi_0$.

Так как $\psi = \psi_0 + \psi_s$, то на основании уравнения (1) после элементарных преобразований получаем:

$$\begin{aligned} \cos(\psi_s - \alpha) - \sin(\psi_s - \alpha) \operatorname{tg} \psi_0 - \cos \psi_s \cdot d + \sin \psi_s \cdot d \cdot \operatorname{tg} \psi_0 + \\ + \cos \alpha \frac{d}{r \cos \psi_0} + \frac{l^2 - d^2 - r^2 - 1}{2r \cos \psi_0} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Дифференцируя обе части только что полученного равенства по α , найдем:

$$\begin{aligned} (1 - i) \sin(\psi_s - \alpha) + (1 - i) \cos(\psi_s - \alpha) \operatorname{tg} \psi_0 + i \sin \psi_s \cdot d + \\ + i \cos \psi_s \cdot d \cdot \operatorname{tg} \psi_0 - \sin \alpha \frac{d}{r \cos \psi_0} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда:

$$u + v \cdot p_3 + t \cdot p_2 + m \cdot p_2 \cdot p_3 - n \cdot p_1 = 0$$

или

$$p_1 = \frac{u}{n} + \frac{v}{n} p_3 + \frac{t}{n} p_2 + \frac{m}{n} p_2 \cdot p_3, \quad (22)$$

где

$$u = (1 - i) \sin(\psi_s - \alpha); \quad (23)$$

$$v = (1 - i) \cos(\psi_s - \alpha); \quad (24)$$

$$t = i \sin \psi_s; \quad (25)$$

$$m = i \cos \psi_s \quad (26)$$

$$n = \sin \alpha; \quad (27)$$

$$p_1 = \frac{d}{r \cos \psi_0}; \quad (28)$$

$$p_2 = d; \quad (29)$$

$$p_3 = \operatorname{tg} \psi_0. \quad (30)$$

Поскольку $\frac{dp_1}{d\alpha} = 0$, то

$$u' \cdot n - u \cdot n' + (v' \cdot n - v \cdot n') p_3 + (t' \cdot n - t \cdot n') p_2 + (m' \cdot n - m \cdot n') p_2 \cdot p_3 = 0. \quad (31)$$

Решая последнее уравнение относительно p_3 , получаем:

$$p_3 = \frac{(t \cdot n' - t' \cdot n) p_2 + (u \cdot n' - u' \cdot n)}{(m' \cdot n - m \cdot n') p_2 + (v' \cdot n - v \cdot n')}. \quad (32)$$

Вследствие того, что и $\frac{dp_3}{d\alpha} = 0$, то в силу уравнения (32) после соответствующих упрощений будем иметь:

$$\begin{aligned} & [(t \cdot n'' - t'' \cdot n)(m' \cdot n - m \cdot n') - (t \cdot n' - t' \cdot n)(m'' \cdot n - m \cdot n'')] p_2^2 + \\ & + [(t \cdot n'' - t'' \cdot n)(v' \cdot n - v \cdot n') + (u \cdot n'' - u'' \cdot n)(m' \cdot n - m \cdot n') - \\ & - (u \cdot n' - u' \cdot n)(m'' \cdot n - m \cdot n'') - (t \cdot n' - t' \cdot n)(v'' \cdot n - v \cdot n'')] p_2 + \\ & + (u \cdot n'' - u'' \cdot n)(v' \cdot n - v \cdot n') - (u \cdot n' - u' \cdot n)(v'' \cdot n - v \cdot n'') = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим теперь вопрос об определении величин производных от функций, содержащихся в уравнении (33). На основании соотношений (23)–(27) находим:

$$u' = -i' \sin(\psi_s - \alpha) - (1 - i')^2 \cos(\psi_s - \alpha); \quad (34)$$

$$u'' = -[(1 - i')^3 + i''] \sin(\psi_s - \alpha) + 3 \cdot i' \cdot v; \quad (35)$$

$$v' = -i' \cos(\psi_s - \alpha) + (1 - i')^2 \sin(\psi_s - \alpha); \quad (36)$$

$$v'' = -[(1 - i')^3 + i''] \cos(\psi_s - \alpha) - 3 \cdot i' \cdot u; \quad (37)$$

$$t' = i' \sin \psi_s + i'^2 \cos \psi_s; \quad (38)$$

$$t'' = (i'' - i'^3) \sin \psi_s + 3 i' m; \quad (39)$$

$$m' = i' \cos \psi_s - i'^2 \sin \psi_s; \quad (40)$$

$$m'' = (i'' - i'^3) \cos \psi_s - 3 i' t; \quad (41)$$

$$n' = \cos \alpha; \quad (42)$$

$$n'' = -\sin \alpha. \quad (43)$$

Заметим, что согласно зависимостям (27) и (43) $n = -n''$. Ввиду этого взамен уравнения (33) получим следующее:

$$\begin{aligned} & [(t + t'')(m' \cdot n - m \cdot n') + (t \cdot n' - t' \cdot n)(m + m'')] p_2^2 + \\ & + [(t + t'')(v' \cdot n - v \cdot n') + (u + u'')(m' \cdot n - m \cdot n') + \\ & + (u \cdot n' - u' \cdot n)(m + m'') + (t \cdot n' - t' \cdot n)(v'' + v)] p_2 + \\ & + (u + u'')(v' \cdot n - v \cdot n') + (u \cdot n' - u' \cdot n)(v'' + v) = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Хотя в уравнении (44) содержится 16 заключенных в круглые скобки сомножителей, но они попарно равны между собой, поэтому

практически придется подсчитать величины только восьми из них, а именно:

$$\begin{aligned} t+t''; m' \cdot n - m \cdot n'; t \cdot n' - t' \cdot n; m+m''; \\ v'n - v'n'; u+u''; u \cdot n' - u' \cdot n; v+v''. \end{aligned}$$

Итак, определив для $m+1$ расчетных положений механизма значения упомянутых величин, найдем из квадратного относительно p_2 уравнения (44) соответственно $m+1$ значений $\bar{p}_2$.

Коэффициент p_2 в соответствии с изложенным выше будет равен среднему арифметическому всех значений $\bar{p}_2$, т. е.

$$p_2 = \frac{(\bar{p}_2)_0 + (\bar{p}_2)_1 + \dots + (\bar{p}_2)_m}{m+1}. \quad (45)$$

Отыскав затем величину угла α^* , при которой $p_2 = \bar{p}_2$, находим из уравнения (32) коэффициент p_3 . После этого из уравнения (22) определяем p_1 и из (21) — величину $\frac{l^2 - r^2 - d^2 - 1}{2r \cos \psi_0}$. Наконец, при помощи (28) — (30) находим искомые параметры d , ψ_0 , r и l .

В рассматриваемом случае узлы интерполяции (в них $\bar{p}_2 = p_2$) будут четырехкратными.

3. Вычисление пяти параметров механизма

Иногда возникает практическая необходимость произвести уточнение пяти параметров кинематической схемы шарнирного четырехзвенника: d , r , l , ψ_0 и α_0 ; где α_0 — величина угла α в начальном положении механизма.

В таком случае заданными величинами будут следующие:

а) углы α_s поворота ведущего звена, отсчитываемые от нулевого положения этого звена, и

б) функциональная зависимость $\psi_s = \psi_s(\alpha_s)$.

Ввиду того, что $\alpha = \alpha_0 + \alpha_s$, приведенное выше уравнение (21) после надлежащих упрощений может быть записано таким образом:

$$\begin{aligned} & \cos(\psi_s - \alpha_s) + \sin(\psi_s - \alpha_s) \operatorname{tg} \alpha_0 - \sin(\psi_s - \alpha_s) \operatorname{tg} \psi_0 + \\ & + \cos(\psi_s - \alpha_s) \operatorname{tg} \psi_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 - \cos \psi_s \frac{d}{\cos \alpha_0} + \sin \psi_s \frac{d}{\cos \alpha_0} \operatorname{tg} \psi_0 + \\ & + \cos \alpha_s \frac{d}{r \cos \psi_0} - \sin \alpha_s \frac{d}{r \cos \psi_0} \operatorname{tg} \alpha_0 + \frac{l^2 - d^2 - r^2 - 1}{2r \cos \psi_0 \cos \alpha_0} = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Взяв производную от обеих частей уравнения (46) по переменной α_s и принимая попрежнему $\frac{d\psi_s}{d\alpha_s} = i$, после простейших преобразований будем иметь:

$$u(1 + q_0 \cdot q_1) + v(q_1 - q_0) + w \cdot q_2 + t \cdot q_1 \cdot q_2 - m \cdot q_3 - n \cdot q_0 \cdot q_3 = 0, \quad (47)$$

где:

$$u = (1 - i) \sin(\psi_s - \alpha_s); \quad (48)$$

$$v = (1-i) \cos(\psi_s - \alpha_s); \quad (49)$$

$$w = i \sin \psi_s; \quad (50)$$

$$t = i \cos \psi_s; \quad (51)$$

$$m = \sin \alpha_s; \quad (52)$$

$$n = \cos \alpha_s; \quad (53)$$

$$q_0 = \operatorname{tg} \alpha_0; \quad (54)$$

$$q_1 = \operatorname{tg} \psi_0; \quad (55)$$

$$q_2 = \frac{d}{\cos \alpha_0}; \quad (56)$$

$$q_3 = \frac{d}{r \cos \psi_0}. \quad (57)$$

Из уравнения (47) следует

$$\begin{aligned} -q_0 \cdot q_1 - 1 = \frac{v}{u} (q_1 - q_0) + \frac{w}{u} q_2 + \frac{t}{u} q_1 \cdot q_2 - \\ - \frac{m}{u} q_3 - \frac{n}{u} q_0 \cdot q_3. \end{aligned} \quad (58)$$

Поскольку производная по α_s от левой части уравнения (58) равна нулю, то

$$\begin{aligned} (v' \cdot u - v \cdot u') (q_1 - q_0) + (w' \cdot u - w \cdot u') q_2 + (t' \cdot u - \\ - t \cdot u') q_1 \cdot q_2 - (m' \cdot u - m \cdot u') q_3 - (n' \cdot u - n \cdot u') q_0 \cdot q_3 = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Принципиально и в рассматриваемом случае вычисления пяти параметров кинематической схемы механизма можно было поступить так же, как это изложено выше для вычисления трех и четырех параметров. То есть решить уравнение (59) относительно какой-либо из входящих в него величин коэффициентов q , взяв производную по α_s от правой части полученного таким образом уравнения и так далее, пока не придем к уравнению, содержащему только один из коэффициентов q . Вычислить $m+1$ значений q , найти их среднее арифметическое и принять его за истинную величину q . Затем следует определить положение одного из узлов интерполирования из условия $\alpha_s^* = \alpha_s$, что даст возможность найти величины всех остальных параметров. Однако при этом пришлось бы выполнить ряд довольно громоздких вычислений, почему такой путь оказывается практически малоценным. Ввиду этого представляется целесообразным производить уточнение пяти параметров кинематической схемы путем сочетания примененного выше метода с методом, разработанным проф. Н. И. Левитским [Л. 3.] и основанном на средне-квадратическом приближении заданной зависимости.

Для этого представим уравнение (59) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{q_3}{q_1 - q_0} = \frac{v' \cdot u - v \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'} + \frac{w' \cdot u - w \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'} \frac{q_2}{q_1 - q_0} + \\ + \frac{t' \cdot u - t \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'} \frac{q_1 \cdot q_2}{q_1 - q_0} - \frac{n' \cdot u - n \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'} \frac{q_0 \cdot q_3}{q_1 - q_0}. \end{aligned} \quad (60)$$

В каждом из $m+1$ положений механизма известны величины α_s и ψ_s , поэтому требуемые для производства расчета величины u , v , w , t , m и n могут быть определены при помощи уравнений (48)–(53). Что же касается значений производных, то согласно тем же уравнениям они будут равны:

$$u' = -i' \sin(\psi_s - \alpha_s) - (1-i)^2 \cos(\psi_s - \alpha_s); \quad (61)$$

$$v' = -i' \cos(\psi_s - \alpha_s) + (1-i)^2 \sin(\psi_s - \alpha_s); \quad (62)$$

$$w' = i' \sin \psi_s + i^2 \cos \psi_s; \quad (63)$$

$$t' = i' \cos \psi_s - i^2 \sin \psi_s; \quad (64)$$

$$m' = \cos \alpha_s = n; \quad (65)$$

$$n' = -\sin \alpha_s = -m. \quad (66)$$

Чтобы заданная зависимость воспроизводилась механизмом совершенно точно, величина $\frac{q_3}{q_1 - q_0}$ должна быть переменной и равной в каждом положении механизма правой части уравнения (60). Пусть разность между последней и постоянной истинной величиной $\frac{q_3}{q_1 - q_0}$ равна Δ .

Тогда, на основании (60) получаем:

$$\Delta = F(\alpha_s) - \varphi_0(\alpha_s) p_0 - \varphi_1(\alpha_s) p_1 - \varphi_2(\alpha_s) p_2 - \varphi_3(\alpha_s) p_3, \quad (67)$$

где

$$F(\alpha_s) = \frac{v' \cdot u - v \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'}; \quad (68)$$

$$\varphi_0(\alpha_s) = -\frac{w' \cdot u - w \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'}; \quad (69)$$

$$\varphi_1(\alpha_s) = -\frac{t' \cdot u - t \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'}; \quad (70)$$

$$\varphi_2(\alpha_s) = \frac{n' \cdot u - n \cdot u'}{m' \cdot u - m \cdot u'}; \quad (71)$$

$$\varphi_3(\alpha_s) = 1; \quad (72)$$

$$p_0 = \frac{q_3}{q_1 - q_0}; \quad (73)$$

$$p_1 = \frac{q_1 \cdot q_2}{q_1 - q_0}; \quad (74)$$

$$p_2 = \frac{q_0 \cdot q_3}{q_1 - q_0}; \quad (75)$$

$$p_3 = \frac{q_3}{q_1 - q_0}. \quad (76)$$

Применяя метод среднеквадратического приближения функций, высокая практическая ценность которого для проектирования механизмов доказана [Л. 3] и [Л. 7], получим [Л. 3] систему из четырех

линейных относительно коэффициентов p_0, p_1, p_2 и p_3 уравнений, решение которой и даст величины этих коэффициентов.

После того, как будут найдены величины названных коэффициентов, нетрудно определить значения коэффициентов q_0, q_1, q_2 и q_3 .

В самом деле, из зависимостей (73)—(76) следует:

$$q_0 = \frac{p_2}{p_3}; \quad q_1 = \frac{p_1}{p_0}; \quad q_2 = p_0(q_1 - q_0);$$

$$q_3 = p_3(q_0 - q_1).$$

Поэтому в силу соотношений (54)—(57):

$$\alpha_0 = \arctg(q_0) \quad (77)$$

$$\psi_0 = \arctg(q_1); \quad (78)$$

$$d = p_0(q_0 - q_1) \cos \alpha_0; \quad (79)$$

$$r = \frac{p_0}{p_3} \cdot \frac{\cos \alpha_0}{\cos \psi_0}. \quad (80)$$

Для определения параметра l кинематической схемы механизма нужно найти один из узлов интерполирования, которому соответствуют равенства $\alpha_s = \alpha_s^*$ и $\Delta = 0$. Поскольку параметры α_0, ψ_0, r и d уже известны и, кроме того, известно одно из положений механизма, в котором предписанная зависимость $\psi_s = \psi_s(\alpha_s)$ осуществляется вполне точно, то из уравнения (46), заменяя в нем α_s и ψ_s соответственно α_s^* и ψ_s^* , нетрудно найти величину $\frac{l^2 - d^2 - r^2 - 1}{2r \cos \psi_0 \cos \alpha_0}$, а из последней уже искомый параметр l .

Заметим, что преобразованием уравнения (1), а именно, заменяя в нем α суммой $\alpha_0 + \alpha_s$, можно получить уравнения, аналогичные уравнениям (22) — (45), для вычисления величин d, r, α_0 и l . Следует также отметить, что с помощью уравнения (32) можно решать задачу об уточнении трех параметров ψ, r и l , варьируя при этом величиной параметра $d = p_2$ (см. зависимость 29), либо можно уточнить значения параметров d, r и l , варьируя величиной ψ_0 .

4. Оценка отклонения осуществляемой механизмом зависимости от заданной

Величина отклонения осуществляемой механизмом зависимости от предписанной определяется отклонением Δ_ψ фактического положения рабочего звена ψ_m от требуемого ψ , т. е. $\Delta_\psi = \psi_m - \psi$.

Значение угла ψ_m , вообще говоря, может быть определено по формуле, применяемой для аналитического исследования шарнирного четырехзвенника.

Но величина Δ_ψ может быть определена и иным, более простым путем, основанным на идее, выдвинутой проф. Н. И. Левитским [Л. 3]. В самом деле, введем в состав шарнирного четырехзвенника дополнительное звено — ползушку (рис. 2, а), перемещающуюся вдоль рабочего звена CD . Построим затем план малых перемещений [Л. 8] полученного таким способом механизма при фиксированном положении его ведущего звена.

Из плана (рис. 2, б) следует, что

$$r' \cdot \Delta_\psi = \Delta_r \cdot \operatorname{ctg} \gamma,$$

где r' — переменная длина звена CD .

Откуда находим:

$$\frac{r'}{d} \Delta_\psi = \frac{\Delta_r}{d} \operatorname{ctg} \gamma = \frac{r' - r}{d} \operatorname{ctg} \gamma,$$

или

$$\left(\frac{r'}{d}\right)' \cdot \Delta_\psi = \left[\left(\frac{r'}{d}\right)' - \frac{r}{d}\right] \operatorname{ctg} \gamma.$$

Следовательно,

$$\Delta_\psi = -\Delta_d \cdot \frac{r}{r'} \operatorname{ctg} \gamma. \quad (81)$$

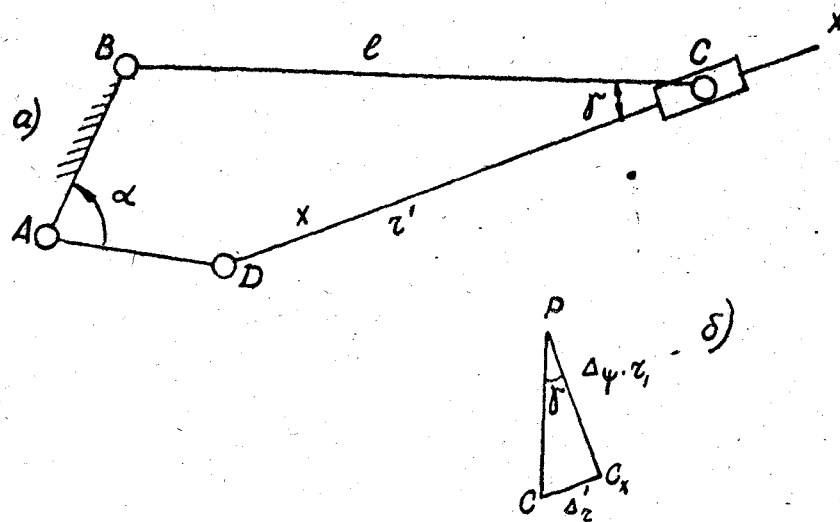


Рис. 2. а — шарнирный четырехзвенный механизм с ползушкой; б — план малых перемещений.

Рассмотрим теперь вопрос об определении величины Δ_d для каждого расчетного положения механизма. Вернемся к случаю уточнения трех параметров d , r и l . Так как (см. зависимость 6) $p_1 = \frac{d}{r}$, то ясно, что $\Delta_d = \bar{p}_1 - p_1$. Поскольку (см. § 1) $m+1$ значений величины $\bar{p}_1$ уже известны, легко находим $m+1$ значений Δ_d , а затем согласно уравнению (81) соответственно $m+1$ значений Δ_ψ .

При выполнении расчета по уточнению величин четырех параметров d , r , ψ_0 и l кинематической схемы механизма (§ 2) величина $\frac{d}{r} = p_1 \cos \psi_0$ (см. зависимость 28), поэтому

$$\Delta_d = (\bar{p}_1 - p_1) \cos \psi_0. \quad (82)$$

Величины коэффициента p_1 для $m+1$ расчетных положений механизма должны быть при этом определены из уравнения (22).

Наконец, при уточнении величин пяти параметров (§ 3) получаемая для $m+1$ расчетных положений механизма (см. уравнение 60) величина Δ равна:

$$\Delta = \left(\frac{q_3}{q_1 - q_0} \right)_m - \frac{q_3}{q_1 - q_0}.$$

Но согласно зависимостям (54), (55) и (57)

$$\frac{q_3}{q_0 - q_1} = \frac{d}{r \cos \psi_0 (\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \psi_0)}. \quad (83)$$

Следовательно,

$$\Delta_d = \Delta \cos \psi_0 (\operatorname{tg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \psi_0). \quad (84)$$

Что касается входящей в формулу (81) величины угла передачи γ , то она находится либо графическим путем непосредственно на планах малых перемещений, либо аналитически из соответствующих известных из курса теории механизмов и машин формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоблевский И. И., Теория механизмов и машин, Гостехиздат, 1951.
2. Левитский Н. И. и Степанов Б. И., Проектирование плоских передаточных механизмов с низшими парами. В сб.: "Вопросы машиноведения", изд. АН СССР, 1950.
3. Левитский Н. И., Проектирование плоских механизмов с низшими парами, изд. АН СССР, 1950.
4. Пинскер И. Ш., Приближенный синтез механизмов с низшими парами. Труды семинара по теории машин и механизмов, т. V, вып. 18, 1948.
5. Черкудинов С. А., Метод кратного интерполирования в синтезе механизмов. Труды семинара по теории машин и механизмов, т. V, вып. 40, 1951.
6. Новодворский Е. П., Об одном способе синтеза механизмов, Труды семинара по теории машин и механизмов, т. XI, вып. 42, 1951.
7. Баранов Г. Г., Н. И. Левитский, Проектирование плоских механизмов с низшими парами. Известия ОТН АН СССР, № 7, 1951.
8. Бруевич Н. Г., Точность механизмов. ГТТИ, 1946.

В. Я. БЕЛЕЦКИЙ

К ПРОЕКТИРОВАНИЮ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С НИЗШИМИ ПАРАМИ, ВОСПРОИЗВОДЯЩИХ ЗАДАННЫЕ ТРАЕКТОРИИ¹

В работе рассмотрены вопросы проектирования шарнирного четырехзвенника и кривошипно-шатунного механизма при помощи метода средне-квадратического приближения функции.

Как известно, механизм с низшими парами может воспроизводить заданную траекторию лишь приближенно. Параметры кинематической схемы такого механизма определяются следующим образом. Сперва производится подбор размеров механизма эмпирическим путем, а затем значения некоторых параметров механизма уточняются, чем достигается существенное повышение степени приближения.

Метод уточнения параметров механизма разработан доктором технических наук, профессором Н. И. Левитским. Он основан на среднеквадратическом приближении функции, линейной относительно параметров кинематической схемы механизма, причем функция представляет собой так называемую средневзвешенную разность квадратов действительной и фиктивной длин одного из звеньев механизма [Л. 1]. Ниже показано, что, основываясь на упомянутой работе Н. И. Левитского, задача может быть решена и при ином виде приближающей функции, а именно, когда она равна разности первых степеней длин действительного и фиктивного звена механизма и линейна относительно уточняемых параметров механизма.

1. ПРОЕКТИРОВАНИЕ ШАРНИРНОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

1. Приближающая функция

Н. И. Левитский показал [Л. 1, гл. III], что для шарнирного четырехзвенника (рис. 1), в котором $AB=a$; $BC=l$; $CD=r$; $AD=d$; $BM=\kappa$; $\angle MBC=\omega$, ось иксов совпадает со стойкой и начало отсчета—с точкой A, имеет место следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \rho^2 + U \operatorname{tg} \omega - d [Wx - Vy + (Vx + Wy) \operatorname{tg} \omega] - \\ & - \frac{d}{l} \frac{\kappa}{\cos \omega} (2x + Vy - Wx) - [a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} \cdot \\ & \cdot (l^2 + a^2 + d^2 - r^2)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

¹ Доложено на семинаре по теории машин и механизмов Института машиноведения Академии наук СССР 29 декабря 1952 года.

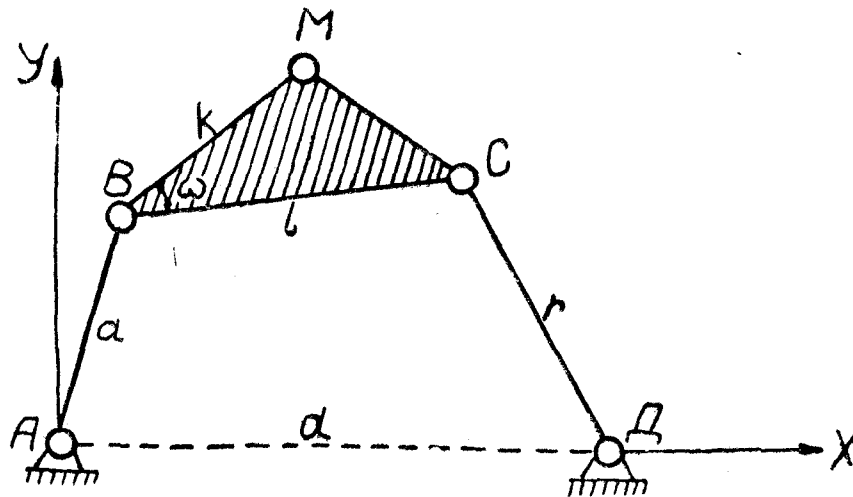


Рис. 1. Схема шарнирного четырехзвенника

где:

$$U = \pm \sqrt{4\kappa^2\rho^2 - (\rho^2 + \kappa^2 - a^2)}, \quad (2)$$

$$V = \frac{U}{\rho^2}, \quad (3)$$

$$W = \frac{\rho^2 - \kappa^2 - a^2}{\rho^2}, \quad (4)$$

где: ρ — радиус вектор шатунной точки M , которая приближенно воспроизводит заданную траекторию.

Из уравнения (1) находим:

$$d = \frac{l \cos \omega}{\kappa} \left[\frac{\rho^2 + U \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx} - d \frac{Wx - Vy + (Vx + Wy) \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx} - \frac{a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (l^2 + a^2 + d^2 - r^2)}{2x + Vy - Wx} \right].$$

Следовательно, разность Δ_d между фиктивной длиной звена AD , т. е. той длиной, при которой требуемая траектория воспроизводилась бы теоретически вполне точно, и действительной длиной звена AD равна:

$$\Delta_d = \frac{l \cos \omega}{\kappa} \left[\frac{\rho^2 + U \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx} - d \frac{Wx - Vy + (Vx + Wy) \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx} - \frac{a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (l^2 + a^2 + d^2 - r^2)}{2x + Vy - Wx} - \frac{d}{l} \cdot \frac{\kappa}{\cos \omega} \right]. \quad (5)$$

Отклонение Δ_n шатунной кривой от заданной траектории, измеренное по нормали к шатунной кривой, может быть найдено в данном случае следующим образом.

Введем в состав механизма (рис. 2, а) дополнительное звено —

ползушку D —и закрепим звено AB . Переместим ползушку на бесконечно-малую величину Δ_d .

Известно [Л. 1, § 20], что

$$\Delta_n = \Delta_d \frac{V_M}{V_d} \cos \gamma, \quad (6)$$

где V_M и V_d —скорости точек M и D в преобразованном механизме, γ —угол между скоростью V_M и направлением нормали к шатунной кривой точки M в исходном механизме.

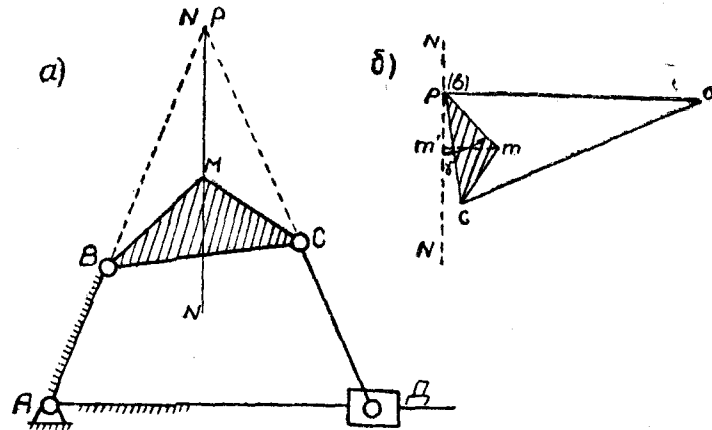


Рис. 2 а—шарнирный четырехзвенник с ползушкой;
б—план скоростей.

Последнее направление определится, если соединить точку M с полюсом мгновенного вращения P шатуна BC исходного механизма.

Из показанного на рис. 2, б плана скоростей преобразованного механизма следует, что

$$\frac{V_M}{V_d} \cos \gamma = \frac{pm}{pd} \cos \gamma = \frac{pm'}{pd}. \quad (7)$$

Итак,

$$\Delta_n = \Delta_d \frac{pm'}{pd}. \quad (8)$$

2. Вычисление трех параметров механизма

Для вычисления трех параметров группируем члены в выражении (5) так, чтобы оно имело следующий вид:

$$\Delta_d = A [F(x) - p_0 \cdot \varphi_0(x) - p_1 \cdot \varphi_1(x) - p_2 \cdot \varphi_2(x)], \quad (9)$$

где A — постоянный коэффициент, $F(x)$, $\varphi_i(x)$ — функции переменного аргумента x , не содержащие неизвестных параметров p_0 , p_1 и p_2 — коэффициенты, зависящие от искомых параметров.

Пусть, например, требуется вычислить параметры l , d и r . Тогда в уравнении (9):

$$F(x) = \frac{\rho^2 + U \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx}; \quad (10)$$

$$\varphi_0(x) = \frac{Wx - Vy + (Vx + Wy) \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx}; \quad (11)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2x + Vy - Wx}; \quad (12)$$

$$\varphi_2(x) = 1; \quad (13)$$

$$A = \frac{l \cos \omega}{\kappa}; \quad (14)$$

$$p_0 = d; \quad (15)$$

$$p_1 = a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (l^2 + a^2 + d^2 - r^2); \quad (16)$$

$$p_2 = \frac{d}{l} \cdot \frac{\kappa}{\cos \omega}. \quad (17)$$

Решая систему из трех линейных уравнений, находим коэффициенты p_0 ; p_1 и p_2 , а затем искомые размеры механизма по формулам:

$$d = p_0; \quad (18)$$

$$l = \frac{p_0}{p_2} \cdot \frac{\kappa}{\cos \omega}; \quad (19)$$

$$r = \sqrt{l^2 + a^2 + d^2 - \frac{l \cos \omega}{\kappa} (a^2 + \kappa^2 - p_1)}. \quad (20)$$

3. Вычисление четырех параметров механизма

Если требуется вычислить величины параметров ω , d , l и r , то уравнение (1) следует записать таким образом:

$$d = \frac{\rho^2}{Wx - Vy} + \operatorname{tg} \omega \frac{U}{Wx - Vy} - \frac{d \cdot \kappa}{l \cos \omega} \frac{2x - Wx + Vy}{Wx - Vy} -$$

$$- \frac{a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (l^2 + a^2 + d^2 - r^2)}{Wx - Vy} - d \operatorname{tg} \omega \frac{Vx + Wy}{Wx - Vy}.$$

Поэтому

$$\Delta_d = F(x) - p_0 \cdot \varphi_0(x) - p_1 \cdot \varphi_1(x) - p_2 \cdot \varphi_2(x) - p_3 \cdot \varphi_3(x) - p_0 p_1 \varphi_4(x), \quad (21)$$

где:

$$F(x) = \frac{\rho^2}{Wx - Vy}; \quad (22)$$

$$\varphi_0(x) = - \frac{U}{Wx - Vy}; \quad (23)$$

$$\varphi_1(x) = 1; \quad (24)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{2x - Wx + Vy}{Wx - Vy}; \quad (25)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{Wx - Vy}; \quad (26)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{Vx + Wy}{Wx - Vy}; \quad (27)$$

$$p_0 = \operatorname{tg} \omega; \quad (28)$$

$$p_1 = d; \quad (29)$$

$$p_2 = \frac{d \cdot \kappa}{l \cos \omega}; \quad (30)$$

$$p_3 = a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (l^2 + a^2 + d^2 - r^2). \quad (31)$$

Неизвестные коэффициенты вычисляются из условия обращения в минимум среднеквадратического значения разности Δ_d . Искомые размеры механизма r ; d ; l и ω определяются из уравнений (28)–(31).

При необходимости вычислить четыре параметра механизма r , d , l и β (где β —угол наклона стойки AD механизма к оси абсцисс) на основании уравнений, приведенных в § 19 упомянутой работы Н. И. Левитского, можем получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{d}{l} = & \frac{\cos \omega}{\kappa} d \left[\frac{Vy - Wx - \operatorname{tg} \omega (Vx + Wy)}{2x + Vy - Wx} - \right. \\ & - \operatorname{tg} \beta \frac{Vx + Wy + \operatorname{tg} \omega (Vy - Wx)}{2x + Vy - Wx} + \frac{1}{d \cos \beta} \cdot \frac{\rho^2 + U \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx} - \\ & - \frac{1}{d \cos \beta} \cdot \frac{a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (a^2 + l^2 + d^2 - r^2)}{2x + Vy - Wx} - \\ & \left. - \frac{1}{l} \operatorname{tg} \beta \frac{\kappa}{\cos \omega} \frac{2y - Vx - Wy}{2x + Vy - Wx} \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta \frac{d}{l} = & A [F(x) - p_0 \cdot \varphi_0(x) - p_1 \cdot \varphi_1(x) - p_2 \cdot \varphi_2(x) - \\ & - p_3 \cdot \varphi_3(x) - p_4 \cdot \varphi_4(x)], \end{aligned} \quad (33)$$

где:

$$F(x) = \frac{Vy - Wx - \operatorname{tg} \omega (Vx + Wy)}{2x + Vy - Wx}; \quad (34)$$

$$\varphi_0(x) = 1; \quad (35)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{Vx + Wy + \operatorname{tg} \omega (Vy - Wx)}{2x + Vy - Wx}; \quad (36)$$

$$\varphi_2(x) = - \frac{\rho^2 + U \operatorname{tg} \omega}{2x + Vy - Wx}; \quad (37)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{2x + Vy - Wx}; \quad (38)$$

$$\varphi_4(x) = \frac{2y - Vx - Wy}{2x + Vy - Wx}; \quad (39)$$

$$A = \frac{\cos \omega}{\kappa} d; \quad (40)$$

$$p_0 = \frac{1}{l} \cdot \frac{\kappa}{\cos \omega}; \quad (41)$$

$$p_1 = \operatorname{tg} \beta; \quad (42)$$

$$p_2 = \frac{1}{d \cos \beta}; \quad (43)$$

$$p_3 = \frac{1}{d \cos \beta} \left[a^2 + \kappa^2 - \frac{\kappa}{l \cos \omega} (a^2 + l^2 + d^2 - r^2) \right]. \quad (44)$$

Измеренное по нормали к шатунной кривой отклонение последней от заданной траектории в соответствии с изложенным выше будет равно:

$$\Delta_n = \Delta_d \cdot l \frac{pm'}{pd}. \quad (45)$$

II. ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА

1. Приближающая функция

Для кривошипно-шатунного механизма (рис. 3) при: $AB=r$; $BC=l$; $CM=b$; $AD=a$; $\angle MCB=\omega$; координатах x и y точки M и ее радиусе-векторе ρ , как показал Н. И. Левитский [Л. 1. § 36], можно составить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & \rho^2 + \frac{2}{b} [(l \cos \omega - b)y + x \cdot l \sin \omega - a \cdot l \cos \omega] y \pm \\ & \pm \frac{2}{b} [(y - a) l \sin \omega - (l \cos \omega - b)x] \sqrt{b^2 - y^2} + \\ & + a^2 + l^2 - 2bl \cos \omega + b^2 - r^2 = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

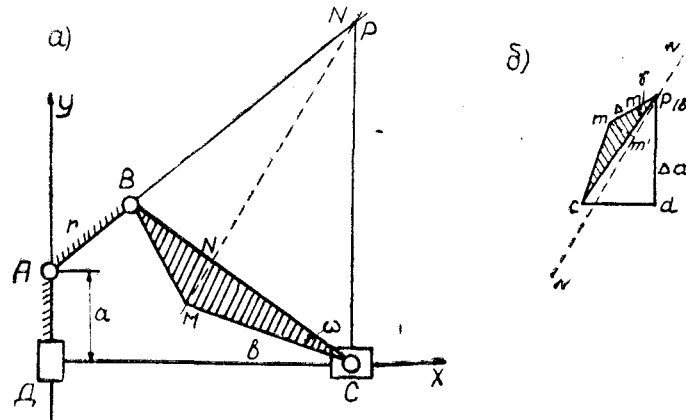


Рис. 3 а — кинематическая схема кривошипно-шатунного механизма с дополнительной ползушкой; б — план малых перемещений.

Отсюда находим, что разность между фиктивной и действительной величинами смещения механизма

$$\begin{aligned} \Delta_a = & \frac{b}{2l} \left[\frac{\rho^2 - 2y^2 \pm 2x \sqrt{b^2 - y^2}}{y \cos \omega \pm \sqrt{b^2 - y^2} \sin \omega} + \right. \\ & + \frac{2l}{b} \frac{y^2 \cos \omega + xy \sin \omega \pm (y \sin \omega - x \cos \omega) \sqrt{b^2 - y^2}}{y \cos \omega \pm \sqrt{b^2 - y^2} \sin \omega} - \\ & \left. - \frac{r^2 - a^2 - l^2 + 2bl \cos \omega - b^2}{y \cos \omega \pm \sqrt{b^2 - y^2} \sin \omega} - 2a \frac{l}{b} \right]. \end{aligned} \quad (47)$$

Для установления величины Δ_n — отклонения шатунной кривой, описываемой точкой M механизма, измеренной по нормали к шатунной кривой, введем в кинематическую схему (рис. 3, а) кривошипно-шатунного механизма дополнительную ползушку D , закрепив при этом звено AB . Построив (рис. 3, б) план малых перемещений (скоростей) преобразованного механизма, можно записать, что перемещение ползушки D , равное Δ_a , связано с перемещением Δ_m точки M следующей зависимостью:

$$\Delta_m = \Delta_a \cdot \frac{pm}{pd}$$

Так как

$$\Delta_n = \Delta_m \cos \gamma,$$

где γ — угол между направлениями линии pm плана скоростей и нормали NN к шатунной кривой точки M в исходном положении механизма (см. рис. 3, а), то

$$\Delta_n = \Delta_a \cdot \frac{pm}{pd} \cos \gamma.$$

или см. рис. 3, б

$$\Delta_n = \Delta_a \frac{pm'}{pd}. \quad (48)$$

2. Вычисление трех параметров механизма

Пусть требуется определить параметры: r , l и a механизма. Тогда уравнение (47) представим таким образом:

$$\Delta_a = A [F(x) - p_0 \cdot \varphi_0(x) - p_1 \cdot \varphi_1(x) - p_2 \cdot \varphi_2(x)], \quad (49)$$

где:

$$F(x) = \frac{x^2 - 2y^2 \pm 2x \sqrt{b^2 - y^2}}{y \cos \omega \pm \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \sin \omega}; \quad (50)$$

$$\varphi_0(x) = \frac{y^2 \cos \omega + x \cdot y \sin \omega \pm (y \sin \omega - x \cos \omega) \sqrt{b^2 - y^2}}{y \cos \omega \pm \sqrt{b^2 - y^2} \cdot \sin \omega}; \quad (51)$$

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{y \cos \omega \pm \sqrt{b^2 - y^2} \sin \omega}; \quad (52)$$

$$\varphi_2(x) = 1; \quad (53)$$

$$A = \frac{b}{2l}; \quad (54)$$

$$p_0 = -2 \frac{l}{b}; \quad (55)$$

$$p_1 = r^2 - a^2 - l^2 + 2bl \cos \omega - b^2; \quad (56)$$

$$p_2 = 2a \frac{l}{b}; \quad (57)$$

3. Вычисление четырех параметров механизма

Предположим, что определению подлежат величины параметров r, l, a и ω механизма.

Для такого случая уравнение (47) может быть записано в следующем виде:

$$\Delta_a = F(x) - p_0 \cdot \varphi_0(x) - p_1 \cdot \varphi_1(x) - p_2 \cdot \varphi_2(x) - p_3 \cdot \varphi_3(x) - p_4 \cdot \varphi_4(x), \quad (58)$$

$$\text{где: } F(x) = \frac{\pm \sqrt{b^2 - y^2} + y^2}{y}; \quad (59)$$

$$\varphi_0(x) = 1; \quad (60)$$

$$\varphi_1(x) = -y \pm \sqrt{b^2 - y^2}; \quad (61)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{y} \left(\frac{p^2}{2} - y^2 \pm x^2 \sqrt{b^2 - y^2} \right); \quad (62)$$

$$\varphi_3(x) = \frac{1}{y}; \quad (63)$$

$$\varphi_4(x) = \pm \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{y}; \quad (64)$$

$$p_0 = a; \quad (65)$$

$$p_1 = \operatorname{tg} \omega; \quad (66)$$

$$p_2 = -\frac{b}{l \cos \omega}; \quad (67)$$

$$p_3 = -\frac{b}{2l \cos \omega} (a^2 + l^2 + b^2 - r^2) + b^2. \quad (68)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитский Н. И., Проектирование плоских механизмов с низшими парами, АН СССР, 1940.

В. Я. БЕЛЕЦКИЙ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРИВОШИПНО-ШАТУННОГО МЕХАНИЗМА ПО ЗАДАНЫМ ЗАКОНАМ ДВИЖЕНИЯ ВЕДУЩЕГО И РАБОЧЕГО ЗВЕНЬЕВ

В работе описывается новый метод вычисления трех, четырех и пяти параметров кривошипно-шатунного механизма, а также дается оценка отклонения действительного закона движения рабочего звена от заданного.

Задача проектирования кривошипно-шатунного механизма по заданным законам движения ведущего и рабочего звеньев встречается нередко. Например, когда кривошипно-шатунный механизм предназначен к использованию в качестве передаточного механизма счетно-решающего устройства или контрольно-измерительного прибора с чувствительными упругими элементами.

Решение задачи заключается в определении размеров кинематической схемы механизма таким образом, чтобы при движении ведущего звена по заданному закону перемещение рабочего звена совершалось с возможно малыми отклонениями от предписанного закона. Для этого могут быть использованы методы интерполяционные, наилучшего приближения, квадратического приближения [Л. 1, стр. 22—43], а также другие [Л. 2].

Известно [Л. 1, § 29], что при определении относительных размеров кинематической схемы кривошипно-шатунного механизма общее число ее параметров равно шести, например: $\frac{l}{r}$, $\frac{a}{r}$, $\frac{x_0}{r}$, $\frac{x_m}{r}$, α_0 и α_m .

Здесь (рис. 1): r — длина кривошипа AB ; l — длина шатуна BC

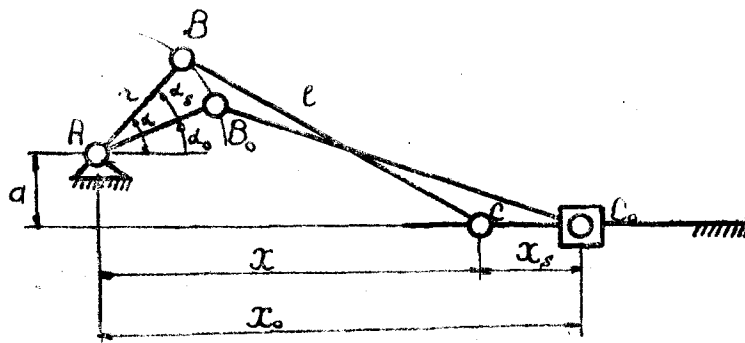


Рис. 1. Кинематическая схема кривошипно-шатунного механизма.

x_0 — начальное перемещение ползушки, x_m — конечное перемещение ползушки, α_0 — начальный угол поворота кривошипа, α_m — конечный угол поворота кривошипа, a — величина смещения.

Ниже сообщается новый метод вычисления трех, четырех и пяти из шести параметров механизма.

1. Вычисление трех параметров

Для кривошипно-шатунного механизма можно составить следующее уравнение:

$$x_0^2 + 2x_0x_s + x_s^2 - 2rx_0\cos\alpha - 2rx_s\cos\alpha + 2ar\sin\alpha + r^2 + a^2 - l^2, \quad (1)$$

где (рис. 1):

α — угол поворота кривошипа,

x_s — перемещение ползушки, отсчитываемое от ее начального положения x_0 .

Беря производную по переменной α от обеих частей уравнения (1) и имея в виду, что параметры l , r , a и x_0 — постоянные величины, получаем:

$$x_0x_s' + x_sx_s' + rx_0\sin\alpha - rx_s'\cos\alpha + rx_s\sin\alpha + ar\cos\alpha = 0. \quad (2)$$

Отсюда находим:

$$a = x_s' - x_s \operatorname{tg}\alpha - x_0 \operatorname{tg}\alpha - \frac{x_0}{r} \frac{x_s'}{\cos\alpha} - \frac{1}{r} \frac{x_s x_s'}{\cos\alpha}. \quad (3)$$

Поскольку $a = \text{const.}$, то дифференцируя уравнение (3) по переменной α , после несложных преобразований будем иметь:

$$r = \frac{x_0 \varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha)}{\varphi_2(\alpha) - x_0}, \quad (4)$$

а также

$$x_0 = \frac{r \varphi_2(\alpha) - \varphi_1(\alpha)}{\varphi_0(\alpha) + r}, \quad (5)$$

где:

$$\varphi_0(\alpha) = x_s'' \cos\alpha + x_s' \sin\alpha; \quad (6)$$

$$\varphi_1(\alpha) = x_s'^2 \cos\alpha + x_s x_s'' \cos\alpha + x_s x_s' \sin\alpha; \quad (7)$$

$$\varphi_2(\alpha) = x_s'' \cos^2\alpha - 0,5 x_s' \sin 2\alpha - x_s. \quad (8)$$

В дальнейшем расчет будем вести в относительных величинах параметров.

Предположим, нужно вычислить параметры l , r и a . Тогда, полагая $x_0 = 1$, получаем взамен уравнения (4) следующее:

$$r = \frac{\varphi_0(\alpha) + \varphi_1(\alpha)}{\varphi_2(\alpha) - 1}. \quad (9)$$

Так как при вычислении указанных трех параметров функция $x_s = x_s(\alpha)$ должна быть известна, то для ряда выбираемых значений угла α : $\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_m$ — можно вычислить с помощью уравнений (6) — (8) соответствующие значения r : $r_0; r_1; \dots; r_m$.

Если бы при этом оказалось, что $r_0 = r_1 = \dots = r_m$, то требуемый закон движения ползушки воспроизводился бы механизмом (идеаль-

ным) вполне точно. Однако такой случай нужно рассматривать как исключение, а вообще величины $r_0; r_1; \dots r_m$ окажутся различными, как это показано, например, на графике $r = r(\alpha)$, изображенном в прямоугольной и прямоугольной системе координат на рис. 2. Поэтому целесообразно вычислять относительную величину параметра r как среднее арифметическое всех найденных ее значений, а именно:

$$r = \frac{r_0 + r_1 + \dots + r_m}{m + 1}, \quad (10)$$

где $m + 1$ — число расчетных положений механизма.

Ясно, что абсцисса α_k точки пересечения кривой $r = r(\alpha)$ (рис. 2) с прямой, отстоящей от оси $O\alpha$ на расстоянии r , дает положение механизма, в котором требуемый закон движения осуществляется ползушкой вполне точно. При необходимости величину α_k можно определить при помощи уравнения (4) с любой точностью.

Зная α_k , на основании уравнения (3) находим:

$$a = x_{sk}' - (1 + x_{sk}) \operatorname{tg} \alpha_k - \frac{x_{sk}'}{r \cos \alpha_k} (1 + x_{sk}). \quad (11)$$

В силу уравнения (1):

$$l = \sqrt{(1 + x_{sk})^2 - 2r(1 + x_{sk}) \cos \alpha_k + 2ar \sin \alpha_k + r^2 + a^2}. \quad (12)$$

Таким образом вычисляются относительные значения параметров r , a и l при $x_0 = 1$.

Заметим, что упомянутая точка пересечения кривой с прямой (рис. 2) является узлом интерполирования функции $x_s = x_s(\alpha)$. Кроме того, при выполнении расчета по указанной схеме, при $\alpha = \alpha_k$ совпадают также значения первой и второй производных заданной и воспроизводимой функций. Следовательно, узел будет трехкратным.

Если необходимо определить параметры l , a и x_0 , нужно воспользоваться уравнением (5), положив в нем $r = 1$.

Тогда,

$$x_0 = \frac{\varphi_2(\alpha) - \varphi_1(\alpha)}{\varphi_0(\alpha) + 1}. \quad (13)$$

Давая углу α ряд последовательных значений: $\alpha_0; \alpha_1; \dots \alpha_m$, находим по формулам (6) — (8), а затем по формуле (13) соответствующие значения параметра x_0 : $x_{00}; x_{01}; \dots x_{0m}$. Относительное значение вычисляемого параметра:

$$x_0 = \frac{x_{00} + x_{01} + \dots + x_{0m}}{m + 1}. \quad (14)$$

Затем, как и в рассмотренном выше случае, выделяем положение механизма ($\alpha = \alpha_k$), в котором предписанное движение ползушки осу-

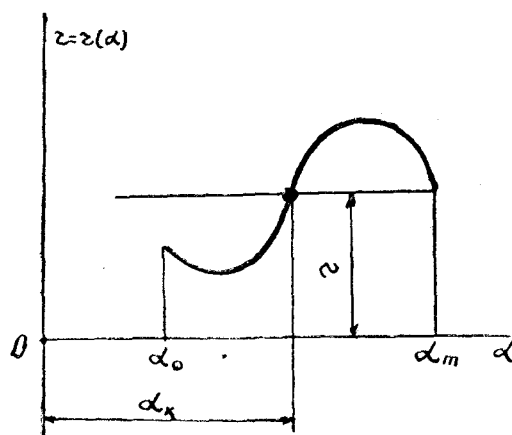


Рис. 2. Изменение длины кривошипа в зависимости от угла его поворота.

ществляется вполне точно и, согласно уравнениям (3) и (1), получаем:

$$a = x'_{sk} - (x_0 + x_{sk}) \operatorname{tg} \alpha_k - \frac{x_0 x'_{sk} + x_{sk} x'_{sk}}{\cos \alpha_k}. \quad (15)$$

и

$$l = \sqrt{(x_0 + x_{sk})^2 - 2(x_0 + x_{sk}) \cos \alpha_k + 2a \sin \alpha_k + a^2 + 1}. \quad (16)$$

2. Вычисление четырех параметров

От кривошипно-шатунного механизма, применяемого в счетно-решающем устройстве, требуется, чтобы перемещение кривошипа было пропорционально изменению аргумента X_s , а перемещение ползушки — изменению функции y_s . Следовательно,

$$\mu_x = \frac{y_s}{x_s}, \quad (17)$$

где μ_x — масштаб шкалы ползушки.

Величину μ_x и выберем теперь в качестве одного из вычисляемых параметров.

Итак, требуется вычислить параметры l , r , a и μ_x . Принимая $x_0 = 1$, на основании уравнений (6) — (9) и (17) получаем:

$$r = \frac{f_0(\alpha) \mu_x + f_1(\alpha)}{f_2(\alpha) \mu_x - \mu_x^2}, \quad (18)$$

где:

$$f_0(\alpha) = y_s'' \cos \alpha + y_s' \sin \alpha; \quad (19)$$

$$f_1(\alpha) = y_s'^2 \cos \alpha + y_s y_s'' \cos \alpha + y_s y_s' \sin \alpha; \quad (20)$$

$$f_2(\alpha) = y_s'' \cos^2 \alpha - 0,5 y_s' \sin 2\alpha - y_s. \quad (21)$$

Так как $r = \text{const.}$, то производная по α от правой части уравнения (18) равна нулю. Поэтому,

$$f_0'(\alpha) \mu_x^2 - [f_0'(\alpha) f_2(\alpha) - f_1(\alpha) f_2'(\alpha) f_0(\alpha)] \mu_x + f_1(\alpha) f_2'(\alpha) - f_1'(\alpha) f_2(\alpha) = 0, \quad (22)$$

где в силу (19) — (21) —

$$f_0'(\alpha) = (y_s''' + y_s') \cos \alpha; \quad (23)$$

$$f_1'(\alpha) = (3y_s' y_s'' + y_s y_s''' + y_s y_s') \cos \alpha; \quad (24)$$

$$f_2'(\alpha) = y_s''' \cos^2 \alpha - 1,5 y_s'' \sin 2\alpha - y_s' (1 + \cos 2\alpha). \quad (25)$$

Вычисляя для ряда фиксированных значений угла α : $\alpha_0; \alpha_1; \dots; \alpha_m$ соответствующие величины функций по формулам (19) — (21) и (23) — (25) и подставляя их в квадратное относительно параметра μ_x уравнение (22), найдем ряд значений μ_x : $\mu_{x0}; \mu_{x1}; \dots; \mu_{xm}$.

Относительную величину параметра μ_x окончательно определяем по следующей формуле:

$$\mu_x = \frac{\mu_{x0} + \mu_{x1} + \dots + \mu_{xm}}{m + 1}. \quad (26)$$

Найдем затем (см. п. 1) угол α_k , определяющий положение интерполяционного узла. В данном случае он будет четырехкратным.

Теперь по уравнению (18) можно вычислить относительную величину параметра r :

$$r = \frac{f_0(\alpha_k) \mu_x + f_1(\alpha_k)}{f_2(\alpha_k) \mu_x - \mu_x^2} \quad (27)$$

Параметры a и l (при $x_0 = 1$) определяются соответственно по формулам (11) и (12).

При вычислении параметров l , a , x_0 и μ_x поступаем следующим образом. Полагаем $r = 1$, тогда в силу уравнений (6) — (8), (13) и (17) после преобразований и упрощений окончательно получим:

$$x_0 = \frac{f_2(\alpha) \mu_x - f_1(\alpha)}{f_1(\alpha) \mu_x + \mu_x^2} \quad (28)$$

Значения функций $f(\alpha)$ подсчитываются по формулам (19) — (21). Поскольку $x_0 = \text{const.}$, из (28) будем иметь:

$$f_2(\alpha) \mu_x^2 + [f_2'(\alpha) f_0(\alpha) - f_1(\alpha) - f_2(\alpha) f_0'(\alpha)] \mu_x + f_1(\alpha) f_0'(\alpha) - f_1'(\alpha) f_0(\alpha) = 0 \quad (29)$$

Величины $f'(\alpha)$ определяются по зависимостям (23) — (25).

По уравнению (29) вычисляем ряд значений параметра $\mu_x: \mu_{x0}; \mu_{x1}; \dots \mu_{xm}$ (при $r = 1$), соответствующие углам: $\alpha_0; \alpha_1; \dots \alpha_m$.

Относительная величина параметра μ_x определяется по формуле (26).

После этого находим значение угла α_k , при котором проектируемый механизм воспроизводит требуемую функцию y_s вполне точно.

Затем, согласно уравнению (28), имеем:

$$x_0 = \frac{f_2(\alpha_k) \mu_x - f_1(\alpha_k)}{f_0(\alpha_k) \mu_x + \mu_x^2} \quad (30)$$

Относительные величины параметров a и l вычисляются в рассматриваемом случае по уравнениям (15) и (16).

3. Вычисление пяти параметров

До сих пор мы рассматривали величину угла α как независимый аргумент. Теперь заменим α (см. рис. 1) суммой $\alpha_s + \alpha_0$, где α_s — независимая переменная, а α_0 — один из вычисляемых параметров.

Перемещение ползушки x_s может быть [Л. 1, стр. 143] представлено следующим образом:

$$x_s = y_s \frac{H}{y_m - y_0} \quad (31)$$

где: y_m — значение функции y_s при $x = x_m$;

y_0 — значение функции y_s при $x = x_0$;

H — ход ползушки, равный разности $x_m - x_0$.

В целях упрощения дальнейших выкладок примем, что

$$H = y_m - y_0.$$

При этом условии $x_s = y_s$. Тогда величины четырех из пяти вычисляемых параметров, а именно, a , r , l и x_0 , будут определяться относительно $H: (y_m - y_0)$.

Заменяя в уравнении (2) α через $\alpha_0 + \alpha_s$; x_s через y_s и x_s' через y_s' , после преобразований получаем:

$$\begin{aligned} -(x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 + a) = & \frac{x_0}{r \cos \alpha_0} \frac{y_s'}{\cos \alpha_s} + \frac{1}{r \cos \alpha_0} \frac{y_s y_s'}{\cos \alpha_s} + \\ & + (x_0 - a \operatorname{tg} \alpha_0) \operatorname{tg} \alpha_s + \operatorname{tg} \alpha_0 (y_s' \operatorname{tg} \alpha_s + y_s) + \\ & + y_s \operatorname{tg} \alpha_s - y_s'. \end{aligned} \quad (32)$$

Так как сумма $x_0 \operatorname{tg} \alpha_0 + a$ не зависит от α_s , то на основании уравнения (32) будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{x_0}{r \cos \alpha_0} \left(\frac{y_s'}{\cos \alpha_s} \right)' + \frac{1}{r \cos \alpha_0} \left(\frac{y_s y_s'}{\cos \alpha_s} \right)' + (x_0 - a \operatorname{tg} \alpha_0) (\operatorname{tg} \alpha_s)' + \\ + \operatorname{tg} \alpha_0 (y_s' \operatorname{tg} \alpha_s + y_s)' + (y_s \operatorname{tg} \alpha_s - y_s')' = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

Процесс последовательного исключения параметров механизма можно продолжить до тех пор, пока не придем — как это было в случаях вычисления трех и четырех параметров — к одному уравнению, содержащему какой-нибудь один искомый параметр. Истинное значение этого параметра определится как среднее арифметическое $m+1$, его расчетных значений и т. д. Однако, располагая уравнением (33), проще вычислить сначала четыре параметра механизма (r , a , x_0 и α_0) из условия квадратического приближения, после чего определить параметр l интерполированием.

Для этого, выполнив указанные в уравнении (33) операции дифференцирования, решим его относительно a :

$$\begin{aligned} a = y_s' + 0,5 y_s'' \sin 2\alpha_s + y_s' \cos^2 \alpha_s + \frac{x_0}{r \sin \alpha_0} (y_s'' \cos \alpha_s + \\ + y_s' \sin \alpha_s) + \frac{1}{r \sin \alpha_0} [y_s'^2 \cos \alpha_s + y_s (y_s'' \cos \alpha_s + y_s' \sin \alpha_s)] + \\ + \operatorname{ctg} \alpha_0 (0,5 y_s' \sin 2\alpha_s + y_s - y_s'' \cos^2 \alpha_s) + x_0 \operatorname{ctg} \alpha_0. \end{aligned} \quad (34)$$

В общем случае при любых величинах параметров x_0 , α_0 и r для каждого фиксированного значения переменной α_s будем получать соответствующие значения правой части уравнения (34). Обозначим разность между величиной искомого постоянного параметра a и правой частью уравнения (34) через δ_a .

Тогда получим, что

$$\delta_a = F(\alpha_s) - p_0 \varphi_0(\alpha_s) - p_1 \varphi_1(\alpha_s) - p_2 \varphi_2(\alpha_s) - p_3 \varphi_3(\alpha_s), \quad (35)$$

где в соответствии с уравнением (34):

$$F(\alpha_s) = -y_s' - 0,5 y_s'' \sin 2\alpha_s - y_s' \cos^2 \alpha_s; \quad (36)$$

$$\varphi_0(\alpha_s) = y_s'' \cos \alpha_s + y_s' \sin \alpha_s; \quad (37)$$

$$\varphi_1(\alpha_s) = y_s'^2 \cos \alpha_s + y_s (y_s'' \cos \alpha_s + y_s' \sin \alpha_s); \quad (38)$$

$$\varphi_2(\alpha_s) = 0,5 y_s' \sin 2\alpha_s + y_s - y_s'' \cos^2 \alpha_s; \quad (39)$$

$$\varphi_3(\alpha_s) = 1; \quad (40)$$

$$p_0 = \frac{x_0}{r \sin \alpha_0}; \quad (41)$$

$$p_1 = \frac{1}{r \sin \alpha_0}; \quad (42)$$

$$p_2 = \operatorname{ctg} \alpha_0; \quad (43)$$

$$p_3 = x_0 \operatorname{ctg} \alpha_0 - a. \quad (44)$$

Так как разность δ_a имеет вид обобщенного полинома, то значения постоянных коэффициентов $p_0; p_1; p_2$ и p_3 , при которых среднее квадратическое отклонение δ_a будет минимальным, находятся [Л. 1, § 6] путем решения системы из следующих четырех линейных относительно этих коэффициентов уравнений:

$$\left. \begin{aligned} c_{00}p_0 + c_{01}p_1 + c_{02}p_2 + c_{03}p_3 &= \gamma_0; \\ c_{10}p_0 + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 + c_{13}p_3 &= \gamma_1; \\ c_{20}p_0 + c_{21}p_1 + c_{22}p_2 + c_{23}p_3 &= \gamma_2; \\ c_{30}p_0 + c_{31}p_1 + c_{32}p_2 + c_{33}p_3 &= \gamma_3; \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\kappa &= \sum_{i=0}^{l=m} [F(\alpha_{si}) \varphi_\kappa(\alpha_{si})]; \\ c_{kl} &= \sum_{i=0}^{l=m} [\varphi_\kappa(\alpha_{si}) \varphi_l(\alpha_{si})] \quad \begin{matrix} \kappa = 0, 1, 2, 3 \\ l = 0, 1, 2, 3 \end{matrix} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Искомые параметры механизма в соответствии с формулами (41) — (44):

$$\alpha_0 = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} p_2; \quad (47)$$

$$r = \frac{1}{p_1 \sin \alpha_0}; \quad (48)$$

$$x_0 = \frac{p_0}{p_1}; \quad (49)$$

$$a = \frac{p_0}{p_1} p_2 - p_3. \quad (50)$$

Теперь нужно определить величину параметра l . Для этого найдем значение угла α_s , при котором разность δ_a обращается в нуль. Последнее может быть выполнено следующим образом. Строим в прямолинейной и прямоугольной системе координат согласно уравнению (45) кривую $\delta_a = \delta_a(\alpha_s)$. Точки, в которых эта кривая пересекает ось $O\alpha$, дают положения узлов интерполирования (третьей кратности).

Пусть $\delta_a = 0$ при $\alpha_s = \alpha_{sk}$, тогда в силу уравнения (1) для рассматриваемого случая получим:

$$l = \sqrt{(x_0 + y_{sk})^2 - 2(x_0 + y_{sk}) \cos(\alpha_0 + \alpha_{sk}) + 2ar \sin(\alpha_0 + \alpha_{sk}) + r^2 + a^2}. \quad (51)$$

4. Оценка отклонения действительного закона движения рабочего звена от заданного

Для определения величины Δ_x отклонения в движении ползушки воспользуемся идеей, выдвинутой проф. Н. И. Левитским [Л. 1, § 30].

При вычислении параметров l , r и a по уравнению (9) определяются переменные относительные значения параметра $r: r_0; r_1; \dots r_m$. Поэтому относительные отклонения в длине кривошипа будут равны: $\delta_{r_0} = r - r_0; \delta_{r_1} = r - r_1; \dots \delta_{r_m} = r - r_m$ при $x_0 = 1$. Следовательно, абсолютные отклонения в длине кривошипа Δ_r найдутся умножением относительных отклонений на истинную (выбираемую при проектировании) величину x_0 , т. е. $\Delta_r = \delta_r \cdot x_0$.

Зависимость между известной величиной Δ_r и искомой Δ_x для каждого положения механизма может быть установлена следующим образом. Преобразуем кривошипно-шатунный механизм (рис. 3,а) и построим план скоростей для последнего (рис. 3,б), принимаемый по предложению акад. Н. Г. Бруевича [Л. 3] за план малых перемещений.

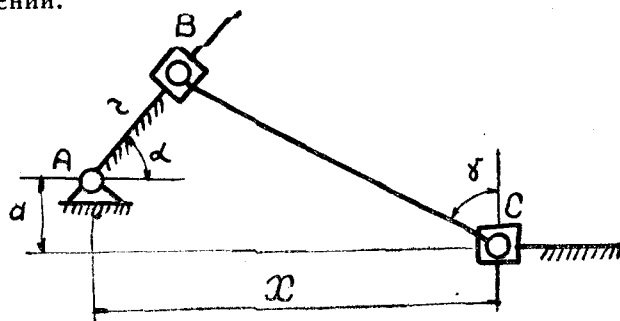


Рис. 3а. Преобразованный кривошипно-шатунный механизм.

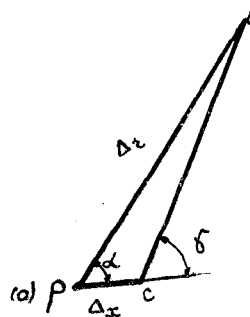


Рис. 3б. План скоростей.

Из упомянутого плана следует (рис. 3, б):

$$\Delta_x = \Delta_r \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\sin \gamma}, \quad (52)$$

где γ — угол передачи от шатуна к ползушке, величина которого определяется по известной формуле:

$$\cos \gamma = \frac{a}{l} + \frac{r}{l} \sin \alpha. \quad (53)$$

При вычислении четырех параметров l , r , a и μ_x величину отклонения Δ_x также вычисляем по формуле (52). Чтобы найти Δ_r , нужно предварительно подсчитать относительные величины (при $x_0 = 1$) разности δ_r согласно уравнению (18).

Стало быть,

$$\Delta_r = \left[r - \frac{f_0(\alpha) \mu_x + f_1(\alpha)}{f_2(\alpha) \mu_x - \mu_x^2} \right] x_0. \quad (54)$$

Для расчета величины отклонения Δ_x при иных приведенных выше комбинациях вычисляемых параметров заменяем кривошипно-шатун-

ный механизм двухползунковым механизмом (рис. 4,а), а затем строим план его малых перемещений (план скоростей). Из последнего (рис. 4,б) заключаем:

$$\Delta_x = \Delta_a \operatorname{ctg} \gamma, \quad (55)$$

где Δ_a представляет собой разность между найденным абсолютным значением параметра a и его переменной величиной, обеспечивающей воспроизводство механизмом заданной зависимости вполне точно.

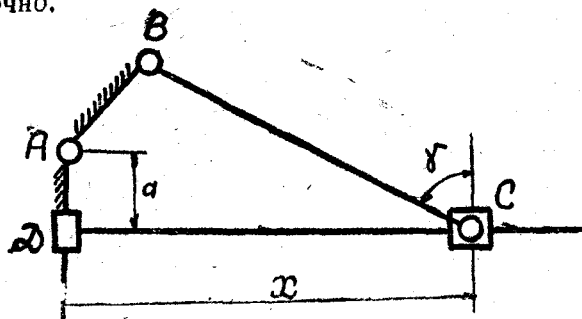


Рис. 4 а. Двухползунковый механизм.

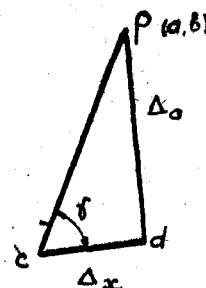


Рис. 4 б. План малых перемещений.

При вычислении трех параметров l , a , и x_0 , а также четырех параметров l , a , x_0 и r_x мы полагали $r=1$. Поэтому, на основании уравнения (3) будем иметь:

$$\Delta_a = \left[a - x_s' + (x_0 + x_s) \operatorname{tg} \alpha + \frac{x_s}{r \cos \alpha} (x_0 + x_s) \right] r. \quad (56)$$

В этом уравнении r — абсолютная длина кривошипа.

При вычислении пяти параметров по уравнению (35) определяется относительная величина δ_a при условии, что $H: (y_m - y_0) = 1$.

Поэтому

$$\Delta_a = \delta_a \frac{H}{y_m - y_0}. \quad (57)$$

До сих пор мы предполагали, что ведущим звеном кривошипно-шатунного механизма является кривошип. Ясно, что вычисление параметров механизма в случае, если ведущим звеном будет ползушка, а рабочим — кривошип, не представит принципиально ничего нового по сравнению с изложенным выше. Однако для оценки отклонения в положении рабочего звена-кривошипа нужно поступить следующим образом.

При вычислении параметров l , a и x_0 или l , a , x_0 и r_x рассматриваем механизм, изображенный на рис. 5,а. Из плана его малых перемещений (рис. 5,б) следует, что

$$\Delta_a = \frac{\Delta_r}{r + \Delta_r} \operatorname{ctg} \gamma_1, \quad (58)$$

где γ_1 — угол передачи от шатуна к кривошипу.

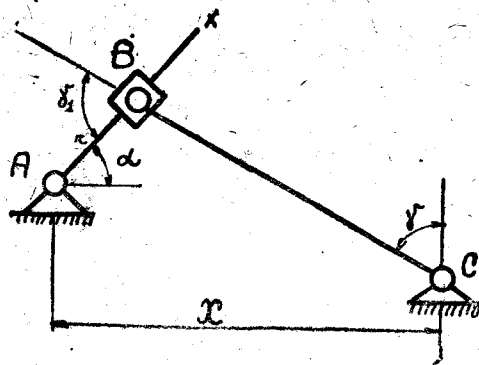


Рис. 5, а. Кривошипно-шатунный механизм с ведущей ползушкой.

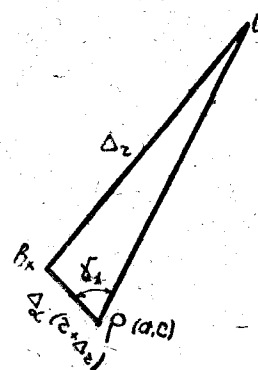


Рис. 5, б. План скоростей.

Во всех остальных из рассмотренных случаев строим заменяющий механизм, показанный на рис. 6, а. Из плана его малых перемещений (рис. 6, б) заключаем:

$$\Delta_a = \frac{\Delta_a \cos \gamma}{r \sin \gamma_1} \quad (59)$$

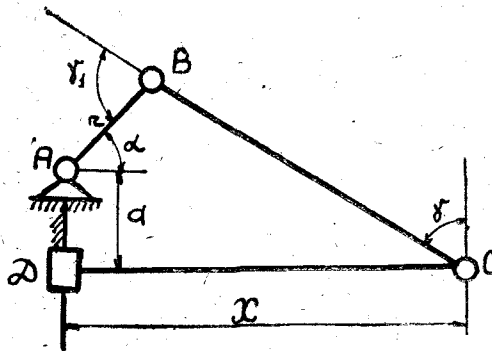


Рис. 6, а. Заменяющий механизм

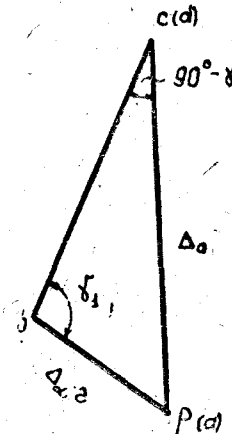


Рис. 6, б. План малых перемещений

В заключение заметим, что при вычислении трех и четырех параметров механизма величина первого (по порядку) из вычисляемых параметров может быть принята равной не среднему арифметическому из ряда вычисленных величин, но также и полусумме наибольшей и наименьшей из этих величин, т. е. взамен формул (10), (14) и (26) будем соответственно иметь:

$$r = \frac{r_{\text{наиб.}} + r_{\text{наим.}}}{2}; \quad (10, a)$$

$$x_0 = \frac{x_{0 \text{ наиб.}} + x_{0 \text{ наим.}}}{2}; \quad (14, a)$$

$$\mu_x = \frac{\mu_{x \text{ наиб.}} + \mu_{x \text{ наим.}}}{2} \quad (26, a)$$

В таком случае наибольшие значения отклонений Δ_r , Δ_{x_0} и Δ_{μ_x} параметров r , x_0 и μ_x будут равны по модулю между собой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Левитский Н. И., Проектирование плоских механизмов с низшими парами, АН СССР, 1950.
2. Новодворский Е. П., Об одном способе синтеза механизмов, Труды семинара по теории машин и механизмов, т. XI, вып. 42, Изд. АН СССР, 1951.
3. Бруевич Н. Г., Точность механизмов, ГТТИ, 1946.

В. Ф. МАЛЬЦЕВ

ТЕОРИЯ ПРОЦЕССА ЗАКЛИНИВАНИЯ РОЛИКОВОГО МЕХАНИЗМА СВОБОДНОГО ХОДА

В работе излагается теория самозаклинивания роликовых механизмов свободного хода. Установлены условия заклинивания механизма и приводятся критические замечания о существующей теории самозаклинивания.

Среди механизмов свободного хода наибольшее распространение в современном машиностроении и приборостроении получили роликовые механизмы свободного хода (рис. 1) благодаря ряду достоинств, присущих этим механизмам, основные из которых следующие: бесшумность и

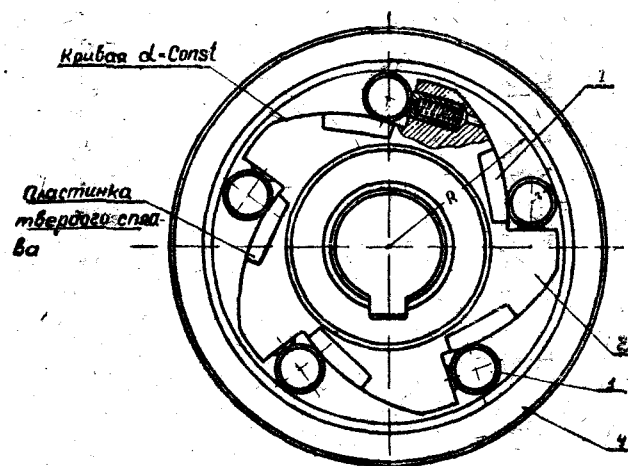


Рис. 1. Конструкция механизма свободного хода.

надежность в работе, отсутствие «мертвого» хода, малые габариты, относительная простота конструкции.

Полный цикл движения механизма свободного хода может быть разбит на следующие фазы: заклинивания, заклиненного состояния, раскли-

нивания и свободного хода. Каждой фазе присущи свои особенности и свойства, которые в совокупности характеризуют движение механизма в целом. У механизма свободного хода следует обеспечить правильное функционирование его на всех этапах движения. Однако необходимо отметить, что период заклинивания имеет особо важное значение для работы этих механизмов.

В этот период должны быть созданы условия для самозаклинивания механизма, которые могут быть обеспечены правильным выбором его основных параметров.

Под заклиниванием будем понимать процесс защемления ролика между рабочими поверхностями обойм в момент такого относительного перемещения их, которое вызывает закатывание ролика в более узкую часть пространства между обоймами. Этот период сопровождается приложением нагрузки к элементам механизма и их деформацией, потерей энергии на трение качения ролика по рабочим поверхностям обойм и накоплением потенциальной энергии деформации. Процесс заклинивания механизмов свободного хода в большинстве случаев их применения (пусковые устройства, трансмиссии автомобилей, приводы металлорежущих станков, импульсивные вариаторы и др.) протекает в течение долей секунды и сопровождается ударным приложением нагрузки.

Конец свободного хода и начало периода заклинивания определяются состоянием механизма, при котором угловые скорости наружной ω_1 и внутренней ω_2 обойм уравниваются, т. е. когда $\omega_1 = \omega_2$. В этот момент вообще возможно относительное перемещение ролика. Но учитывая, что прижимное усилие выбирается такой величины, которая обеспечивает непрерывный контакт ролика с рабочими поверхностями обойм и что приведенные массы обойм, обычно, гораздо больше массы ролика, изменение относительной скорости ролика в последний период свободного хода следует за изменением относительной скорости обойм.

Заклинивание начнется с момента, когда $\omega_1 > \omega_2$ (направление угловой скорости ω_1 принято за положительное (рис. 2) и закончится равновесным заклиненным состоянием, когда $\omega_1 = \omega_2$.

На ролик в период заклинивания будут действовать следующие усилия (рис. 2):

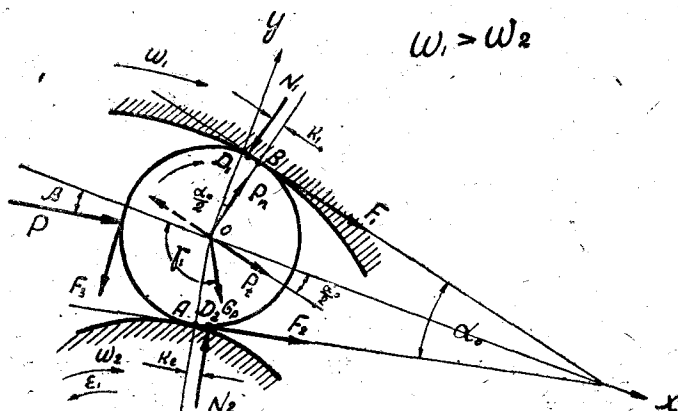


Рис. 2. Схема сил, действующих на ролик в процессе заклинивания.

- N_1 и N_2 — нормальные составляющие, действующие со стороны обойм в точках D_1 и D_2 ;
 F_1 , F_2 и F_3 — соответственно силы трения на поверхностях контакта ролика с обоймами и прижимным устройством;
 P — усилие, действующее на ролик со стороны прижимного устройства;
 P_n и P_t — нормальная и тангенциальная силы инерции;
 G_p — вес ролика.

Обозначим:

- f_1 и K_1 — коэффициент трения скольжения и трения качения на поверхности соприкосновения ролика и наружной обоймы;
 f_2 и K_2 — коэффициент трения скольжения и трения качения на поверхности соприкосновения ролика и внутренней обоймы;
 f_3 — коэффициент трения скольжения на поверхности соприкосновения ролика с прижимным устройством;
 α — угол заклинивания;
 ϵ — угловое ускорение внутренней обоймы;
 R — радиус отверстия наружной обоймы;
 r — радиус ролика;
 m — масса ролика.

Проведем систему прямоугольных координат с началом в центре ролика O , ось x -ов которой направлена по биссектрисе угла.

На рис. 3 показана схема распределения усилий, действующих на ролик когда

$$\omega_1 = \omega_2$$

В момент начала заклинивания, когда внутренняя обойма стремится повернуться относительно наружной в сторону заклинивания (на рис. 2 по часовой стрелке) начинается процесс защемления, заклинивания ролика между обоймами, при этом изменяется направление сил трения, а

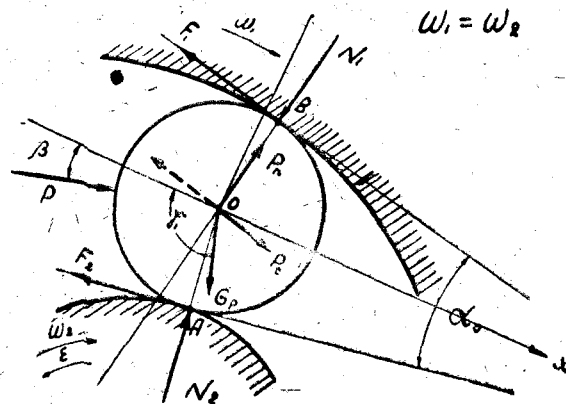


Рис. 3. Схема сил, действующих на ролик в начальный момент заклинивания.

нормальные давления смещаются на некоторую величину вследствие того, что ролик, перекатываясь по рабочим поверхностям обойм, устремляется в более узкую часть между ними. Направление сил трения, действующей в месте контакта ролика с обоймой, очевидно, а направление силы трения F_2 можно себе представить, если учесть, что ролик при заклини-

вании деформируется и перекачивается по поверхности звездочки с проскальзыванием. Самозаклинивание ролика наблюдается тогда, когда силы и моменты, действующие на ролик, будут стремиться втянуть его в сужающееся пространство между обоймами. Для этого необходимо, чтобы сумма проекций сил, действующих на ролик на координатные оси, должна быть положительной, а момент от сил трения F_1 больше момента сопротивления при перекачивании ролика.

В развернутом виде условия заклинивания запишутся:

$$N_1 f_1 \cos \frac{\alpha}{2} - N_1 \sin \frac{\alpha}{2} \pm P_t \cos \frac{\alpha}{2} + P_n \sin \frac{\alpha}{2} + G_p \cos(180-\gamma) + \\ + P \cos \beta + P f_3 \sin \beta + N_2 f_2 \cos \frac{\alpha}{2} - N_2 \sin \frac{\alpha}{2} > 0 \quad (1)$$

$$- N_1 \cos \frac{\alpha}{2} - N_1 f_1 \sin \frac{\alpha}{2} \pm P_t \sin \frac{\alpha}{2} + P_n \cos \frac{\alpha}{2} - G_p \sin(180-\gamma) + \\ + P \sin \beta - P f_3 \cos \beta + N_2 \cos \frac{\alpha}{2} - N_2 f_2 \sin \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (2)$$

$$- N_1 K_1 + N_1 f_1 r - N_2 K_2 - N_2 f_2 r - P f_3 r > 0.$$

Последнее неравенство можно записать:

$$N_1 \geq \frac{N_2 (f_2 r + K_2) + P f_3 r}{f_1 r - K_1}. \quad (3)$$

Знак перед величиной тангенциальной силы инерции P_t в выражениях (1) и (2) определяется направлением углового ускорения ε в период заклинивания.

Так как, обычно, угол заклинивания $\alpha < 9^\circ$, то с достаточной для практики точностью можно принять $\sin \frac{\alpha}{2} \approx \frac{\alpha}{2}$ и $\cos \frac{\alpha}{2} \approx 1$.

Величины сил инерции P_t и P_n определяются:

$$P_t = m (R - r) \varepsilon \quad (4)$$

$$P_n = m (R - r) \omega^2. \quad (5)$$

Используя выражения (1), (2) и (3) после некоторых преобразований, получим условие самозаклинивания роликового механизма свободного хода:

$$b \alpha^2 + 2 a \alpha + 4 g \geq 0.$$

Откуда условие самозаклинивания роликового механизма свободного хода запишется:

$$\alpha \leq 57,3 \left[\frac{a}{b} - \sqrt{\left(\frac{a}{b} \right)^2 - 4 \frac{g}{b}} \right], \quad (6)$$

где:

$$a = [P_n (f_1 r - K_1) - P f_3 r] [r (f_1 - f_2) - K_1 - K_2] - \\ - [P f_1 f_3 r + (f_1 r - K_1) (P \cos \beta + P f_3 \sin \beta - G_p \cos \gamma \pm P_t)] (K_1 f_2 + K f_1) - \\ - [P_t (f_1 r - K_1) - P f_1 f_3 r] (2 f_1 f_2 r + f_1 K_2 - f_2 K_1) + \\ + [(P_n + P \sin \beta - P f_3 \cos \beta + G_p \sin \gamma) (f_1 r - K_1) - P f_3 r] [r (f_1 + f_2) + K_2 - K_1] \\ b = [P_t (f_1 r - K_1) - P f_1 f_3 r] [r (f_1 + f_2) + K_2 - K_1] - \\ - [P_n (f_1 r - K_1) - P f_3 r] (K_1 f_2 + K_2 f_1) \\ g = [P f_1 f_3 r + (f_1 r - K_1) (P \cos \beta + P f_3 \sin \beta - G_p \cos \gamma \pm P_t)] \\ [r (f_1 - f_2) - K_1 - K_2] - [(f_1 r - K_1) \\ (P_n + P \sin \beta - P f_3 \cos \beta + G_p \sin \gamma) - f_3 r P] (2 f_1 f_2 r + f_1 K_2 - f_2 K_1) \quad (7)$$

Для относительно тихоходных механизмов силы инерции, действующие на ролик, незначительны, а следовательно, весьма мало и усилие прижимного устройства. Поэтому для таких механизмов силами P , P_n , P и G_p можно пренебречь, тогда, проектируя усилия N_1 , N_2 , F_1 и F_2 на направление биссектрисы угла α (рис. 2), запишем:

$$(N_1 + N_2) \sin \frac{\alpha}{2} < (f_1 N_1 + f_2 N_2) \cos \frac{\alpha}{2}. \quad (8)$$

На основании совместного решения неравенств (8) и (3) получим условие заклинивания

$$\alpha \leq 2 \arctg \frac{2r_1 f_1 f_2 + K_2 f_1 - K_1 f_2}{r(f_1 + f_2) + K_2 - K_1}. \quad (9)$$

Это выражение можно использовать и для предварительных расчетов быстроходных механизмов свободного хода, помня при этом, что вышеуказанные допущения приведут к меньшим углам заклинивания. Последнее обстоятельство, как известно, дает большую гарантию для самозаклинивания. Так как величины $K_2 f_1 - K_1 f_2$ и $K_2 - K_1$ весьма незначительны, то из формулы (9) можно заключить, что влияние радиуса ролика невелико. Это достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными [Л. 2]. Пренебрегая указанными величинами, получим условие заклинивания

$$\alpha \leq 2 \arctg \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2}. \quad (10)$$

При $f_1 = f_2$ получим известное неравенство $\alpha \leq 2\rho$, где ρ — угол трения на контактных поверхностях ролика и обойм.

Рассматривая равновесие ролика в период заклинивания, Куликов Н. К. [Л. 3] приходит к формуле

$$\alpha \leq \rho_1 - \rho_2, \quad (11)$$

на основании которой утверждает, что при заклинивании коэффициенты трения $f_1 = \operatorname{tg} \rho_1$ и $f_2 = \operatorname{tg} \rho_2$ на поверхностях контакта обоймы и звездочки с роликом должны быть различными. Из формулы (11) также следует, что самозаклинивание может наступить только когда $f_1 > f_2$. Это условие самозаклинивания не согласуется с практикой, так как реальные механизмы чаще всего выполняются, когда $f_1 = f_2$, что приводит согласно формуле (11) к противоречивому условию $\alpha \leq 0$.

Проведенные нами испытания роликовых механизмов свободного хода при условии $f_1 < f_2$ показали способность их к самозаклиниванию, тем самым выявили несостоятельность формулы (11) и показали достаточно хорошую согласованность с формулами (9) и (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. Мальцев В. Ф., К вопросу теории роликовых муфт свободного хода, „Вестник Машиностроения“, № 8, 1952.
2. Лаврентьев С. А., Исследование трения первого рода цилиндрических тел, Всесоюзная конференция по трению и износу в машинах АН СССР, 1940.
3. Куликов Н. К., Теория роликовых механизмов свободного хода, „Вестник Машиностроения“, № 2, 1947.

В. Ф. МАЛЬЦЕВ

НОВЫЙ МЕТОД ИСПЫТАНИЯ НА ВЫНОСЛИВОСТЬ НА РОЛИКАХ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗУБЧАТОЙ ПЕРЕДАЧЕ

В работе излагаются теоретические положения по испытанию поверхностного износа и разрушения поверхностей зубьев на роликовой машине системы автора, в которой осуществляется полное воспроизведение на поверхностях испытываемых роликов движений рабочих профилей зубьев сопряженных шестерен в зубчатой передаче.

Долговечность и надежная работа современных быстроходных зубчатых передач и особенно передач, изготовленных из незакаленных сталей, обуславливается прочностью поверхностного слоя. В передачах с высокой твердостью рабочих поверхностей, как то: автомобильные и авиационные передачи, контактная выносливость зубьев в ряде случаев также лимитирует минимальные габариты передачи при заданной долговечности. Все это указывает на важность опытного изучения явлений поверхностного разрушения и износа зубьев зубчатых передач.

На сегодняшний день при испытании зубчатых передач на выносливость рабочих поверхностей зубьев пользуются, в основном, двумя методами:

1. Испытание непосредственно на зубчатых парах (замкнутым или разомкнутым способом);

2. Испытание на роликах.

Посредством первого метода можно воспроизвести более точно действительные условия работы зубчатой передачи, но он весьма длителен и требует значительных затрат.

Наиболее эффективным является метод изучения явлений износа и разрушения рабочих поверхностей зубьев на роликах.

На существующих роликовых машинах (Амслера) (Л. 4), РМ-5-ЦНИИТМАШ (Л. 1), КМ-ИМАШ АН СССР, машине НАТИ (Л. 2) осуществляется либо чистое качение роликов, либо качение со скольжением. В последнем случае относительные движения поверхностей соприкосновения испытываемых роликов значительно отличаются от движения рабочих поверхностей зацепляющихся зубьев и, следовательно, не могут имитировать сложные движения профилей зубьев друг относительно друга.

Ниже приводятся теоретические положения по испытанию поверхностного износа и разрушения поверхностей зубьев, а также описывается роликовая машина системы автора, в которой осуществляется полное воспроизведение на поверхностях испытываемых роликов движений рабочих профилей зубьев сопряженных шестерен в зубчатой передаче.

1. ПРИНЦИП ДЕЙСТВИЯ РОЛИКОВОЙ МАШИНЫ

Кинематическая схема механизма испытательной роликовой машины показана на рис. 1.

Ведущий вал 9, получающий движения от регулируемого электродвигателя постоянного тока, приводит в движение водило 4, несущее ось 5.

На этой оси с одной стороны жестко закреплен сателлит 3, обкатывающийся по неподвижной шестерне внутреннего зацепления, а с другой —

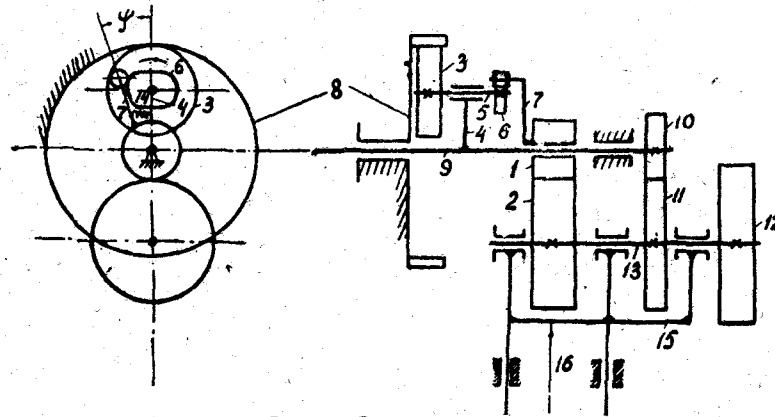


Рис. 1. Схема установки.

кулачок 6; последний воздействует на рычаг 7, жестко соединенный с испытуемым роликом 1. Для силового замыкания рычага 7 и кулачка 6 служит пружина 14. Второй ролик 2 приводится во вращательное движение через пару зубчатых колес 10 и 11, имеющих диаметры начальных окружностей, соответственно равные диаметрам роликов. Зубчатое колесо 10 заклинено на правом конце ведущего вала 9, а колесо 11 вместе с маховиком 12 жестко насажены на ось 13 вращения ролика 2. Ось 13 монтируется в подшипниках корпуса 15, на который действует прижимное устройство 16 и который может перемещаться по направляющим в радиальном направлении.

Если бы кулачок 6 имел постоянный радиус-вектор, то очевидно, что при вращении водила 4 рычаг 7 перемещался бы совместно с водилом. При этом угол между водилом и рычагом 7 оставался бы неизменным, и следовательно, наблюдалось бы чистое качение роликов. В действительности, радиус-вектор кулачка является величиной переменной, поэтому при движении водила рычаг 7, а следовательно, и ролик 1, кроме движения совместно с водилом, будет иметь движение относительно водила. Вращение рычага 7 и ролика 1 совместно с водилом, как уже указывалось, приведет к чистому качению роликов, а движение рычага и ролика относительно водила вызывает скольжение на поверхностях соприкосновения роликов. Таким образом, в результате получится качение роликов со скольжением. Придав кулачку определенный профиль, можно посредством описанного механизма воспроизвести, имитировать на поверхностях испытуемых роликов условия работы профилей зацепляющихся зубьев зубчатых механизмов.

Вследствие того, что скорость скольжения между роликами, при имитации зубчатого зацепления меняет свое направление, будет меняться и

направление момента сил трения, действующего на ролик 9. Последнее обстоятельство, при наличии некоторого люфта в зубчатой передаче 10—11, может привести в колебательное движение ролик 9. Для устранения этого явления, т. е. для придания ролику 9 равномерного вращения служит маховик 12.

2. Теоретические обоснования

Воспроизведем на роликах движение профилей зубьев, находящихся в зацеплении зубчатых колес 1 и 2 (рис. 2), вращающихся вокруг центров O_1 и O_2 . Предположим, что зубья колес 1 и 2 касаются в точке M .

Обозначим V — окружная скорость на делительной окружности.

V_{κ_1} — скорость качения профиля зуба колеса 1 относительно профиля зуба колеса 2.

V_{κ_2} — скорость качения профиля зуба колеса 2 по профилю зуба колеса 1;

V_c — скорость скольжения между профилями зубьев;

R_1, R_2, R_1', R_2' — радиусы начальных окружностей и радиусы окружностей выступов зубчатых колес;

r_1, r_2, d_1 и d_2 — радиусы и диаметры испытываемых роликов 1 и 2 (рис. 1).

ψ — угол поворота ролика относительно водила 4;

ψ' — угол поворота кулачка относительно водила.

Скорость V_1 точки M зубчатого колеса 1 равна

$$V_1 = V \frac{O_1 M}{R_1}.$$

Из треугольника $O_1 A M$ запишем:

$$O_1 M = \frac{A O_1}{\cos \varphi} = \frac{R_1 \cos \alpha}{\cos \varphi}$$

и

$$V_1 = V \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi}. \quad (1)$$

Скорость качения V_{κ_1} профиля зуба колеса 1 определится (рис. 2)

$$V_{\kappa_1} = V_1 \sin \varphi$$

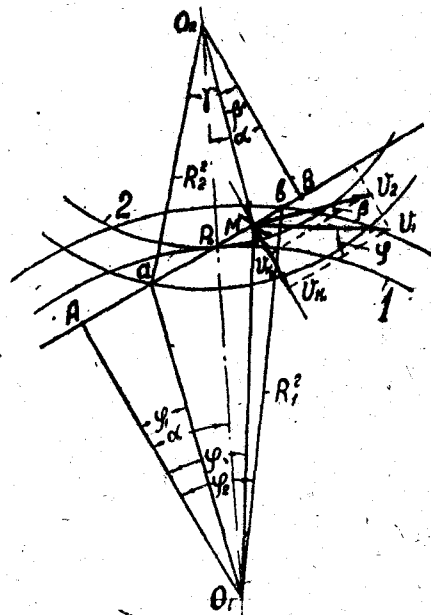


Рис. 2. Схема скоростей в точке соприкосновения двух сопряженных профилей.

или подставляя из (1)

$$V_{\kappa_1} = V \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

Аналогично определим:

$$V_{\kappa_2} = V \cos \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

Если скорости V_{κ_1} и V_{κ_2} направлены в одну сторону (как показано на рис. 2), то скорость скольжения между профилями найдется

$$V_c = V_{\kappa_1} - V_{\kappa_2} = V \cos \alpha (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \beta). \quad (2)$$

Если же скорости противоположны, необходимо знак минус в этом выражении изменить на плюс.

В полюсе зацепления P , $\varphi = \beta = \alpha$, $V_c = 0$ и

$$V_{\kappa_1} = V_{\kappa_2} = V \sin \alpha.$$

Примем $V_{\kappa_2} = V \sin \alpha = \text{const}$, тогда, на основании (2), получим:

$$V_{\kappa_1} = V \sin \alpha + V_c. \quad (3)$$

Таким образом, скорость скольжения V_c между сопрягаемыми профилями можно воспроизвести на двух катящихся роликах (рис. 3), имеющих скорости качения V_{κ_1} и V_{κ_2} .

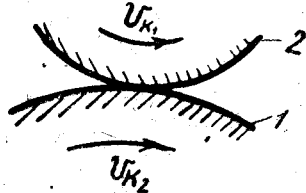


Рис. 3. Схема иммитации зубчатого зацепления на роликах.

В испытательной установке рис. 1 ролик 2 будем вращать с постоянной скоростью V_{κ_2} .

Движение же ролика 1 будем осуществлять как сумму двух движений: вращательного вместе с водилом 4 с постоянной скоростью $V \sin \alpha$ и колебательного — относительного со скоростью V_c .

Так как относительное движение ролика осуществляется посредством кулачкового механизма, то необходимо профиль кулачка построить в соответствии с законом изменения скорости скольжения.

3. Определение закона $\psi = f(\varphi')$ для построения профиля кулачка

Чтобы более наглядно представить движение ролика 1 относительно водила воспользуемся методом обратимости движения. Для этого всей системе, включающей звенья 1 — 3 — 4 — 5 — 6 — 7 — 8 — 10, сообщим угловую скорость ω_4 , равную скорости водила 4, но направленную в противоположную сторону. Тогда водило как бы остановится. Кулачок будет вращаться вокруг своей оси со скоростью ω_{κ} , равной

$$\omega_{\kappa} = \omega_4 i_{3-8}.$$

Так как

$$\omega_4 = \frac{V \sin \alpha}{r_1},$$

то получим:

$$\omega_{\kappa} = \frac{V i_{3-8} \sin \alpha}{r_1}. \quad (4)$$

Как известно, скорость скольжения профилей зубьев определится формулой:

$$V_c = V(P_0 M) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (5)$$

где $P_0 M$ — расстояние от полюса до точки соприкосновения профилей зубьев (рис. 2).

Величина $P_0 M$, в соответствии с обозначениями на рис. 2, может быть выражена

$$P_0 M = A M - A P_0 = R_1 \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi - R_1 \sin \alpha$$

Подставляя значение $P_0 M$ в (5), получим:

$$V_c = V \cos \alpha (1 + i_{2-1}) (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha). \quad (6)$$

Ранее было указано, что ролик 1 в своем относительном движении будет воспроизводить скорость скольжения, поэтому можно записать:

$$V_c = \frac{ds}{dt} = \frac{r_1 d\psi}{dt}, \quad (7)$$

где S — путь скольжения ролика 1 относительно ролика 2,
 ψ — угол поворота ролика 1, соответствующий пути S .

Разделив и умножив выражение (7) на $d\varphi$ и подставив значение V_c из (6), получим:

$$\frac{r_1 d\psi d\varphi}{d\varphi dt} = V \cos \alpha (1 + i_{2-1}) (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha).$$

Так как $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1$, то можно записать:

$$d\psi = \frac{R_1 \cos \alpha}{r_1} (1 + i_{2-1}) (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha) d\varphi.$$

Обозначим постоянную

$$B = \frac{R_1}{r_1} \cos \alpha (1 + i_{2-1}),$$

тогда будем иметь

$$d\psi = B \operatorname{tg} \varphi d\varphi - B \operatorname{tg} \alpha d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, получим:

$$\psi = B \int \operatorname{tg} \varphi d\varphi - B \operatorname{tg} \alpha \int d\varphi + C.$$

или

$$\psi = -B \ln \cos \varphi - B \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi + C. \quad (8)$$

Постоянную интегрирования C определим из условий:

$$\psi = 0 \quad \varphi = \alpha.$$

При этом

$$C = B \ln \cos \alpha + B \operatorname{tg} \alpha.$$

Подставляя это значение C в (8), получим

$$\psi = B \left[\ln \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} + (\alpha - \varphi) \operatorname{tg} \alpha \right].$$

Выражая натуральные логарифмы десятичными и подставляя в эту формулу значение B , запишем зависимость угла поворота ψ рычага 4 в функции угла поворота φ зубчатого колеса 1

$$\psi = \frac{R_1}{r_1} \cos \alpha (1 + i_{2-1}) \left[2,3 \lg \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} + (\alpha - \varphi) \lg \alpha \right]. \quad (9)$$

Для $\alpha = 20^\circ$ эта формула примет вид:

$$\psi = \frac{0,34 R_1}{r_1} (1 + i_{2-1}) (6,35 \lg \frac{0,94}{\cos \varphi} - \varphi + 0,35). \quad (10)$$

Процесс зацепления пары сопряженных зубцов начинается (рис. 2) тогда, когда угол поворота шестерни 1 $\varphi = \varphi_1$, и заканчивается при $\varphi = \varphi_2$, т. е. зацепление осуществляется в диапазоне изменения угла φ от φ_1 до φ_2 .

Чтобы определить угол φ_1 рассмотрим треугольник AO_1a , из которого следует:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{Aa}{R_1 \cos \alpha}. \quad (11)$$

Величина Aa равна

$$Aa = AB - Ba.$$

Так как

$$AB = (R_1 + R_2) \sin \alpha, \quad Ba = R_2 \cos \alpha \operatorname{tg} \gamma, \quad \cos \gamma = \frac{R_2 \cos \alpha}{R_2^2},$$

то получим

$$Aa = (R_1 + R_2) \sin \alpha - R_2 \cos \alpha \operatorname{tg} \left[\arccos \left(\frac{R_2 \cos \alpha}{R_2^2} \right) \right].$$

Подставляя значение Aa в формулу (11), будем иметь для стандартных зубьев:

$$\varphi_1 = \arccos \left\{ (1 + i_{1-2}) \operatorname{tg} \alpha - i_{1-2} \operatorname{tg} \left[\arccos \left(\frac{Z_2 \cos \alpha}{Z_2 + 2} \right) \right] \right\}, \quad (12)$$

где Z_2 — число зубьев шестерни 2.

Для $\alpha = 20^\circ$.

$$\varphi_1 = \arccos \left\{ 0,364 (1 + i_{1-2}) - i_{1-2} \operatorname{tg} \left[\arccos \left(\frac{0,94 Z_2}{Z_2 + 2} \right) \right] \right\} \quad (13)$$

Из треугольника AO_1b следует:

$$\cos \varphi_2 = \frac{R_1 \cos \alpha}{R_1^2}$$

или

$$\varphi_2 = \arccos \left(\frac{Z_1 \cos \alpha}{Z_1 + 2} \right). \quad (14)$$

Для $\alpha = 20^\circ$

$$\varphi_2 = \arccos \left(\frac{0,94 Z_1}{Z_1 + 2} \right) \quad (15)$$

где Z_1 — число зубьев шестерни 1.

Учитывая, что угловая скорость ω_k кулачка постоянна, а также постоянна угловая скорость ω_1 зубчатого колеса 1, можно устано-

вить зависимость между углом поворота φ' кулачка 6 и углом поворота φ зубчатого колеса 1. Действительно

$$\frac{\varphi}{\omega_1} = \frac{\varphi'}{\omega_k}$$

или, принимая во внимание выражение (4), получим:

$$\varphi = \frac{r_1}{R_1 i_{3-8} \sin \alpha} \varphi' = K \varphi', \quad (16)$$

где:

$$K = \frac{r_1}{R_1 i_{3-8} \sin \alpha}.$$

Подставляя значение φ из (16) в формулы (9), (10), (12), (13), (14), (15), будем иметь зависимости для построения кулачка:

$$\psi = \frac{R_1}{r_1} (1 + i_{2-1}) \cos \alpha \left(2,3 \lg \frac{\cos \alpha}{\cos K \varphi'} + (\alpha - K \varphi') \operatorname{tg} \alpha \right) \quad (17)$$

$$\varphi'_1 = \frac{1}{K} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ (1 + i_{12}) \operatorname{tg} \alpha - i_{1-2} \operatorname{tg} \left[\operatorname{arc} \cos \left(\frac{Z_2 \cos \alpha}{Z_2 + 2} \right) \right] \right\} \quad (18)$$

$$\varphi'_2 = \frac{1}{K} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{Z_1 \cos \alpha}{Z_1 + 2} \right). \quad (19)$$

Для $\alpha = 20^\circ$.

$$\psi = \frac{0,34 R_1}{r_1} (1 + i_{2-1}) \left(6,35 \lg \frac{0,94}{\cos K \varphi'} + 0,35 - K \varphi' \right) \quad (20)$$

$$\varphi'_1 = \frac{0,34 R_1 i_{3-8}}{r_1} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left\{ 0,364 (1 + i_{1-2}) - i_{1-2} \operatorname{tg} \left[\operatorname{arc} \cos \left(\frac{0,94 Z_2}{Z_2 + 2} \right) \right] \right\} \quad (21)$$

$$\varphi'_2 = \frac{0,34 R_1 i_{3-8}}{r_1} \operatorname{arc} \cos \left(\frac{0,94 Z_1}{Z_1 + 2} \right), \quad (22)$$

где φ'_1 и φ'_2 — значения углов поворота кулачка, соответствующие крайним положениям рычага 7 (рис. 1) кулачкового механизма.

4. Определение диаметров испытываемых роликов

Выносливость рабочих поверхностей зубьев, прежде всего, зависит от контактных напряжений сжатия, которые в общем виде можно определить:

$$\sigma_d = \frac{C}{\sqrt{\rho}}.$$

Здесь C представляет некоторую постоянную величину за весь период зацепления. C зависит от передаваемого зубчатым механизмом крутящего момента, радиусов начальных окружностей, длины зуба и угла зацепления.

ρ — величина приведенного радиуса кривизны, которая равна

$$\rho = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}, \quad (23)$$

где ρ_1 и ρ_2 — радиусы кривизны профилей зубьев ведущей и ведомой шестерен в точке зацепления. Эти радиусы кривизны изменяются

в процессе зацепления. Сумма радиусов кривизны при заданном межцентровом расстоянии и определенном угле зацепления остается постоянной, она равна

$$\rho_1 + \rho_2 = A \sin \alpha,$$

где $A = R_1 + R_2$ — межцентровое расстояние.

Это выражение можно записать:

$$\rho_2 = A \sin \alpha - \rho_1. \quad (24)$$

Из треугольника AMO_1 (рис. 2) получим:

$$\rho_1 = AM = R_1 \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi. \quad (25)$$

Подставляя (24), (25) в (23), будем иметь:

$$\rho = R_1 \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi - \frac{R_1^2 \cos \alpha}{A \operatorname{tg} \alpha} \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Обозначим постоянные

$$\beta_1 = R_1 \cos \alpha, \quad \beta_2 = \frac{R_1^2 \cos \alpha}{A \operatorname{tg} \alpha}.$$

Тогда получим:

$$\rho = \beta_1 \operatorname{tg} \varphi - \beta_2 \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (26)$$

Так как пределы изменения угла φ в процессе зацепления известны, они, как ранее было показано, суть: от φ_1 до φ_2 , то средняя величина $\rho_{\text{ср}}$ приведенного радиуса кривизны определится:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (\beta_1 \operatorname{tg} \varphi - \beta_2 \operatorname{tg}^2 \varphi) d\varphi.$$

Интегрируя и заменяя натуральные логарифмы десятичными, получим:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{1}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[2,3 \beta_1 \lg \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} + \beta_2 (\operatorname{inv} \varphi_1 - \operatorname{inv} \varphi_2) \right], \quad (27)$$

для $\alpha = 20^\circ$ будем иметь:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{R_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \left[2,16 \lg \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} + \frac{2,65}{1 + i_{1-2}} (\operatorname{inv} \varphi_1 - \operatorname{inv} \varphi_2) \right]. \quad (28)$$

Выберем диаметры испытуемых роликов так, чтобы приведенный радиус кривизны роликов был бы равен среднему приведенному радиусу кривизны рабочих профилей зубчатых колес, т. е.

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{d_1 d_2}{2(d_1 + d_2)}.$$

Если принять

$$d_2 = i_{1-2} d_1, \quad (29)$$

то

$$d_1 = \frac{2 \rho_{\text{ср}} (1 + i_{1-2})}{i_{1-2}}. \quad (30)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Трубин Г. К., Контактная усталость зубьев прямозубых шестерен, Машгиз, 1950.
 2. Осипян А. В., Новый метод экспериментального исследования рабочих поверхностей сопряженных элементов машин при некоторых видах их относительного перемещения, НАМИ. Выпуск 48, 1947.
 3. Меррит Х., Зубчатые передачи. Машгиз, 1947.
 4. Конвисаров Д., В., Износ металлов, ОНТИ, 1938.
-

Г. И. КОГАН—ВОЛЬМАН

К ВОПРОСУ ВЫБОРА И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА НАВИВКИ ГИБКИХ ПРОВОЛОЧНЫХ ВАЛОВ

В данной работе рассматриваются вопросы выбора показателей качества навивки гибких проволочных валов. Предлагается суммарно оценивать качество навивки по углу закручивания вала. Описывается конструкция специального стенда для статических испытаний гибких валов.

Качество гибких проволочных валов зависит от их конструкции, материала проволок и процесса навивки. Контроль за соблюдением нормативов по конструкции вала и материалу проволок не представляет никаких трудностей. В противоположность этому выбор режимов навивки и их соблюдение сопряжены со значительными затруднениями, из-за которых не представлялось возможным ввести действенный контроль, качества навивки. А между тем различия в свойствах однотипных гибких валов, вызываемые разницей в качестве навивки, весьма значительны и часто вызывают резкие колебания к. п. д., рабочей температуры и долговечности.

Таким образом, вопрос о выборе и определении показателей качества навивки гибких валов является вопросом о заводском контроле качества валов.

Выбор материалов и конструкции вала и их проверка могут быть произведены путем лабораторных стендовых или натурных испытаний, между тем как качество навивки должно непрерывно контролироваться, т. к. оно подвержено значительным колебаниям.

Качество навивки определяется, в основном, продольной плотностью навивки вала (плотностью прилегания витка к витку), поперечной плотностью навивки вала (степенью плотности прилегания слоя к слою) и прямолинейностью оси ненагруженного вала.

Влияние этих показателей на качество гибкого вала не одинаково, так же как и неодинаковы трудности, связанные с их контролем.

Как известно, качество гибкого вала определяется гармоническим сочетанием крутильной жесткости и устойчивости с минимальной изгибной жесткостью.

Дефекты, связанные с продольной плотностью навивки и правильной укладкой проволок в слое, легко обнаруживаются и устраняются в процессе навивки.

Что же касается контроля качества поперечной плотности навивки, то до настоящего времени он, по существу, не производился.

Исследования, произведенные в лаборатории деталей машин нашего института, показали, что поперечная плотность навивки является основным фактором, с помощью которого можно существенно менять крутильную жесткость вала при почти неизменной изгибной жесткости.

Теоретические и экспериментальные исследования Н. А. Чернышева и автора статьи показали, что крутильная жесткость гибкого вала в значительной степени определяется контактными силами, возникающими между попарно контактирующими слоями вала. При наличии после навивки плотного прилегания слоев друг к другу без нажатия, контактные силы возникают только после приложения к валу крутящего момента и растут по мере его увеличения. Если же слои прижимаются друг к другу во время навивки, то между ними возникают контактные силы и без приложения к валу крутящего момента. Таким образом, при приложении к валу крутящего момента — рост контактных сил будет происходить от некоторой их начальной величины, определяемой плотностью навивки. При этом, в силу сказанного выше, увеличивается крутильная жесткость вала.

Получение некоторой начальной величины контактной силы может быть осуществлено путем навивки проволок под натяжением. Регулировка натяжения проволок производится совершенно субъективно и ничем не контролируется, что приводит к резким колебаниям качества навиваемых валов. Отсюда вытекает настоятельная необходимость в контроле поперечной плотности навивки путем испытаний вала на скручивание. Результатом проверки явится выбраковка части валов и разбивка остальных на качественные категории, в зависимости от эксплуатационных требований.

Безусловно описанное решение является полумерой. Должен быть решен вопрос о создании машин, позволяющих вести навивку с регулируемым натяжением проволок. Этим будет, одновременно, облегчено решение вопроса о прямолинейности оси вала и повышении его устойчивости благодаря равномерному натяжению всех проволок слоя.

Однако и при наличии таких машин не отпадет необходимость в выборе рациональных режимов навивки и контроле поперечной плотности навивки готовых валов.

Наиболее удобной характеристикой поперечной плотности навивки при соблюдении прочих, отмеченных выше, показателей будет являться угол закручивания гибкого вала, отнесенный к 1 м длины, 1 кгс м нагрузки и измеряемый в градусах:

$$\varphi = \frac{\text{градусов}}{1 \text{ м } 1 \text{ кгс м}}$$

Для определения этого угла, а также для испытаний вала на устойчивость предназначен стенд СС-4 (рис. 1).

Благодаря наличию двух отдельных постаментов 1 и 3 и съемных кронштейнов 5 и 6 арматуры 7 и 8 на стенде могут испытываться во всевозможных положениях валы различных длин и диаметров (до 30 мм) как с броней, так и без брони.

При испытании валов с наконечниками на резьбовые концы наконечников навинчиваются разрезные гайки, зажимаемые в цангах передней и задней бабок. При испытании валов в броне 14 арматура брони 7 и 8 зажимается в кронштейнах 5 и 6.

Большим преимуществом стенда является возможность испытания на нем валов, идущих метражем. В этом случае валы проходят через полые шпиндели 12 и 13 бабок и зажимаются цангами. Стенд снабжен комплектами цанг и промежуточных втулок для зажима валов и арматуры брони во всем диапазоне диаметров.

Крутящий момент создается червячным редуктором $i=30$, приводимым во вращение вручную. Отсчет угла скручивания производится по лимбам, насаженным на валы червяка и червячного колеса. Лимбы сво-

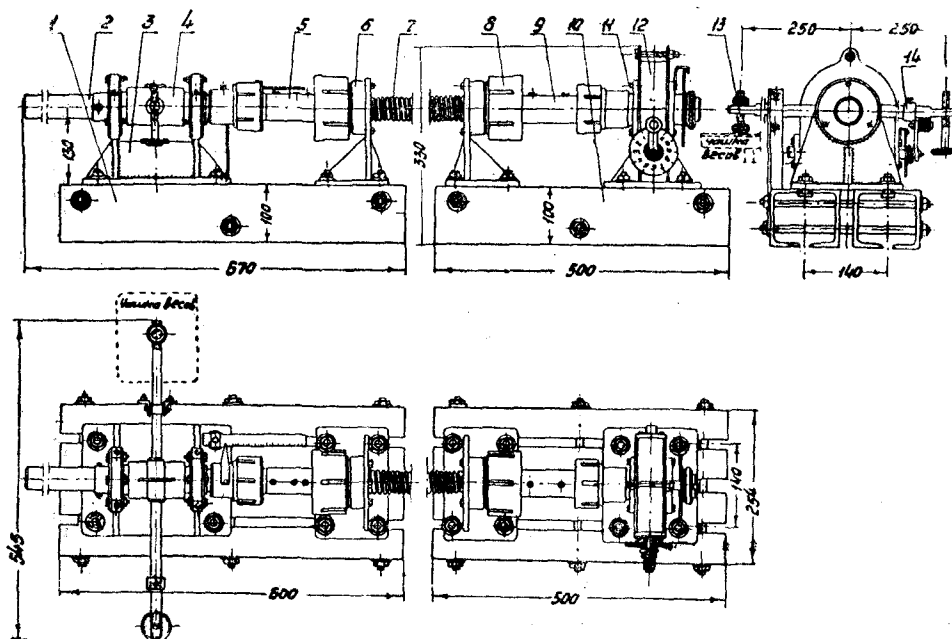


Рис. 1. Стенд СС-4 для статических испытаний гибких валов.

одно поворачиваются для установки на «0» и стопорятся. Деления нанесены в обе стороны для возможности испытания валов правой и левой навивки.

От шпинделя задней бабки, с помощью двух направляющих шпонок, момент передается втулке 9, несущей на себе нажимный рычаг. Такое устройство позволяет определять линейные деформации вала при закручивании.

Статическая балансировка втулки задней бабки с рычагами осуществляется с помощью специального противовеса 11.

От нажимного рычага усилие передается чашке весов через нажимный винт 10, позволяющий устанавливать рычаг в горизонтальное положение при соприкосновении сферического конца винта с чашкой весов, нагруженной предварительно гирей в 500 г.

При этом весы используются в качестве нулевого прибора. Усилие определяется по весу гирь, возвращающих стрелку на деление, соответствующее 500 г. Это деление выбрано в качестве нулевого, так как обеспечивает равный размах стрелки весов в обе стороны. Крутящий момент определяется по соотношению:

$$M = P \cdot l,$$

где M — крутящий момент в кгсм , P — вес гирь в кг , возвращающих стрелку весов в «нулевое положение»,

l — длина плеча, равная 25 см .

В диапазоне рабочих нагрузок и размеров валов силовых передач относительная погрешность в определении моментов и углов скручивания будет обычно меньше 1%.

В табл. 1 приведены контрольные углы закручивания для нескольких наиболее распространенных конструкций валов.

Таблица 1

Тип вала	Диаметр вала мм	градусов
		на 1 м 1 кгсм
B1	10	1°30—2°30
B1	12	1°35—2°
B2	8,3	0°30—0°36
B2	12	0°17—0°20

Значительный разброс жесткостных характеристик валов объясняется несовершенством технологического процесса навивки валов на современном оборудовании. Во всяком случае, большие значения углов закручивания можно, в настоящее время, принять в качестве предельных значений для выбраковки валов.

ВЫВОДЫ

1. Основным показателем качества навивки гибких валов является угол закручивания, отнесенный к 1 м длины вала и 1 кгсм крутящего момента. Этот угол и должен быть принят в качестве критерия при цеховых приемочных испытаниях.

2. Стенд СС-4 позволяет определять угол скручивания валов различных длин, диаметров и конструкций при различных формах их осей, в броне и без брони, с наконечниками и метражем.

3. Простота стенда и точность делают возможным его применение как для заводских лабораторных испытаний, так и для цеховых приемочных.

Г. И. КОГАН-ВОЛЬМАН

МЕТОД ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ИЗНОСОСТОЙКОСТИ ГИБКИХ ПРОВОЛОЧНЫХ ВАЛОВ

В статье излагаются методы экспериментального исследования и оценки «внешнего» и «внутреннего» износа гибких проволочных валов. «Внутренний» износ предлагается оценивать по изменению угла закручивания. Оценку «внешнего» износа намечается производить путем измерения ширины надреза, нанесенного на проволоку внешнего слоя.

Гибкий проволочный вал является основной деталью привода с гибким валом, передающей нагрузку. Вместе с тем он, в наибольшей мере, подвержен изнашиванию в ходе эксплуатации.

Следует различать два принципиально различных вида износа гибких валов, которые условно могут быть названы «внутренним» и «внешним» износом.

Под внутренним износом подразумевается истирание проволок отдельных слоев вала в точках их соприкосновения. Опыты (Л. 1, 2) показали, что даже крутящие моменты, в десятки раз превышающие номинальные, не вызывают появления пластически деформированных площадок в точках соприкосновения проволок слоев. Непосредственные измерения износа невозможны. Однако внутренний износ изменяет характер взаимодействия проволок соседних слоев гибкого вала и вызывает, благодаря этому, снижение крутильной жесткости вала. Вследствие снижения крутильной жесткости ухудшаются условия работы вала в приводе и, как правило, уменьшается срок службы привода. Особенно вредно отражается внутренний износ вала на работе приборных приводов и приводов управления. В этих приводах внутренний износ вала является часто причиной неустойчивых показаний приборов, нарушения правильности регулировок и даже скручивания вала из-за потери устойчивости и затирания в броне.

Наиболее ярким косвенным показателем внутреннего износа является крутильная жесткость вала. Суждение о характере внутреннего износа может быть составлено путем измерения угла закручивания вала через определенные промежутки времени эксплуатации или обкатки на стенде.

Имеются специальные стенды, на которых производятся испытания приборных гибких валов на износ путем обкатки их под нагрузкой. Нагрузка создается специальными нагрузочными устройствами, либо подключением приборов, в комплекте с которыми гибкие валы эксплуатируются. Измерение угла закручивания производится на специальном при-

способлении, для чего гибкий вал периодически снимается со стенда. По результатам испытаний строится ряд кривых:

$$\varphi^{\circ} = f(M_k), \quad (1)$$

где φ° — угол закручивания вала,
 M_k — крутящий момент.

Вторичной обработкой кривых $\varphi^{\circ} = f(M_k)$ можно получить зависимость:

$$\varphi^{\circ} M_k = \psi(N_u), \quad (2)$$

где N_u — число циклов обкатки вала.

Зависимость (2) строится при фиксированном значении крутящего момента M_k , соответствующем среднему эксплуатационному крутящему моменту. Эта зависимость и является характеристикой внутреннего износа вала.

В качестве коэффициента относительной износостойкости (внутренней) двух валов — K^{1-11} может быть принята величина, обратная отношению разностей между углами закручивания валов после и до обкатки в течение эксплуатационного числа циклов — N_u при средней эксплуатационной нагрузке.

$$K^{1-11} = \frac{\varphi'' - \varphi_0''}{\varphi' - \varphi_0'}, \quad (3)$$

где φ_0' , φ_0'' — углы закручивания первого и второго валов, соответственно, до обкатки,

φ' , φ'' — углы закручивания первого и второго валов, соответственно, после обкатки.

Особо оговаривается число циклов обкатки и величина момента, при котором производится замер угла закручивания.

Исследование внутреннего износа гибких валов силовых приводов производится точно таким же образом.

Периодический замер угла закручивания может производиться на стенде СС-4 (Л. 3). Обкатку валов удобно и экономично проводить на стенде СД-1, работа которого основана на принципе одновременного испытания двух гибких валов методом замкнутого силового потока (Л. 4). В принципе для этого может быть использован любой стенд для обкатки гибких валов.

Менее экономичен, но наиболее удобен при проведении научных исследований стенд СВ-1, работающий по принципу торможения. Преимуществом этого стенда является возможность замера угла закручивания в любой момент обкатки вала без снятия его со стенда. Замер угла закручивания вала производится при помощи двух электроимпульсных датчиков, установленных на концах вала (Л. 5).

Под внешним износом гибкого вала подразумевается изменение геометрических размеров проволок внешнего слоя в результате их изнашивания.

Абсолютным радиальным износом можно назвать величину уменьшения диаметра проволок внешнего слоя. Если проволоки внешнего слоя изнашиваются более, чем наполовину, взаимодействие соседних витков проволоки нарушается и вал теряет свои качества. Кроме того, столь резкое уменьшение сечения проволок при переменных нагрузках и возмож-

ных перегрузках гибких валов часто влечет за собой разрыв проволок и выход из строя привода.

Наиболее важным и наименее разработанным вопросом, связанным с исследованиями внешнего износа гибких валов, является вопрос об определении величины абсолютного износа. Наиболее эффективным представляется использование метода надрезов (Л. 6), разработанного применительно к гибким валам.

Определение величины абсолютного износа производится путем измерения изменения ширины надреза, предварительно нанесенного на проволоку. Для этого гибкий валик зажимается в специальном приспособлении, которое устанавливается на столе универсально-фрезерного станка. Стол поворачивается таким образом, чтобы ось фрезы располагалась по отношению к оси вала под углом $90^\circ - \alpha^\circ$, равным углу наклона витков проволочных спиралей внешнего слоя вала (рис. 1).

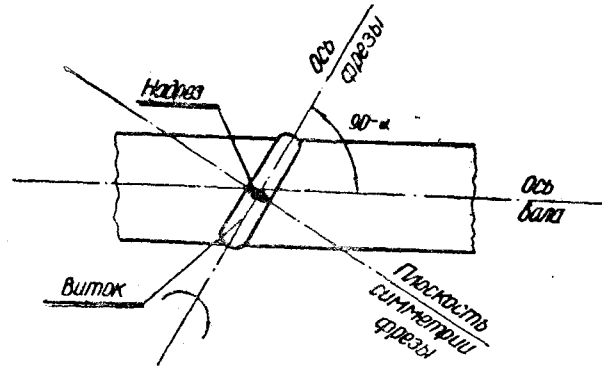


Рис. 1. Схема установки для производства надрезов на проволоках гибкого вала.

На проволоке делается надрез в форме равностороннего треугольника (рис. 2) фрезой малого диаметра. Увеличение диаметра фрезы нежелательно из-за повреждения проволок соседних витков. Так как радиус кривизны витка велик по сравнению с поперечными размерами проволоки, то можно пренебречь кривизной витка и считать, что надрез сделан на распрямленной проволоке. Как показали подсчеты, ошибка в определении величины износа будет, при этом, очень малой.

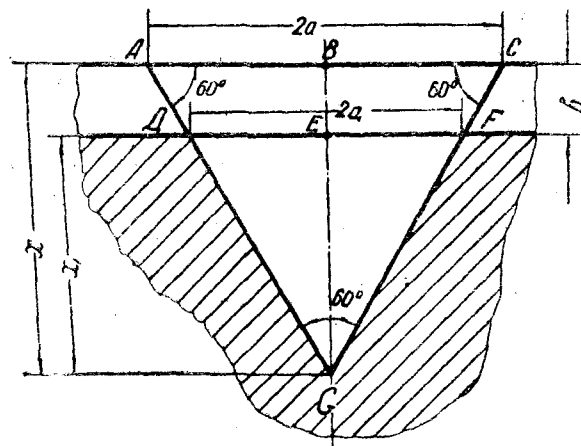


Рис. 2. Форма надреза проволоки гибкого вала.

Будем считать, что $AC = 2a$ (рис. 2) является шириной надреза, измеряемой на неизношенной проволоке. В соответствии с профилем фрезы, при помощи которой был сделан надрез $AC = AG = GC$.

Примем $BG = x$.

Размеры надреза после некоторого промежутка работы вала будут:

$$DF = DG = GC = 2a_1; \quad EG = x_1; \quad BE = b,$$

где b —абсолютный радиальный износ проволоки внешнего слоя.

$$b = BG - EG = x - x_1; \quad (4)$$

$$x_1 = \frac{a_1}{a} x;$$

$$x = 2a \cos 30^\circ.$$

Подставив значения x_1 и x в выражение (4), получим:

$$b = 2a \cos 30^\circ - \frac{a_1}{a} 2a \cdot \cos 30^\circ,$$

или окончательно, применительно к измеряемым величинам:

$$b = 2a \cdot 0,866 \left(1 - \frac{2a_1}{2a}\right). \quad (5)$$

Величины $2a$ и $2a_1$ измеряются с помощью микроизмерительного микроскопа (для этого может быть использован также микроскоп микроинденгера).

Надрезы делаются в ряде мест, равномерно распределенных вдоль участка вала, износ которого исследуется. Учитывая неизбежные различия в величине натяжения проволок при навивке вала, необходимо распределять надрезы равномерно между проволоками пряди, составляющей внешний слой. Кроме того, необходимо следить за тем, чтобы валы, подвергающиеся испытаниям на износ, не имели заметной разницы между средними радиусами спиралей внешнего слоя.

Величина абсолютного радиального износа для каждой проволоки b_i определяется как среднее арифметическое из всех величин абсолютного радиального износа, определенных на данной проволоке.

Объем изношенного материала на каждой из проволок определяется выражением:

$$V_i = F_i \cdot l_u, \quad (6)$$

где V_i —объем изношенного материала одной проволоки,

F_i —площадь кругового сегмента, образуемого (рис. 3) сечением изношенного материала плоскостью, перпендикулярной оси проволоки.

l_u —длина спирали износа, по которой располагаются сегментные сечения (приблизительно в качестве такой спирали принимается спираль, проходящая через середину основания сегмента—точку x на рис. 3).

Длина спирали l_u равна:

$$l_u = \frac{\pi D_u \kappa}{\cos \alpha}, \quad (7)$$

где D_u —диаметр витков спирали износа,

κ —число ходов спирали на всей длине вала,

α —угол подъема витков спирали износа, приблизительно принимаемый равным углу подъема витков проволоочных спиралей.

$$D_u = 2R + d - 2b, \quad (8)$$

где R —средний радиус витков проволоочных спиралей,

$d = 2r$ —диаметр проволок, образующих внешний слой спиралей вала,

b —в данном случае среднее арифметическое из величин радиального износа (b_i) отдельных проволок верхнего слоя

$$\kappa = \frac{L}{h}, \quad (9)$$

где L —длина вала или изнашивающейся его части,
 h —ход спиралей.

$$h = \frac{n d}{\cos \alpha}, \quad (10)$$

где n —число спиралей (проволок) внешнего слоя.

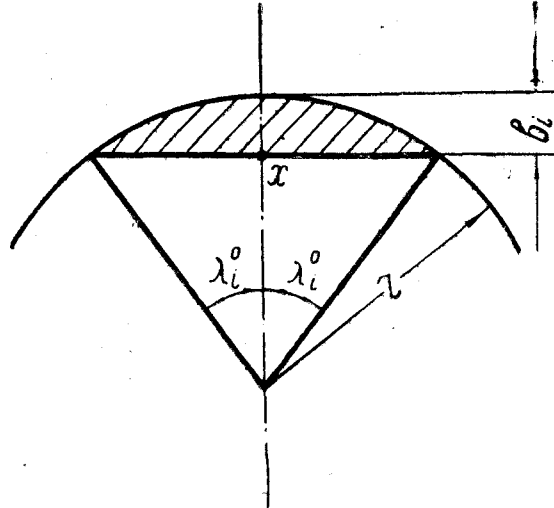


Рис. 3. К определению величины износа материала одной проволоки.

С учетом выражений (8), (9), (10) формула (7) перепишется:

$$l_u = \frac{\pi (2R + d - 2b)L}{n d}. \quad (11)$$

Площадь кругового сегмента в нормальном сечении i -товой проволоки (рис. 3) равна:

$$F_i = \frac{1}{2} r^2 (2\lambda_i - \sin 2\lambda_i). \quad (12)$$

Учитывая, что $\lambda_i = \frac{\pi \lambda_i^\circ}{180^\circ}$, а $\lambda_i^\circ = \arccos \frac{r - b_i}{r}$, получим

$$F_i = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2\pi \lambda_i^\circ}{180^\circ} - \sin \frac{2\pi \lambda_i^\circ}{180^\circ} \right);$$

$$F_i = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2\pi \arccos \frac{r - b_i}{r}}{180^\circ} - \sin \frac{2\pi \arccos \frac{r - b_i}{r}}{180^\circ} \right) \quad (13)$$

Подставив (11) и (13) в формулу (6), получим окончательно:

$$V_i = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2\pi \arccos \frac{r - b_i}{r}}{180^\circ} - \sin \frac{2\pi \arccos \frac{r - b_i}{r}}{180^\circ} \right) \frac{(2\pi R + d - 2b)L}{n d} \quad (14)$$

Общий объем изношенного материала на всех проволоках опре-

деляется как сумма объемов изношенного материала на отдельных проволоках:

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} V_i. \quad (15)$$

В случае достаточно равномерной навивки витков можно значительно сократить расчет, определяя общий объем изношенного материала по формуле (16), получающейся из формулы (15) при замене в ней b_i на $b = (b_1 + b_2 + \dots + b_i) : n$ и умножении числителя на n (число проволок внешнего слоя)

$$V = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{2 \pi \arccos \frac{r-b}{r}}{180^\circ} - \sin \frac{2 \pi \arccos \frac{r-b}{r}}{180^\circ} \right) \frac{\pi (2R + d - 2b) L}{d} \quad (16)$$

Выше обосновывалось, что вал будет полностью изношенным в том случае, если проволоки внешнего слоя изнашиваются на половину их диаметра. Таким образом, объем материала V_u , подлежащего изнашиванию до полного износа вала, составит:

$$V_u = \frac{\pi^2}{4} R d L. \quad (17)$$

Процент изношенности вала ($A\%$) определяется из выражения:

$$A = \frac{V}{V_u} 100\%. \quad (18)$$

В качестве экспериментального коэффициента относительной износостойкости (внешней) двух валов K_{1-2} может быть принята величина, обратная отношению процента изношенности первого вала к проценту изношенности второго вала:

$$K_{1-2} = \frac{A_2\%}{A_1\%}. \quad (19)$$

При этом не учитывается возможная переменная интенсивность изнашивания, что было бы, в данном случае, весьма затруднительным. По этой причине относительная износостойкость валов определяется наиболее точно при испытаниях валов до полного изнашивания. Для сокращения времени испытаний, в этом случае, в смазку добавляется абразивный материал.

Представляют интерес также некоторые особенности организации процесса обкатки валов при исследовании износа.

Наибольшее упрощение и наибольшая точность расчетов, связанных с исследованием износостойкости гибких валов достигаются в том случае, если параметры процесса обкатки одинаковы для всех валов. Такими параметрами являются: длина вала, нагрузка, скорость вращения, очертание оси (желательно иметь постоянный радиус кривизны оси вала по всей его длине), смазка и т. п. Отдельные параметры процесса обкатки могут отличаться друг от друга у различных приводов, но это вводит дополнительные пересчеты и снижает качество результатов испытаний.

Испытания валов разных диаметров могут производиться как при одинаковых, так и при разных нагрузках, принятых для данных валов в качестве эксплуатационных. В последнем случае никакие пересчеты, связанные с разными величинами нагрузок, не производятся.

ЛИТЕРАТУРА

1. НИИАвтоприборов, Исследование гибких валов и разработка конструктивных и технологических мероприятий по улучшению их качества, Отчеты за 1953—1954 гг.
 2. ВНИИСТРОЙДОРМАШ, Исследование гибких валов с целью улучшения их конструкции, Отчет за 1952 год.
 3. Коган-Вольман Г. И., Машина для статических испытаний гибких проволочных валов, ИТЭИН АН СССР, № ПС-55-405, 1955.
 4. Коган-Вольман Г. И., Стенд СД-1 для испытания гибких проволочных валов на износостойкость, ИТЭИН АН СССР, № ПС-55-418, 1955.
 5. Ковалев Л. Г. и Коган-Вольман Г. И., Электроимпульсный метод определения угла скручивания гибкого проволочного вала, Труды Одесского технологического института имени И. В. Сталина, т. VI, 1955.
 6. Хрущов М. М. и Беркович Е. С. Точное определение износа деталей машин, АН СССР, 1953.
-

А. А. ИВАНОВ

РАБОТА АСИНХРОННОГО ГЕНЕРАТОРА С КОНДЕНСАТОРНЫМ ВОЗБУЖДЕНИЕМ ПРИ ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТИ ВРАЩЕНИЯ РОТОРА

В работе рассматривается возможность использования асинхронного генератора с конденсаторным возбуждением при переменной скорости вращения ротора, устанавливаются допустимые пределы изменения скорости его вращения при условии сохранения постоянства напряжения на зажимах статора и указывается на возможность автоматической стабилизации напряжения при данном режиме работы.

Потребность в генераторе переменного тока, работающем при переменной скорости вращения и неизменном напряжении на его зажимах ощущается на небольших тепловых, гидро- и ветроэлектрических станциях, питающих осветительную нагрузку, где первичные приводные двигатели могут заметно изменять свою скорость вращения.

Стремление иметь надежный источник электрической энергии, который мог бы с успехом быть применен в вышеуказанных установках, побуждает использовать для этой цели обычную асинхронную машину трехфазного тока с короткозамкнутым ротором в генераторном режиме с конденсаторным возбуждением (рис. 1,а).

Как известно, такой генератор является самой простой, механически прочной электрической машиной, не имеющей электрических контактов, трения и не требующей за собой почти никакого ухода [Л. 1].

Докомплектрование асинхронного генератора выпрямительным блоком полупроводниковых вентилях (рис. 1,б) позволяет использовать его в качестве источника двойного тока, работающего при переменной скорости вращения, что представляет некоторый интерес для судовых и самолетных установок, нуждающихся как в постоянном, так и в трехфазном токе [Л. 2].

Асинхронный генератор, работающий на нагрузку через выпрямительный блок, может рассматриваться как бесконтактный источник постоянного тока (рис. 1,в), который может быть с успехом использован для зарядки аккумуляторов на транспортных установках, где часто ротор генератора приводится во вращение с переменной скоростью.

Однако значительная зависимость величины напряжения асинхронного генератора с конденсаторным возбуждением от скорости вращения ротора, величины и характера нагрузки, заставляет принимать специаль-

ные меры, обеспечивающие такое автоматическое изменение возбуждения машины при переменной скорости вращения ротора, которое смогло бы обеспечить относительную стабилизацию напряжения на зажимах генератора.

Желая добиться автоматического установления необходимого возбуждения генератора при переменной скорости вращения ротора и неизменном напряжении на зажимах статора, следует вначале установить воз-

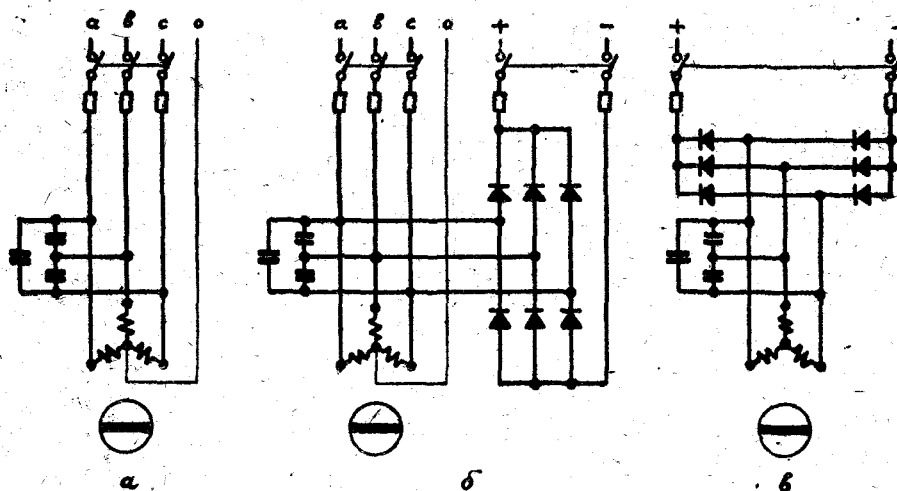


Рис. 1. Схема асинхронного генератора с короткозамкнутым ротором и конденсаторным возбуждением, используемого в качестве источника: а—трехфазного тока; б—двойного тока; в—постоянного тока.

можности обычной асинхронной машины нормального исполнения для использования ее в генераторном режиме при заданных условиях.

Для установления допустимого диапазона изменения скорости вращения ротора при холостом ходе генератора и постоянстве напряжения на его зажимах путем изменения величины параллельно приключенной емкости удобно исходить из магнитной характеристики асинхронной машины $u_0 = F(i_0)$, снятой при номинальной частоте f_n .

Такая магнитная характеристика асинхронной машины может быть получена по данным опытов холостого хода, проведенным при различных напряжениях, причем при желании получить более точные результаты следует ротор асинхронной машины вращать посторонним двигателем строго синхронно с вращающимся магнитным полем статора.

Подобная характеристика для асинхронных машин небольшой мощности представлена, как это принято в относительных единицах, на рис. 2 при номинальной частоте $f_n = 50$ гц.

Пользуясь кривой $u_0 = F(i_0)$, нетрудно установить зависимость полной индуктивности фазы статора L_1 от величины напряжения U_0 , подведенного к его обмоткам.

Так как

$$U_0 = 2\pi f_n L_1 I_0, \quad (1)$$

где f_n — номинальная частота тока статора, гц;
 I_0 — намагничивающий ток статора, а,

то

$$L_1 = \frac{U_0}{2\pi f_n I_0}, \quad (2)$$

или, применяя систему относительных единиц,

$$L_1 = \frac{u_0 U_n}{2\pi f_n i_0 I_n} = \frac{u_0}{i_0} \cdot \frac{U_n}{2\pi f_n I_n}, \quad (3)$$

где u_0, i_0 — напряжение и ток статора в относительных единицах;

U_n, I_n — соответственно номинальные фазные напряжения и ток асинхронной машины, в и а.

Задаваясь различными значениями напряжения u_0 и определяя по кривой рис. 2 отвечающие им токи i_0 , можно для каждой асинхронной машины, характеризуемой номинальными величинами U_n и I_n , дать графическую зависимость $L_1 = F(u_0)$.

Такая зависимость $L_0 = F(u_0)$ приведена на рис. 3 в предположении, что $\frac{U_n}{2\pi f_n I_n} = 1$.

Если отношение $\frac{U_n}{2\pi f_n I_n} = K \neq 1$, то действительное значение полной индуктивности фазы статора L_1 находится из соотношения

$$L_1 = L_0 K, \quad (4)$$

а ее наибольшее значение (рис. 3)

$$L_M = L_{M0} K. \quad (5)$$

Последняя величина L_M представляет собой большой интерес, ибо она входит в выражение, определяющее критическую скорость вращения $n_{кр}$, при которой начинается процесс возбуждения асинхронного генератора [Л. 1].

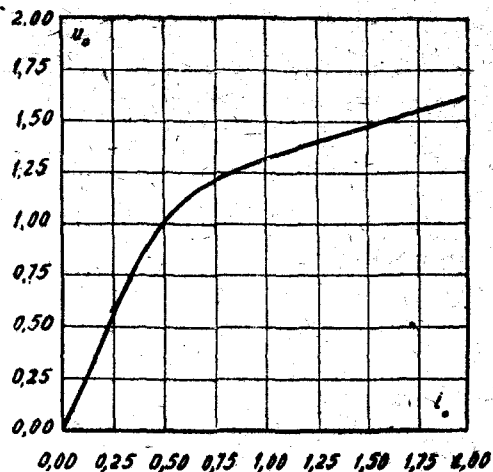


Рис. 2. Магнитная характеристика асинхронных машин нормального исполнения в относительных единицах при частоте $f_n = 50$ гц

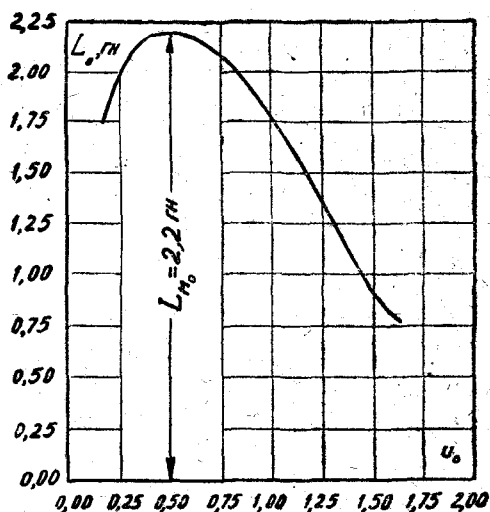


Рис. 3. Изменение полной индуктивности L_0 фазы статора асинхронной машины в зависимости от величины приложенного напряжения u_0 при $\frac{U_n}{2\pi f_n I_n} = 1$.

Величина критической скорости вращения может быть подсчитана как

$$n_{кр} = \frac{30}{\pi p \sqrt{L_M C_\phi}} = \frac{30}{\pi p \sqrt{L_{M_0} C_\phi K}} \quad (6)$$

или в относительных единицах

$$n_0 = \frac{n_{кр}}{n_c} = \frac{30}{\pi p \sqrt{L_{M_0} C_\phi K} \cdot \frac{60 f_K}{p}} = \frac{1}{2 \pi f_K \sqrt{L_{M_0} C_\phi K}}, \quad (7)$$

где n_c — номинальная синхронная скорость вращения магнитного поля статора, об/мин;

p — число пар полюсов асинхронной машины;

C_ϕ — величина фазной возбуждающей емкости, соединенной звездой, ф.

Из уравнения (7) видно, что для асинхронной машины с определенными параметрами, характеризуемыми коэффициентом K , критическая скорость вращения ротора n_0 определяется величиной возбуждающей емкости C_ϕ .

При малых значениях емкости C_ϕ процесс возбуждения будет начинаться только при достаточно высокой скорости вращения ротора n_2 , а, следовательно, частота генерируемых колебаний

$$f \approx \frac{p n_2}{60} \quad (8)$$

будет велика.

Большие емкости C_ϕ обеспечат возникновение этого режима при сравнительно небольшой скорости вращения ротора n_2 и малой частоте колебаний f .

Зависимость критической скорости вращения ротора n'_0 , выраженной в относительных единицах, от величины присоединенной фазной емкости C_ϕ конденсаторов возбуждения при $K=1$ представлена на рис. 4.

Абсолютная величина критической скорости вращения ротора $n_{кр}$ асинхронного генератора определяется соотношением

$$n_{кр} = \frac{60 f_K}{p} \cdot \frac{n'_0}{\sqrt{K}}, \quad (9)$$

а частота возникающих колебаний при холостом ходе находится из соотношения (8).

При установлении скорости вращения ротора n_2 несколько выше критического значения $n_{кр}$ и последующем увеличении емкости конденсаторов C_ϕ напряжение генератора u возрастает [Л. 1].

Одновременно с этим увеличивается ток возбуждения i .

Эти зависимости $u=F(C_\phi)$ и $i=F(C_\phi)$ удобно представить в виде двух семейств графиков, отвечающих различным фиксированным значениям скорости вращения ротора n_2 .

Построение этих характеристик производится на основании графической зависимости $L_0=F(u_0)$, представленной на рис. 3, и выра-

жения скорости ротора в относительных единицах

$$n_2 = \frac{1}{2\pi f_n \sqrt{L_0 C_\phi K}} \quad (10)$$

Задавшись определенной скоростью вращения ротора n_2 и рядом значений напряжения u_0 при частоте f_n , находят по кривой $L_0 = F(u_0)$ соответствующие им значения величины L_0 , а из соотношения (10) величину фазной емкости конденсаторов возбуждения

$$C_\phi = \frac{1}{4\pi^2 f_n^2 n_2^2 L_0 K} \quad (11)$$

Частота генерируемых колебаний при данном режиме находится как

$$f = f_n n_2, \quad (12)$$

величина напряжения

$$u = u_0 n_2, \quad (13)$$

а намагничивающий ток

$$i = 2\pi C_\phi \frac{U_n}{I_n} u, \quad (14)$$

или, принимая во внимание, что

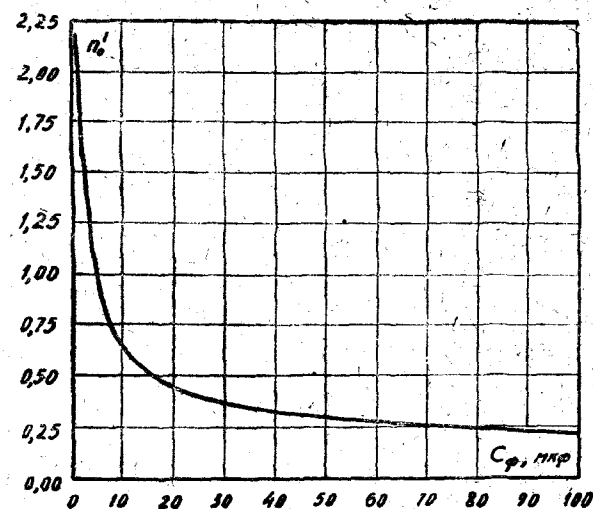


Рис. 4. Зависимость критической скорости вращения ротора n_2' , выраженной в относительных единицах, от величины фазной емкости C_ϕ конденсаторов возбуждения, соединенных звездой, при $K = 1$

$$\frac{U_n}{I_n} = 2\pi f_n K, \quad (15)$$

имеем

$$i = 4\pi^2 f_n f K C_\phi. \quad (16)$$

На рис. 5 представлены характеристики асинхронного генератора с конденсаторным возбуждением, показывающие изменение напряжения u и тока i в зависимости от величины $K C_\phi$, пропорциональной возбуждающей емкости C_ϕ , при различных фиксированных скоростях вращения ротора n_2 , причем характеристики $u = F(K C_\phi)$ пересечены семейством кривых равных токов ($i = 0,50$; $i = 0,75$; ...; $i = 1,5$).

Пользуясь приведенными характеристиками, нетрудно установить для различных значений напряжения $u = \text{const}$ допустимый диапазон изменения скорости вращения ротора, отвечающий устойчивой работе генератора, и потребное изменение величины возбуждающей емкости для поддержания неизменного напряжения на зажимах статора при холостом ходе машины.

При установлении величины наименьшей скорости вращения ротора следует исходить из того, чтобы при принятом значении напряжения ток возбуждения не превышал номинального намагничивающего тока машины, составляющего в малых по мощности машинах 35—50% I_n .

Верхний предел определяется условием устойчивости работы генератора, то-есть, таким расположением точки пересечения характеристики $u = F(KC_\phi)$ с горизонталью $u = \text{const}$, которое отвечает переходу характеристики $u = F(KC_\phi)$ с прямолинейного участка в криволинейную часть.

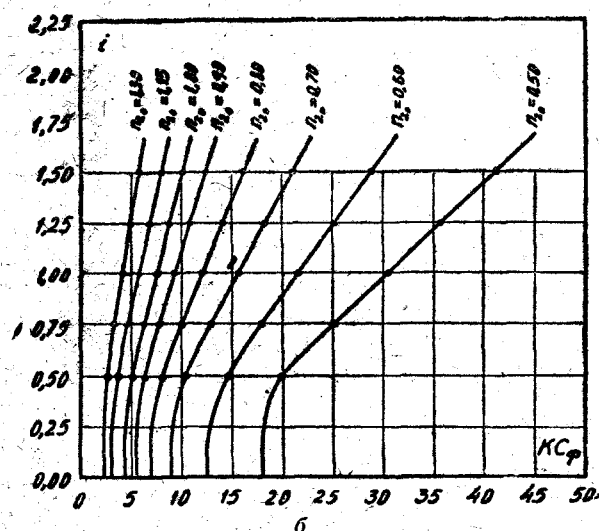
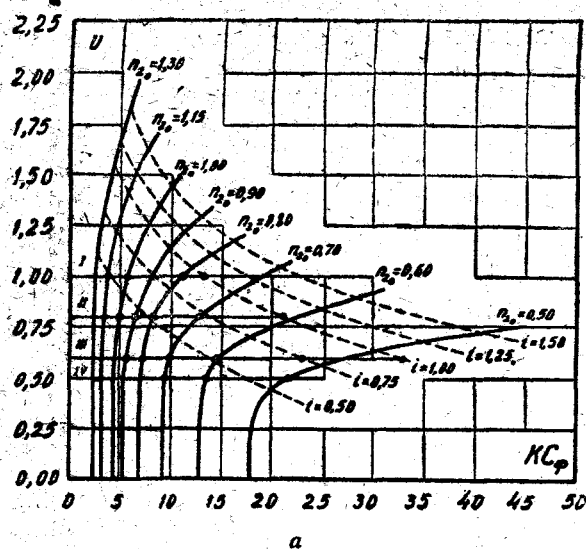


Рис. 5. Характеристики асинхронного генератора с конденсаторным возбуждением, показывающие изменение напряжения u (а) и изменение тока i (б) в зависимости от величины KC_ϕ при различных фиксированных скоростях вращения ротора n_{20} .

ратора, работающего при $u = \text{const}$, получается при напряжении $u = 0,6$.

В этом случае скорость вращения ротора может изменяться в пределах $0,7 n_c \pm \Delta n$ при условии, что ток машины $i \leq 0,75$.

На рис. 5, а проведены горизонтали I, II, III, IV, отвечающие постоянному напряжению $u = 1,0$; $0,8$; $0,6$; $0,5$, пересекающие семейство кривых $u = F(KC_\phi)$, соответствующих различной постоянной скорости вращения ротора n_{20} .

Полученные точки пересечения, отмеченные на рис. 5, а сплошными кружками, определяют собой требуемое значение KC_ϕ при различной скорости вращения ротора n_{20} при условии, чтобы $u = \text{const}$.

На рис. 6 приведены кривые $KC_\phi = F(n_{20})$, иллюстрирующие характер изменения величины потребной емкости возбуждения C_ϕ для поддержания постоянного напряжения асинхронного генератора при холостом ходе и переменной скорости вращения ротора из расчёта, чтобы ток машины не превышал $0,75 I_n$.

Пунктирные части кривых соответствуют увеличению тока машины до номинального значения I_n .

Из сопоставления кривых I, II, III, IV, представленных на рис. 6, видно, что наиболее широкий диапазон изменения скорости вращения ротора асинхронного гене-

Как видно из рис. 6 абсолютное значение Δn для указанного режима составляет около 0,2 номинальной синхронной скорости вращения машины n_c .

Опыты, поставленные на четырехполюсной асинхронной машине типа АД-22/4 с короткозамкнутым ротором номинальной мощностью 1,5 кВт

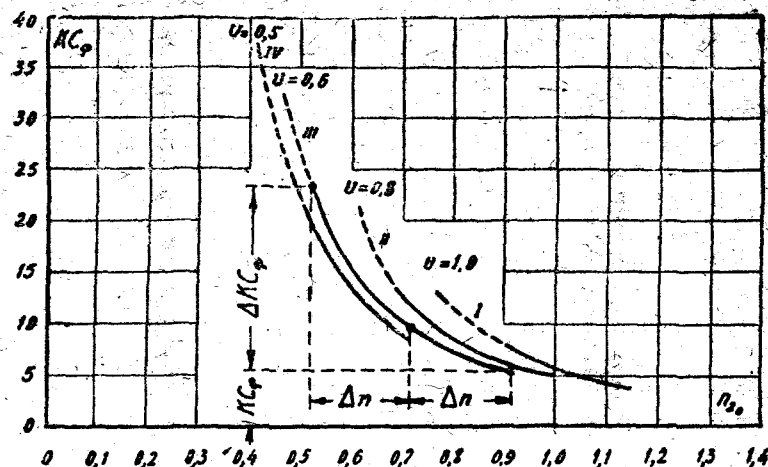


Рис. 6. Характер изменения величины потребной возбуждающей емкости для поддержания постоянства напряжения на зажимах статора асинхронного генератора при холостом ходе и переменной скорости вращения ротора

на валу при номинальном линейном напряжении 380 в, номинальном токе 3,4 а и соединении обмоток статора звездой, а возбуждающих конденсаторов треугольником, полностью подтвердили установленные выше соотношения.

На рис. 7 приведены экспериментально полученные графические

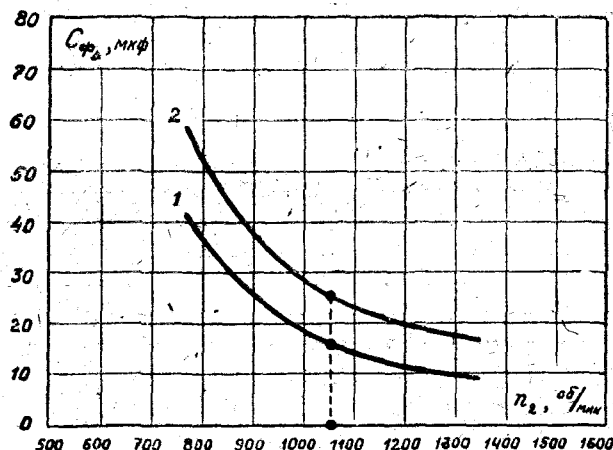


Рис. 7. Кривые изменения величины потребной фазной емкости возбуждения $C_{\varphi\Delta}$, соединенной треугольником, в зависимости от скорости вращения ротора n_2 асинхронного генератора номинальной мощностью 1,5 кВт на валу при постоянном напряжении $U = 0,6 U_N = 230 \text{ в}$

зависимости $C_{\phi\Delta} = F(n_2)$ при холостом ходе машины и токе генератора $I \leq 0,75 I_n = 0,75 \cdot 3,4 = 2,55 \text{ а}$ (кривая 1) и при постоянной подключённой активной нагрузке и токе генератора $I \leq I_n = 3,4 \text{ а}$ (кривая 2) и таком изменении величины возбуждающей емкости $C_{\phi\Delta}$, которое обеспечивает неизменное напряжение на зажимах статора асинхронного генератора $U = 0,6 U_n = 0,6 \cdot 380 = 230 \text{ в} = \text{const.}$

При этом, как видно из рис. 7, устойчивая работа асинхронного генератора вполне возможна при изменении скорости в пределах $n_2 = 0,7 n_c \pm \Delta n = 0,7 \cdot 1500 \pm 0,2 \cdot 1500 = 1050 \pm 300 = 750 \dots 1350 \text{ об/мин}$ как при холостом ходе, так и при работе на постоянную нагрузку, причем в обоих случаях требуемую величину возбуждающей емкости приходится изменять примерно в отношении 4:1 по закону, определяемому кривыми $C_{\phi\Delta} = F(n_2)$.

Так как для поддержания постоянного напряжения всякое изменение скорости вращения ротора должно сопровождаться соответствующим изменением величины емкости конденсаторов возбуждения, то необходимо конденсаторную батарею конструировать в виде отдельных секций, автоматическое переключение которых может обеспечить относительную стабилизацию величины напряжения асинхронного генератора.

Автоматизация этого процесса может быть достигнута при помощи реле напряжения, которое при снижении напряжения будет обеспечивать через промежуточное реле подключение необходимой дополнительной емкости, а при увеличении его — отключение секций конденсаторной батареи.

В случае использования реле напряжения электромагнитного типа необходимо последовательно с его обмоткой включить активное сопротивление, подобрав его таким образом, чтобы падение напряжения на катушке реле составляло небольшую часть напряжения генератора.

Это необходимо для ослабления влияния на работу реле изменения частоты, зависящей от скорости вращения ротора.

При непосредственном подключении катушки реле напряжения к зажимам статора асинхронного генератора, работающего при переменной скорости вращения, реле может не сработать из-за уменьшения тока в обмотке вследствие возрастания индуктивного сопротивления.

Если асинхронный генератор докомплектован выпрямительным блоком из полупроводниковых вентилей (рис. 1,б,в), то обмотку реле напряжения следует включать непосредственно со стороны выпрямленного тока, ибо при этом изменение частоты не будет сказываться на работе реле.

Так как наличие реле напряжения и промежуточных реле значительно усложняет схему и вносит определенные элементы недостаточной надежности в работе асинхронного генератора, то значительно лучше осуществлять автоматическую стабилизацию напряжения бесконтактным способом — путем использования ферромагнитных контуров с подмагничиванием выпрямленным током.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. А., Асинхронные генераторы для гидроэлектрических станций небольшой мощности. Госэнергоиздат. 1948.
2. Иванов А. А., Бесколлекторный генератор двойного тока, справка управления по изобретениям и открытиям № 425807 от 10.VIII 1950.

А. А. ИВАНОВ

БЕСКОНТАКТНЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР ДВОЙНОГО ТОКА

В работе описана возможность использования асинхронной машины с короткозамкнутым ротором в качестве источника постоянного и трехфазного тока промышленной или повышенной частоты. Приводятся расчеты конструктивных элементов установки и даются рекомендации, касающиеся применения бесконтактного электрического генератора двойного тока.

Как известно, нормальная асинхронная машина с вращаемым от постороннего двигателя короткозамкнутым ротором при наличии соответствующей симметричной трехфазной возбуждающей емкости, включенной параллельно обмоткам статора, способна работать в генераторном режиме [Л.-1].

Дискомплектование такого генератора блоком из полупроводниковых выпрямителей позволяет использовать его в качестве источника электрической энергии двойного тока [Л.-2].

Отсутствие скользящих электрических контактов трения со свойственным им искрообразованием, вызывающим радиопомехи и представляющим опасность для взрывоопасных сред, позволяет рекомендовать описываемое устройство в тех случаях, когда необходимо располагать недорогим и надежным генератором электрической энергии двойного тока мощностью порядка нескольких киловатт.

1. Описание электрической схемы установки

Бесконтактный генератор двойного тока состоит из нормальной асинхронной машины трехфазного тока с короткозамкнутым ротором P , предназначенной для работы при стандартной или повышенной частоте.

Ротор приводится во вращение первичным двигателем со скоростью n .

К обмоткам статора I, II, III, соединенным звездой, приключена батарея, состоящая из трех одинаковых статических конденсаторов C , включенных треугольником (рис. 1).

При вращении ротора, благодаря наличию остаточного магнитного потока в стали машины и конденсаторов соответствующей емкости, происходит возбуждение машины.

В результате этого между зажимами a , b , c устанавлива-

ются три линейные напряжения U_{ab} , U_{bc} , U_{ca} симметричной трехфазной системы.

Величина установившегося линейного напряжения U_L зависит от емкости конденсаторов C и от скорости вращения ротора n .

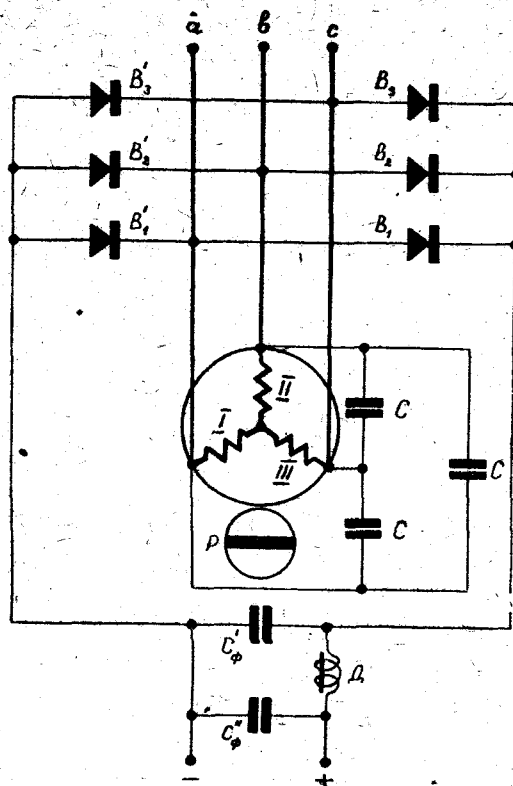


Рис. 1. Схема бесконтактного электрического генератора двойного тока

На рис. 2 приведены три характеристики генератора $u = F(n_0)$, показывающие зависимость напряжения от скорости вращения ротора в относительных единицах при различных значениях возбуждающей емкости C , причем $C' > C'' > C'''$.

Частота f генерируемого трехфазного тока зависит от скорости вращения ротора генератора [Л. 1].

Полупроводниковые выпрямители, состоящие из двух групп: анодной — B_1 , B_2 , B_3 , и катодной — B_1' , B_2' , B_3' , образуют трехфазную двухполупериодную выпрямительную схему А. Н. Ларионова, обеспечивающую качественное выпрямление генерируемого трехфазного тока.

При необходимости меньшей волнистости кривой выпрямленного тока используется сглаживающий фильтр, состоящий из двух конденсаторов C'_ϕ и C''_ϕ и катушки со стальным сердечником D .

Питание электрической энергией потребителей трехфазного тока производится от зажимов a , b , c , а потребители постоянного тока присоединяются к выводам $+$ и $-$.

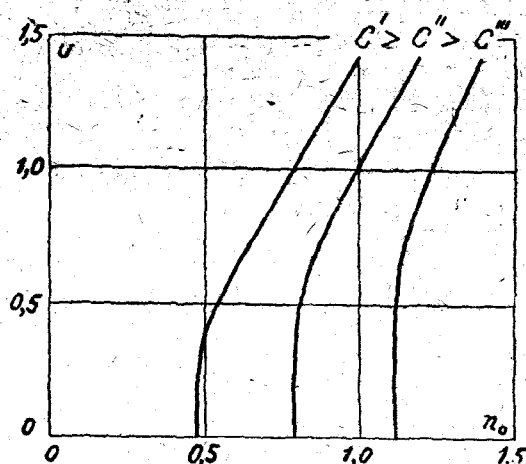


Рис. 2. Характеристики генератора, показывающие изменение величины напряжения от скорости вращений ротора при фиксированных значениях возбуждающей емкости и холостом ходе машины в относительных единицах

2. Конструктивные данные установки

Скорость вращения ротора бесконтактного генератора определяется выражением

$$n = \frac{60 f (1 - s)}{p}, \quad (1)$$

где f —частота электрических колебаний, гц ;

s —величина скольжения, которая при генераторном режиме имеет значение—0,02...—0,08;

p —число пар полюсов машины.

Желательно, чтобы принятая частота f была близка к номинальному значению частоты машины.

Конденсаторная батарея для возбуждения машины выбирается по величине ее рабочего напряжения $U_{\text{раб}}$ и емкости C и комплектуется из стандартных статических конденсаторов, соединяемых между собой параллельно.

Рабочее напряжение $U_{\text{раб}}$ должно быть

$$U_{\text{раб}} > (2...3) U, \quad (2)$$

где U —напряжение на зажимах конденсаторов, в .

Величина фазной возбуждающей емкости C , мкф определяется как

$$C = 5 \cdot 10^7 \frac{P (\lg \varphi_2 + \lg \varphi)}{f U}, \quad (3)$$

где P —активная мощность, отдаваемая генератором, квт ;

φ_2 и φ —углы сдвига фаз между напряжением и током соответственно генератору и нагрузке;

f —частота, гц ;

U —напряжение на зажимах фазной емкости, в .

При соединении конденсаторов возбуждения треугольником

$$U = U_{\Delta}, \quad (4)$$

а при соединении их звездой

$$U = \frac{U_{\Delta}}{\sqrt{3}} = 0,577 U_{\Delta} \quad (5)$$

Данные расчетов показывают, что при установленной мощности машин $P_n = 0,25 - 5 \text{ кВт}$ и работе их на активную нагрузку величина удельной возбуждающей емкости конденсаторов, соединенных треугольником, при линейном напряжении 220 в, составляет $c_0 = 28 - 16 \text{ мкф/кВт}$ на фазу [Л. 1].

Если номинальное напряжение U_n будет иным, то величина удельной возбуждающей емкости c' определяется из соотношения

$$c' = c_0 \left(\frac{220}{U_n} \right)^2. \quad (6)$$

Выпрямительный блок собирается из шести однотипных селеновых выпрямителей по мостовой схеме А. Н. Ларионова, обеспечивающей при холостом ходе идеального выпрямителя и величине подведенного эффективного линейного напряжения U_{Δ} среднее значение выпрямленного напряжения

$$U_{B_0} = \sqrt{2} U_{\Delta} \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} = 1,35 U_{\Delta}, \quad (7)$$

и эффективное значение обратного напряжения

$$U_{обр} = U_{\Delta}. \quad (8)$$

Число последовательно соединенных элементов в каждом плече этой выпрямительной схемы

$$n' = \frac{U_{обр}}{U_{доп}} = \frac{U_{\Delta}}{U_{доп}} = \frac{U_{B_0}}{1,35 U_{доп}}, \quad (9)$$

где $U_{доп}$ — эффективное значение допускаемого напряжения на один выпрямительный элемент, в.

При продолжительном режиме работы селеновых выпрямителей, включенных в схемы трехфазного тока, величина $U_{доп}$ выбирается в зависимости от их класса в пределах 10...16,5 в.

Так, для класса А эффективное значение допускаемого напряжения на один выпрямительный элемент составляет 10 в, для класса Б — 13,5 в и для класса В — 16,5 в [Л. 3].

Что касается размеров отдельных выпрямительных элементов, то они выбираются по среднему значению тока I_{B_1} , протекающему в плече моста.

Последний I_{B_1} при выпрямительной схеме А. Н. Ларионова в три раза меньше среднего значения тока выпрямителя I_B , связанного с эффективным током линейного провода соотношением

$$I_B \cong \frac{\sqrt{6}}{2} I_A = 1,22 I_A. \quad (10)$$

Активная рабочая площадь выпрямительного элемента s находится как

$$s = \frac{I_B}{j}, \quad (11)$$

где j — допустимая плотность тока, ма/см^2 .

Величина допустимой плотности тока j в сильной степени зависит от конструкции и способа охлаждения селеновых выпрямителей и выбирается так, чтобы температура нагрева их не превышала 75° . Обычно при расчете, учитывая возможность старения выпрямительных элементов, предельную температуру берут порядка $55\text{—}65^\circ$.

Исходя из этого обычно для существующих конструкций селеновых выпрямительных элементов нормальной сборки при естественном воздушном охлаждении и температуре окружающего воздуха до 35° величину j выбирают порядка $22\text{--}25 \text{ ма/см}^2$ активной поверхности элемента [Л. 3].

Практически удобно размеры выпрямительных элементов выбирать по специальной таблице допустимых средних значений выпрямленного тока I_B на отдельный элемент. Величина I_B определяется условиями охлаждения выпрямительных элементов, их конструкцией, температурой окружающей среды и характером нагрузки.

В таблице 1 приводятся числовые значения I_B для нормально собранных селеновых выпрямителей при естественном воздушном охлаждении, температуре окружающего воздуха 35° , питающих активную или индуктивную нагрузку.

Таблица 1

Наибольшие допустимые средние значения выпрямленного тока через отдельные выпрямительные селеновые элементы при естественном воздушном охлаждении и температуре окружающего воздуха 35°

Размер выпрямительного элемента		Активная площадь s , см^2	Наибольший допустимый средний выпрямленный ток через один элемент в прямом направлении I_B , а
Диаметр круглого элемента, мм	Стороны прямоугольного элемента, мм		
18		1,2	0,0375
25		3	0,075
35		7,2	0,15
45		12	0,3
67	60×60	27	0,6
84	75×75	44	1,2
100	90×90	67	1,5
112	100×100	85	2,0

При работе выпрямителя для зарядки аккумуляторных батарей, а также на емкостную нагрузку, значения предельно допускаемого тока на отдельный выпрямительный элемент, приведенные в таблице 1, должны быть уменьшены на 20%.

Если величина среднего выпрямленного тока на отдельный элемент превышает 2 а или, исходя из конструктивных соображений, намечается собирать выпрямитель из вентилях небольших размеров, то прибегают к их параллельному соединению.

Число параллельных групп a в каждом плече выпрямительной схемы А. Н. Ларионова находится из соотношения

$$a \geq \frac{I_B}{3 I_{B_1}}, \quad (12)$$

где I_B — среднее значение выпрямленного тока выпрямителя;

I_{B_1} — наибольшее допускаемое значение среднего выпрямленного тока через отдельный вентилях элемент того размера, который намечается к использованию в выпрямительном устройстве (таблица 1).

Нагрузки, приведенные в таблице 1, относятся к выпрямительным элементам, собранным в столбики с промежутками, равными около 10% их диаметра. При сборке селеновых столбиков с большими промежутками между выпрямительными элементами условия охлаждения улучшаются, что позволяет значительно повысить их нагрузку.

При искусственном охлаждении вентилях воздухом температурой не выше 35° возможно увеличить нагрузку отдельных выпрямительных элементов в 2...2,5 раза, а при погружении их в масло — доводить ее до 1,5—1,8 той, которую они безопасно выдерживают при естественном воздушном охлаждении и температуре воздуха 35°. Однако следует заметить, что повышение нагрузки сопровождается увеличением потери напряжения на вентилях и снижением к. п. д. выпрямительного устройства.

Весьма перспективно для генератора двойного тока использование взамен селеновых выпрямителей вентилях из кремния и германия, которые еще сравнительно недавно использовались только в маломощных установках в качестве диодов.

В настоящее время достигнуты значительные успехи в их применении для мощных установок, где к. п. д. таких выпрямителей доходит до значения 0,99.

Эти новые полупроводниковые выпрямители допускают высокие плотности тока, отличаются компактностью, простотой конструкции, выдерживают повышенное обратное напряжение порядка нескольких сотен вольт, обладают весьма малой потерей напряжения в прямом направлении, составляющей доли вольта, и характерны ничтожно малым обратным током, того же порядка, что и электронная лампа при одинаковой величине обратного напряжения.

Что касается среднего значения выпрямленного напряжения U_B , которое зависит от величины нагрузки со стороны выпрямленного тока [Л. 4], то для выпрямительной схемы А. Н. Ларионова на полупроводниковых вентилях при холостом ходе оно составляет

$$U'_{B_0} = U_{B_0} - n' = 1,35 U_A - n', \quad (13)$$

а при номинальной нагрузке

$$U'_B = U_B - 6n' \Delta U = 1,35U_A - 6n' \Delta U, \quad (14)$$

где ΔU — величина номинальной потери напряжения в прямом направлении на отдельном полупроводниковом вентиле, зависящая от его группы и составляющая для селеновых элементов от 0,4 до 1 в [Л. 3].

В процессе эксплуатации селеновых выпрямителей происходит их старение, то-есть увеличение прямого сопротивления, что приводит к возрастанию потери напряжения до 30%. Для компенсации этой потери необходимо несколько увеличить напряжение переменного тока U_2 , подводимое к выпрямительному блоку.

Последнее достигается незначительным увеличением симметричной возбуждающей емкости C , либо некоторым увеличением скорости вращения ротора n , причем при последнем способе, естественно, возрастает частота переменного тока f .

Так как схема А. Н. Ларионова обеспечивает шестифазное выпрямление с частотой первой гармоники переменной составляющей выпрямленного напряжения в 300 гц при сравнительно малой ее амплитуде, равной 5,7% U_2' , то пульсация напряжения на выходных клеммах выпрямительного блока составляет всего лишь 4,2% [Л. 3].

В случае необходимости лучшего сглаживания волнистости кривой выпрямленного тока необходимо прибегать к емкостному или индуктивному фильтру.

В радиотехнических установках, где величина пульсации должна составлять доли процента по отношению к величине постоянного напряжения, необходимо использовать более сложный электрический фильтр, состоящий из емкостей $C'_\phi = 5...10$ мкф, $C''_\phi = 10...20$ мкф и катушки со стальным сердечником с числом витков порядка нескольких сотен.

3. Свойства генератора и область его применения

Описываемый генератор отличается простотой конструкции, отсутствием электрических контактов трения и искрообразования, что обеспечивает высокую надежность в работе и устранение помех для радиотехнических установок, чем не обладают применяемые в настоящее время электромашинные источники питания.

Эксплуатация такого генератора вполне допустима при скорости вращения ротора, несколько отличающейся от номинальной скорости вращения машины. Это дает возможность наряду с постоянным током получить трехфазный ток различной частоты.

Величина необходимого напряжения может регулироваться небольшим изменением емкости конденсаторов возбуждения.

Существенный недостаток данного генератора, заключающийся в значительном снижении напряжения при питании индуктивной трехфазной нагрузки, может быть легко устранен применением несложных феррорезонансных стабилизаторов напряжения или использованием компаундирующих устройств [Л. 1].

Такие устройства автоматически поддерживают почти неизменное напряжение на зажимах токоприемников даже при значительных изменениях нагрузки.

Бесконтактный генератор двойного тока может быть сконструирован

на любое напряжение и использован на судовых и самолетных установках для питания радиоприемно-передающих устройств и электронавигационных приборов, а также везде, где требуется простой, недорогой и безопасный в отношении взрыва источник электрической энергии небольшой мощности постоянного и трехфазного тока промышленной или повышенной частоты.

Проверка работы описанного бесконтактного электрического генератора двойного тока была осуществлена в лабораториях кафедры электротехники Одесского технологического института имени И. В. Сталина в июне-июле 1950 года и показала его хорошие эксплуатационные качества [Л. 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. И в а н о в А. А. Асинхронные генераторы для гидроэлектрических станций небольшой мощности, ГЭИ, 1948.
2. И в а н о в А. А. Бесколлекторный генератор двойного тока, справка управления по изобретениям и открытиям № 425807 от 10.VIII 1950.
3. Ю д и ц к и й С. Б. Синхронные машины с полупроводниковыми выпрямителями, ГЭИ, 1954.
4. К о м а р В. Г. Работа полупроводниковых выпрямителей в цепях управления, ГЭИ, 1952.

В. А. СОМОВ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВЯЗАННЫЕ С РЕГУЛИРОВАНИЕМ ВТОРИЧНОГО НАПРЯЖЕНИЯ ТРАНСФОРМАТОРА ПОДМАГНИЧИВАНИЕМ

В работе рассмотрены некоторые элементы теории трансформатора, регулируемого подмагничиванием, описаны происходящие физические процессы при холостом ходе и нагрузке с учетом явления магнитного рассеяния, а также приведены характеристики, полученные автором при испытании сконструированного им подмагничиваемого трансформатора с пониженным магнитным рассеянием.

Среди различных систем бесступенчатого регулирования напряжения в цепи переменного тока распространена сейчас система с дросселями насыщения. Принцип действия регулятора с дросселями насыщения основан на изменении с помощью подмагничивания индуктивности дросселя, включенного последовательно в регулируемую цепь. При этом требуемое для питания данной цепи напряжение подается от отдельного трансформатора.

Возможно, однако, непосредственное регулирование вторичного напряжения трансформатора путем подмагничивания отдельных участков его магнитопровода. При этом отпадает необходимость в установке двух аппаратов: дросселя насыщения и трансформатора. То и другое объединяется в одной конструкции трансформатора, регулируемого подмагничиванием.

Работы по созданию трансформатора, регулируемого подмагничиванием, начаты 25—30 лет тому назад. Первые патенты в этой области относятся к 1929—1930 гг. В частности, в 1929 году в Советском Союзе было выдано авторское свидетельство на «устройство для изменения напряжения в цепи переменного тока» (авт. св. кл. 21, подкл. d², гр. 53/02, № 34806, 1929). С 1929 г. и до настоящего времени как у нас, так и за границей, выдано еще несколько патентов и авторских свидетельств на подобные конструкции. Каждая из них имеет те или иные элементы оригинальности, но все они основаны на одном и том же принципе регулирования вторичного напряжения трансформатора путем подмагничивания отдельных участков его магнитопровода.

Несмотря на большой срок, истекший со времени появления первых регулируемых подмагничиванием трансформаторов, они не получили до настоящего времени широкого распространения.

По мнению автора, такое явление следует объяснить наличием значительного магнитного рассеяния у запатентованных ранее трансформа-

торов с подмагничиванием, что приводит к чрезмерному, по сравнению с дросселями насыщения, удельному расходу активных материалов.

Ниже приводится элементарное описание некоторых принципиальных положений из теории трансформатора, регулируемого подмагничиванием, и практические результаты, полученные в Одесском технологическом институте имени И. В. Сталина по созданию подмагничиваемого трансформатора с пониженным рассеянием.

1. Процесс регулирования вторичного напряжения трансформатора подмагничиванием

Пусть первичная и вторичная обмотки переменного тока трансформатора (рис. 1) расположены отдельно на левых стержнях сердечника,

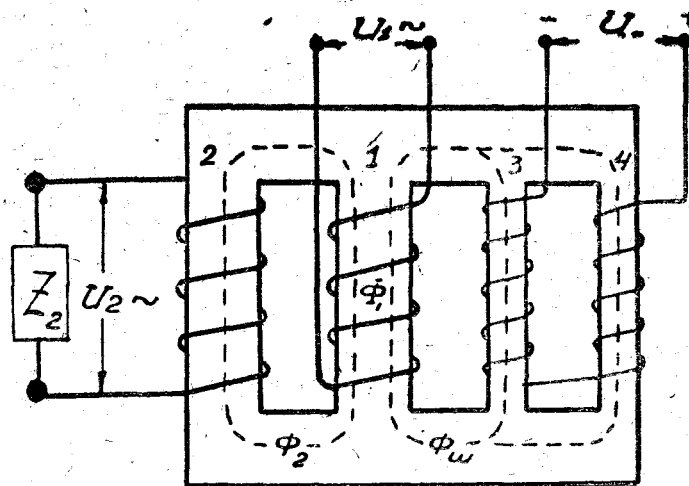


Рис. 1. Трансформатор с шунтом, магнитное сопротивление которого регулируется подмагничиванием

а правые стержни являются магнитным шунтом с обмоткой подмагничивания постоянным током.

Пренебрегая магнитными потоками рассеяния (что в трансформаторе с обмотками, расположенными на разных стержнях, допустимо только теоретически), найдем переменный магнитный поток, связанный со вторичной обмоткой Φ_2 , как геометрическую разность потока первичной обмотки Φ_1 и потока шунта $\Phi_{ш}$.

Поток шунта, в свою очередь, зависит не только от естественного магнитного сопротивления шунта, но и от величины тока подмагничивания, что делает возможным изменять его величину и, следовательно, изменять величину полезного потока Φ_2 и, соответственно, вторичное напряжение.

Пусть основная магнитная цепь трансформатора работает в режиме, соответствующем прямолинейной части кривой намагничивания стали сердечника, и обмотка ее включена под косинусоидальное напряжение.

Пренебрегая активными потерями и, как указывалось, рассеянием, считаем в этом случае, что магнитные потоки и токи изменяются синусоидально. Следовательно, н. с., приложенная к стержням шунта, будет также синусоидальна и обусловлена токами как первичной, так и вторичной обмоток.

Допустим, что кривая 2 (рис. 2) выражает в некотором масштабе эту н. с. для каких-то весьма малых значений токов I_1 и I_2 , а кривая 1 — основную кривую намагничивания стержней шунта.

Тогда, при отсутствии подмагничивания, кривая 3 будет выражать потоки, проходящие через каждый стержень магнитного шунта, а полный магнитный поток шунта с достаточной точностью будет выражен

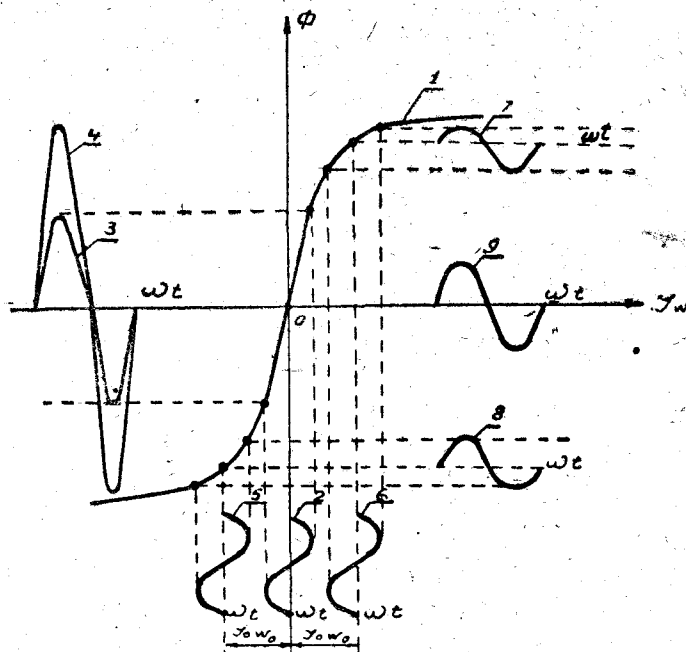


Рис. 2. Процесс изменения переменного потока шунта под влиянием постоянной н. с.

кривой 4, ординаты которой найдены путем умножения на две соответствующие ординаты кривой 3.

Если пропустить по обмоткам подмагничивания постоянный ток, то рабочие точки кривой намагничивания стали шунта сместятся на величину постоянной н. с. $I_0 W_0$ и переменные н. с. будут выражены кривыми 5 и 6.

Соответственно, кривые 7 и 8 будут выражать потоки, проходящие по каждому стержню шунта, а кривая 9 — суммарный магнитный поток шунта [Л. 2].

Сравнив кривые 4 и 9, видим, что при подмагничивании переменный магнитный поток шунта при неизменной переменной н. с. уменьшается. Следовательно, должен возрасти поток Φ_2 и, соответственно, вторичное напряжение. В этом заключается процесс регулирования вторичного напряжения подмагничиванием. При отсутствии подмагничивания поток первичной обмотки замыкается через шунт, и вторичное напряжение ничтожно мало; при наличии подмагничивания поток шунта уменьшается, поток Φ_1 (рис. 1) вынужден замыкаться по стержню, охватываемому вторичной обмоткой, и вторичное напряжение возрастает. (поток Φ_1 обусловлен приложенным первичным напряжением и при неизменном напряжении может быть принят приближенно постоянным).

2. Влияние потоков рассеяния и особенность описываемой конструкции

В реальных условиях, при раздельном расположении обмоток трансформатора нельзя пренебречь магнитными потоками рассеяния.

Наличие потоков рассеяния, как известно, приводит к падающей внешней характеристике, а снимаемая со вторичной обмотки мощность, приходящаяся на единицу веса трансформатора, резко уменьшается. Это обстоятельство приводит к необходимости чрезмерно увеличить удельный расход активных материалов, что допустимо, очевидно, только для трансформаторов малых мощностей.

Известно, что взаимное расположение обмоток трансформатора оказывает значительное влияние на величину потоков рассеяния. Особенно сильно зависит эта величина при цилиндрических обмотках от того, охватывают или нет обе обмотки трансформатора один и тот же стержень его магнитопровода. Если обмотки расположены на различных стержнях, трансформатор имеет большие потоки рассеяния. Если обмотки расположены на одном стержне, потоки рассеяния малы. При этом оказывается, что поперечное сечение окна внешней обмотки может быть значительно увеличено без существенного увеличения потоков рассеяния. Это позволяет поместить магнитный шунт внутри верхней обмотки и получить, таким образом, трансформатор с шунтом, обладающий малым рассеянием [Л. 2, стр. 138].

Институтом электросварки имени Е. О. Патона АН УССР на этом принципе построен мощный сварочный трансформатор, имеющий магнитный шунт, проходящий внутри внешней обмотки.

Большое влияние, которое оказывает на индуктивность рассеяния трансформатора взаимное расположение его обмоток, объясняется следующим образом.

По определению под индуктивностью рассеяния трансформатора понимают индуктивность его обмоток при условии, когда сумма полных токов равна нулю.

$$I_1 w_1 + I_2 w_2 = 0. \quad (2-1)$$

В этом случае согласно закону полного тока, общий магнитный поток, связанный как с первичной, так и со вторичными обмотками, равен нулю и существует только поток рассеяния.

В случае цилиндрических коаксиальных обмоток, охватывающих один и тот же стержень (рис. 3), наличие стального сердечника внутри катушек весьма слабо сказывается на величине индуктивности рассеяния.

Действительно, здесь поток, создаваемый токами I_1 и I_2 , на своем пути проходит, во первых, весьма узкое и длинное пространство, включающее в себя канал между обмотками и частично тело самих обмоток, среднее сечение которого равно прямоугольнику ABCD и объем:

$$V_1 \cong \Delta h \cdot \pi \cdot D$$

и, во-вторых, поток проходит обширное внешнее, ничем не ограниченное пространство вне обмоток.

При таких условиях основное падение магнитного потенциала приходится на внутреннее узкое пространство — на путь h , а во внешнем пространстве падение магнитного потенциала пренебрежимо мало. Следовательно, и энергия магнитного поля сосредоточена, в основном, в пространстве V_1 , которое заполнено воздухом.

Стальной сердечник находится во внешнем пространстве и создает там дополнительную магнитную проводимость. Но так как магнитное сопротивление внешнего пространства само по себе мало, ввиду его неограниченных размеров, влияние сердечника на полную магнитную энергию поля незначительно.

Так как индуктивность

$$L_s = \frac{2 W_M}{I^2}, \quad (2-2)$$

то в нашем случае индуктивность рассеяния, приведенная к данной обмотке, равна, в основном, индуктивности двух параллельных шин, полученных путем выпрямления обмоток трансформатора, находящихся в

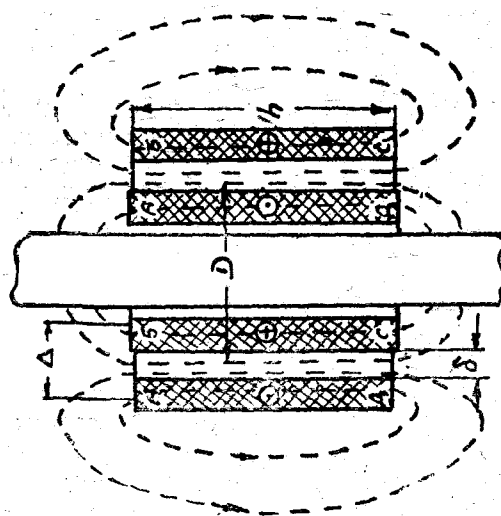


Рис. 3. Распределение потоков рассеяния трансформатора при расположении его обмоток на одном стержне.

воздушном пространстве (умноженной на W^2). Влиянием сердечника на L_s здесь можно пренебречь.

Иная картина получается при расположении обмоток трансформатора на разных стержнях. На рис. 4 показан трансформатор с обмот-

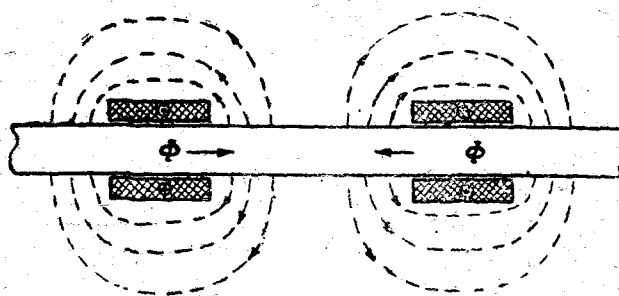


Рис. 4. Распределение потоков рассеяния трансформатора при расположении его обмоток на разных стержнях (магнитопровод трансформатора выпрямлен).

ками, расположенными на разных стержнях, магнитопровод которого выпрямлен.

В этом случае каждая катушка образует свой самостоятельный поток рассеяния. Наиболее узкие области пространства, лежащие на путях распространения этих потоков, находятся внутри катушек; и эти области заняты стальным сердечником. Поэтому общая величина потока рассеяния несоизмеримо больше, чем в предыдущем случае.

Соответственно возрастает энергия магнитного поля, которая теперь перемещается из внутренней узкой области пространства во внешнюю область пространства, ничем не ограниченную. Вместе с энергией растет и индуктивность рассеяния, и если в первом случае индуктивность рассеяния примерно равна индуктивности двух параллельных шин, находящихся в воздухе, то во втором случае она равна приблизительно индуктивности двух последовательно соединенных катушек (обмоток), внутри которых находятся разомкнутые участки магнитопровода.

Кроме того, если в первом случае индуктивность рассеяния прак-

тически не зависит от величины токов в обмотках, то во втором случае, при расположении обмоток на разных стержнях, индуктивность рассеяния зависит от токов в обмотках, так как потоки рассеяния велики и, проходя на значительном участке своего пути по стальному сердечнику, переводят его в режим насыщения.

Сказанное выше полностью соответствует результатам эксперимента. На рис. 5 приведены графические зависимости χ_s от I_1 для трансформатора, показанного на том же рис. 5.

Кривая 1 дает зависимость χ_s от I_1 при расположении обмоток на одном стержне. Кривая 2 дает зависимость χ_s от I_1 при расположении обмоток на разных стержнях. Кривые выполнены в одном и том же масштабе. Сравнивая их, видим большую разницу в величинах χ_s для указанных случаев расположения обмоток.

Кривая 2 иллюстрирует также сделанный нами вывод о зависимости χ_s от тока трансформатора при расположении обмоток на разных стержнях.

На этом же рисунке приведена кривая 3, дающая зависимость реактивного сопротивления двух последовательно включенных обмоток трансформатора при условии, что ярма магнитопровода сняты и связь

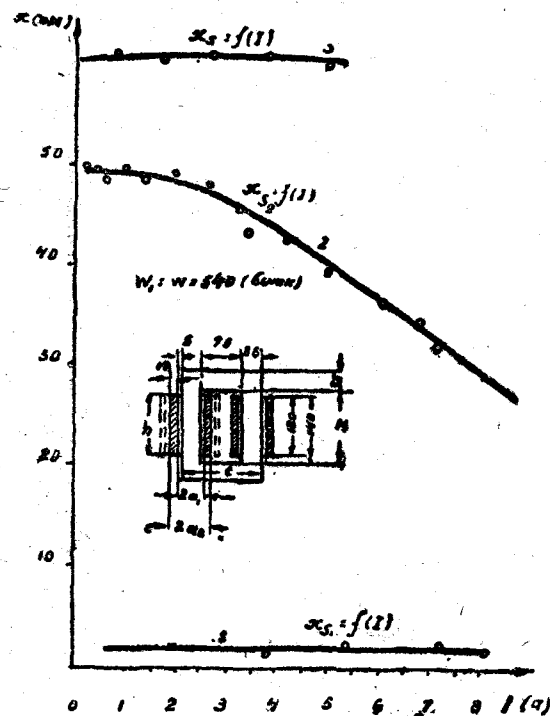


Рис. 5. Зависимость индуктивного сопротивления рассеяния от тока в обмотках трансформатора при различном расположении обмоток.

между катушками отсутствует. Как видим, оно несколько больше, чем x_{ss} , что объясняется отсутствием влияния одного потока на другой. Но, в общем, кривая 3 подтверждает наш вывод о том, что x_s в данном случае примерно равно удвоенному реактивному сопротивлению одной катушки трансформатора с разомкнутым магнитопроводом.

Допустим теперь, что поперечное сечение окна внешней обмотки значительно увеличено (для того, чтобы пропустить внутри ее стержни магнитного шунта, как это показано на рис. 6 и рис. 7).

Характерно, что при этом индуктивность рассеяния трансформатора мало отличается от таковой при обычном выполнении вторичной обмотки.

Здесь под потоком рассеяния следует понимать тот поток, который существует в трансформаторе при

$$I_1 w_1 + I_2 w = 0$$

и при насыщенных стержнях шунта (или при отсутствии стержней шунта, что примерно одинаково). Он, как и для рис. 3, проходит по своему пути пространства между обмотками и внешнее обширное пространство, окружающее обмотки. Основное магнитное сопротивление оказывает пространство, лежащее между обмотками, так как несмотря на его развитые размеры, его объем значительно меньше объема внешнего пространства. Стержни 2 и 1 находятся во внешнем пространстве и их влияние незначительно. В объеме максимального магнитного сопротивления нет участков магнитопровода.

Индуктивность рассеяния, как и для обычного трансформатора, определяется, в основном, параметрами обмоток и мало зависит от наличия стального сердечника.

Это положение и использовано в описываемом трансформаторе. В нем сечение окна внешней обмотки значительно увеличено и магнитный шунт вместе с обмотками подмагничивания проходит внутри внешней обмотки. В этом его характерная особенность, позволяющая улучшить внешнюю характеристику и значительно увеличить удельную отдаваемую мощность.

Трансформатор выполнен в двух вариантах. На рис. 6 показана схема первой экспериментальной конструкции. Здесь 1 и 2 — рабочие стержни сердечника трансформатора; 3 и 4 — магнитный шунт; 5 и 6 — обмотки переменного тока; 7 и 8 — обмотки подмагничивания.

Магнитный шунт выполнен в виде двух замкнутых магнитопроводов. Верхняя обмотка переменного

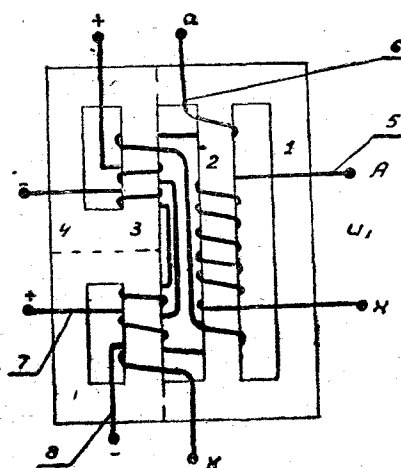


Рис. 6. Регулируемый трансформатор с магнитным шунтом, состоящим из двух замкнутых магнитных цепей, подмагничиваемых постоянным током.

тока охватывает только один стержень магнитного шунта вместе с обмотками подмагничивания (на рисунке для наглядности обмотки сдвинуты).

Достоинством этой конструкции следует считать сравнительно небольшую величину поперечного сечения окна верхней обмотки перемен-

ного тока, так как она охватывает только один стержень магнитного шунта. Недостатком — сложность магнитопровода.

На рис. 7 показана схема второй экспериментальной конструкции. Здесь 1 и 2 — рабочие стержни сердечника-трансформатора; 3 и 4 — магнитный шунт; 5 и 6 — обмотки переменного тока; 7 и 8 — обмотки подмагничивания.

Верхняя обмотка переменного тока охватывает оба стержня магнитного шунта вместе с обмотками подмагничивания.

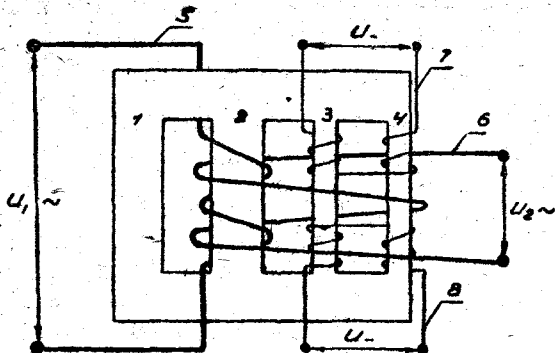


Рис. 7. Регулируемый трансформатор с магнитным шунтом, состоящим из одной замкнутой магнитной цепи, подмагничиваемой постоянным током

Достоинством этой конструкции следует считать простоту магнитопровода. Недостатком — сравнительно большую величину поперечного сечения окна верхней обмотки переменного тока. Обе конструкции имеют по две обмотки подмагничивания, из которых одна является регулирующей, а вторая — компенсационной, назначение которой будет указано позже.

3. Приближенные соотношения между переменными величинами и током подмагничивания при номинальном режиме

Из вышеизложенного вытекает, что вторичное напряжение растет вместе с ростом тока подмагничивания. Особый интерес представляет соотношение между номинальными переменными величинами и требуемым при этом подмагничиванием, так как на эти величины должны быть рассчитаны обмотки.

Чтобы приближенно выяснить это соотношение, предположим, что в трансформаторе (рис. 1) удалены стержни 3 и 4, то есть удален магнитный шунт, а сам трансформатор работает в номинальном режиме. В этом случае между верхним и нижним ярами будет действовать эквивалентная н. с., равная приблизительно н. с., создаваемой номинальным током первичной обмотки.

Для доказательства этого предположим, что обмотки обтекаются постоянным током и $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$. Возьмем интеграл напряженности поля вдоль стержней 1 и 3 или 1 и 4 (рис. 1). Он равен:

$$\oint_{1-3} \vec{H} d\vec{l} = \oint_{1-4} \vec{H} d\vec{l} = I_1 \omega_1 \quad (3-1)$$

Считая, что вектор $\vec{H}$ параллелен вектору $d\vec{l}$ и по длине стержней остается практически постоянным, а также пренебрегая магнитным

сопротивлением соответствующих участков ярем, имеем:

$$H_1 l_1 + H_w l_w = I_1 w_1 \quad (3-2)$$

Первый член левой части выражения (3-2) пренебрежимо мал по сравнению со вторым членом, так как он представляет собой падение магнитного потенциала в стальном стержне, а второй член — падение магнитного потенциала в воздухе. Поэтому выражение (3-2) можно записать в следующем виде:

$$H_w l_w \approx I_1 w_1$$

Если взять интеграл напряженности поля вдоль стержней 2 и 3 или 2 и 4, то они при условии, что $I_1 w_1 = I_2 w_2$, также будут равны $I_1 w_1$ и явятся повторением выражения (3-1).

Заметим, что приведенное здесь доказательство справедливо только при условии полного удаления магнитного шунта или при наличии значительного подмагничивания, когда магнитное сопротивление шунта во много раз больше магнитного сопротивления стержня 1. В промежуточных положениях, когда магнитное сопротивление стержней шунта соизмеримо с магнитным сопротивлением стержня 1, определение н. с., действующей на шунт, в общем виде представляет громоздкую задачу.

Если поставить на место шунт, то под влиянием найденной выше н. с. большая часть потока пройдет через него, и режим трансформатора нарушится.

Назначение обмотки подмагничивания — воспрепятствовать этому.

Обратимся к рис. 8. Допустим кривая 1 представляет идеализированную зависимость магнитного шунта от магнитодвижущей силы, а

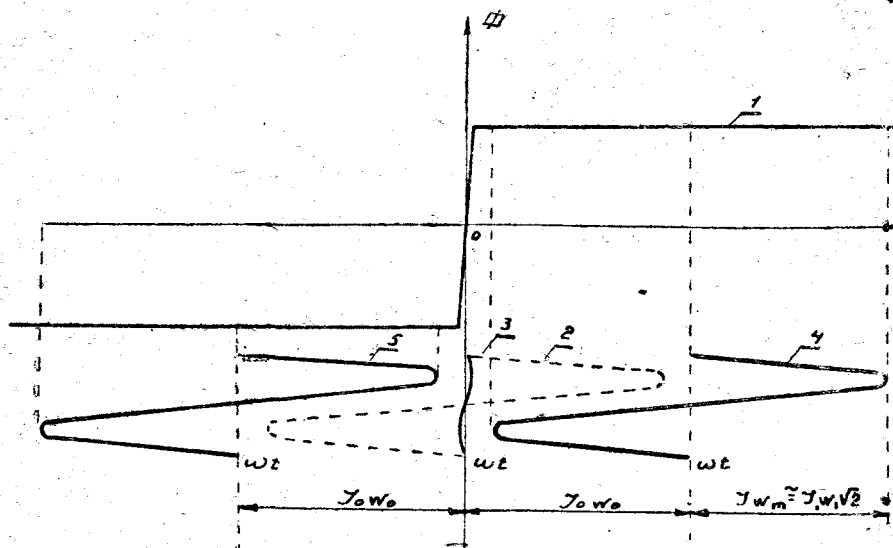


Рис. 8. Идеализированная картина постоянной и переменной н. с., приложенных к шунту в номинальном режиме.

кривая 2 — н. с. первичной обмотки, приложенную к шунту при номинальной нагрузке (кривая 3 представляет н. с. первичной обмотки в режиме холостого хода и приведена для примерной иллюстрации ее соотношения с кривой 2).

Очевидно, что переменный магнитный поток шунта будет отсутствовать, если кривую 2 сдвинуть полностью на горизонтальные участки кривой 1. Сдвинутая таким образом кривая 2 показана для обеих стержней шунта кривыми 4 и 5. При этом требуемая величина постоянной н. с. ($I_0 w_0$) должна быть немного больше амплитудного значения кривой 2.

В реальных условиях кривая намагничивания стержней шунта не имеет горизонтальных участков и резких перегибов. Поэтому полное вытеснение переменного потока из шунта связано с необходимостью значительного увеличения подмагничивания.

Поэтому практически целесообразно допустить некоторое отвлечение рабочего потока через шунт при номинальной нагрузке и номинальном вторичном напряжении, приняв в первом приближении, что требуемая максимальная н. с. обмотки подмагничивания должна быть равна

$$I_0 w_0 \cong I_1 w_1 \sqrt{2},$$

где I_1 — действующие значения переменного тока первичной обмотки трансформатора при номинальном режиме.

4. Приближенная картина работы идеального трансформатора в процессе регулирования

Допустим, что в нагруженном идеальном трансформаторе требуется установить какое-то промежуточное значение вторичного напряжения, при котором во вторичной обмотке будет протекать ток некоторой средней величины. При этом рабочий поток трансформатора будет меньше потока первичной обмотки, часть которого должна в этом

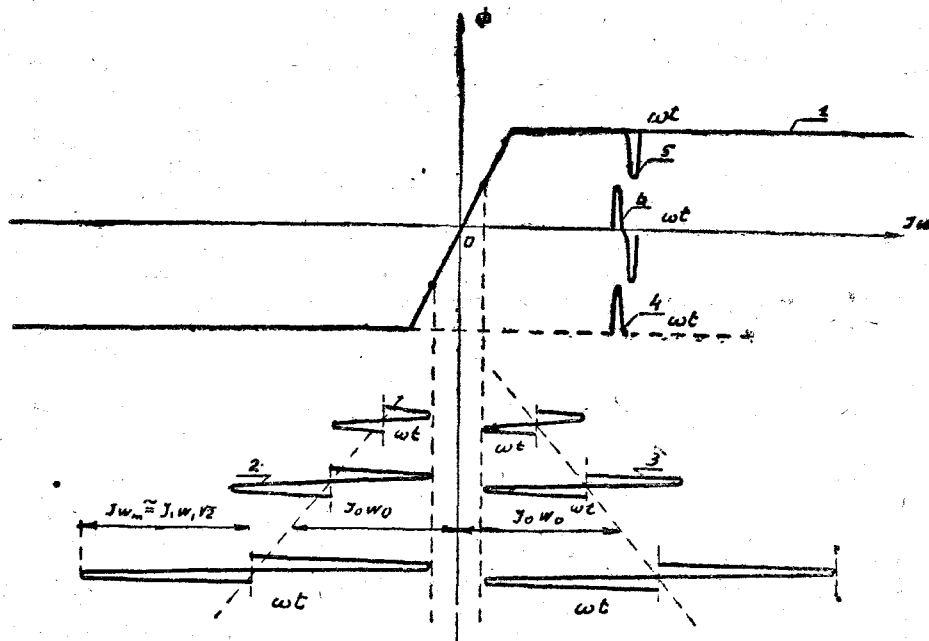


Рис 9. Идеализированная зависимость между величиной отдаваемого трансформатором тока и током подмагничивания при неизменном вторичном напряжении.

случае замкнуться через шунт. Для этого переменная н. с., выраженная кривыми 2 и 3 на рис. 9, должна быть сдвинута так, чтобы она частично заходила за пределы горизонтальных участков кривой намагничивания стали шунта — 1, как это показано на рис. 9.

Тогда потоки в стержнях шунта соответственно выразятся кривыми 4 и 5, и общий поток шунта — кривой 6. Амплитуда кривой 6 будет, в основном, определять величину вторичного напряжения трансформатора.

Естественно, что всякое изменение тока нагрузки, при неизменном подмагничивании, вызовет изменение амплитуды кривой 6. При увеличении тока нагрузки амплитуды кривой 6 увеличатся, при уменьшении тока нагрузки — уменьшатся.

Обратную зависимость будет иметь вторичное напряжение, и трансформатор независимо от потоков рассеяния будет иметь падающую внешнюю характеристику.

Для получения жесткой внешней характеристики необходимо с изменением тока нагрузки соответственно изменять подмагничивание ($I_0\omega_0$), как это показано пунктиром на рис. 9. Для этой цели служат дополнительные компенсационные обмотки подмагничивания, показанные на рисунках 6 и 7 цифрами 8. Они включаются последовательно в цепь нагрузки через трансформаторы тока и выпрямительные элементы и обеспечивают на заданной ступени регулирования соответствующее изменение подмагничивания.

Обмотки 7 на рисунках 6 и 7 служат для внешнего подмагничивания шунта и включаются в специальные регулируемые выпрямительные схемы.

5. Э. д. с. в обмотках подмагничивания

Каждая катушка обмотки подмагничивания в общем случае пронизывается магнитными потоками, имеющими форму, изображенную кривыми 4 и 5 (рис. 10). Поэтому в катушках обмотки будут находиться электродвижущие силы, определяемые производными этих кривых и показанные кривыми 6 и 7.

Так как катушки подмагничивания по отношению к переменному магнитному потоку включены встречно, то результирующую э. д. с. обоих обмоток найдем путем сложения кривых 6 и 7, перевернув предварительно одну из них на 180° .

Результирующая э. д. с. обмотки подмагничивания показана кривой 8. В этой кривой отсутствуют нечетные гармоники и явно выражена гармоника № 2. Эта вторая гармоника вызывает в цепи подмагничивания ток, который, пройдя через выпрямительную часть схемы, создает дополнительный постоянный ток подмагничивания, что нарушит работу трансформатора. Кроме этого, циркуляция токов высших гармонических в цепи подмагничивания связана с дополнительными потерями энергии. Для устранения этих токов в цепи подмагничивания вводят дополнительные индуктивности.

6. Экспериментальные данные

Экспериментальная работа была направлена на создание трансформатора нормального веса. Из ряда испытанных конструкций заслуживают внимания показанные на рис. 6 и 7. У них вес соизмерим с весом нормальных трансформаторов.

Согласно рис. 6 изготовлен трансформатор мощностью 120 *ва*. Он весит 4,5 кг. Его характеристики показаны на рис. 11. Они сняты при неизменном активном сопротивлении нагрузки в функции от тока подмагничивания. Вес аналогичного трансформатора нормального выполнения без регулирования вторичного напряжения составляет 2,5—3 кг.

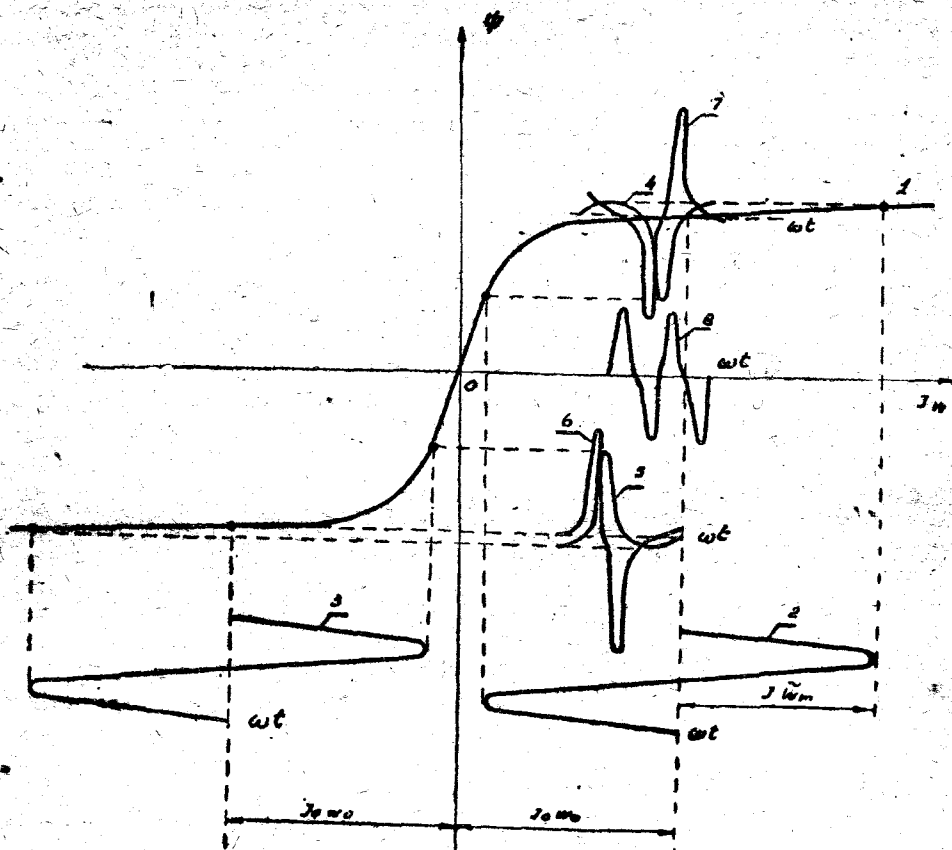


Рис. 10. Э. д. с. в обмотках подмагничивания в номинальном режиме.

Рассматривая кривые 4 и 2, видим, что при изменении подмагничивающего тока вторичное напряжение меняется от 25 до 125 в., и отдаваемая мощность — от 7 до 120 *ва*. Кривые к. п. д. и коэффициента мощности (1,3) напоминают таковые для обычного трансформатора.

При отсутствии подмагничивания во вторичную цепь передается некоторая мощность (7 *ва*), которая при данной нагрузке зависит, очевидно, от наличия воздушных зазоров в шунте, общей «геометрии» сердечника, насыщения стали и некоторых других причин.

Согласно рис. 7 изготовлен трансформатор мощностью 1000 *ва*. Он весит 36 кг. Его характеристики показаны на рис. 12. Они построены без учета потерь в цепи подмагничивания. Вес аналогичного нерегулируемого трансформатора составляет примерно 18—20 кг.

Если же регулируемый подмагничиванием трансформатор сравнивать с дросселем насыщения и вольтодобавочным трансформатором, то

преимущества в весе скажутся полностью на стороне регулируемого трансформатора.

Кривая вторичного напряжения описываемого трансформатора мало отличается от синусоиды.

Внешние характеристики трансформаторов при неизменном токе

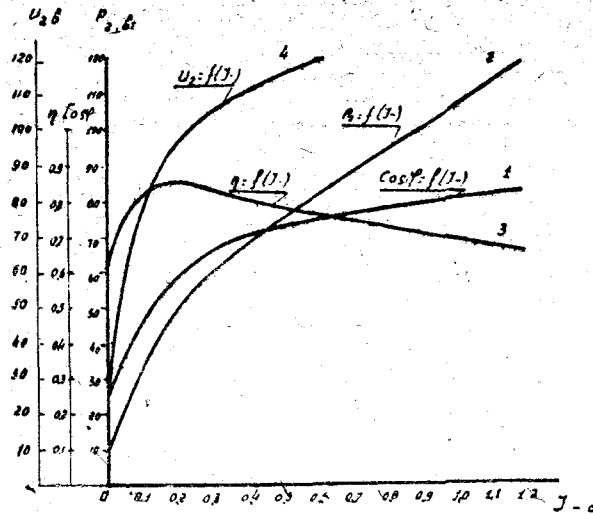


Рис. 11. Характеристики трансформатора, выполненного согласно рис. 6, мощностью 120 в_а.

подмагничивания согласно п. 4. должны быть падающими. Для получения жестких характеристик, в случае если это необходимо, следует во вторую цепь включить автоматическое устройство, воздействующее соответствующим образом на цепи подмагничивания. Экспериментально жесткая внешняя характеристика была получена на определенном диа-

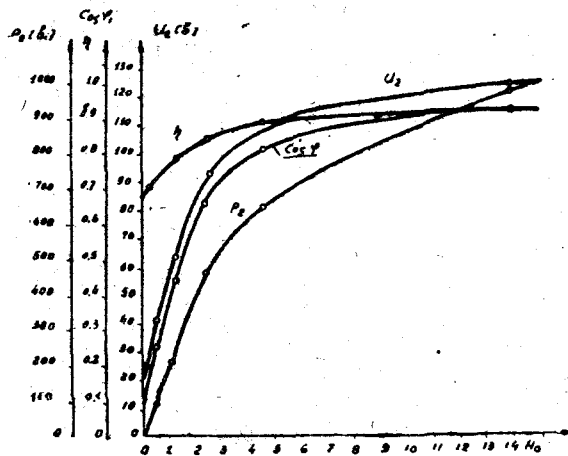


Рис. 12. Характеристики трансформатора, выполненного согласно рис. 7, мощностью 1000 в_а.

пазоне изменения нагрузки путем включения дополнительной обмотки подмагничивания последовательно в цепь нагрузки через выпрямительный мостик.

В заключение отметим, что приведенное здесь описание подмагничиваемого трансформатора является сугубо элементарным. Более полное описание трансформатора с подмагничиванием и его расчет предполагается опубликовать в будущем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. Н., Трансформаторы, Энергоиздат, 1934.
 2. Патон Б. Е., Лебедев В. К., Элементы расчетов цепей и аппаратов переменного тока для дуговой сварки, Академиздат УССР, 1953.
 3. Бесонов Л. А., Применение дросселей насыщения в современной технике, «Электричество», № 5, 1948.
 4. Бесонов Л. А., Электрические цепи со сталью.
 5. Никитин В. П., Электрические машины и трансформаторы для дуговой сварки, ОНТИ, Энергоиздат, 1934.
 6. Булгаков Н. И., Расчет трансформаторов, Госэнергоиздат, 1950.
-

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
1. Г. В. Костанди Принцип Сильвестра и его применения . . .	5
2. Э. Х. Гохман Об одном выводе формулы интегрирования по частям для интегралов Стильтьеса	13
3. Б. С. Дмитриев О методике изложения основных стехиометрических законов в курсе неорганической химии	17
4. Н. С. Никитенко Об определении критических скоростей вращающихся консольных валов	23
5. В. Я. Белецкий Уточнение размеров плоских механизмов с низшими парами, воспроизводящих заданный закон движения	37
6. В. Я. Белецкий К проектированию плоских механизмов с низшими парами, воспроизводящих заданные траектории . . .	49
7. В. Я. Белецкий Проектирование кривошипно-шатунного механизма по заданным законам движения ведущего и рабочего звеньев	57
8. В. Ф. Мальцев Теория процесса заклинивания роликового механизма свободного хода	69
9. В. Ф. Мальцев Новый метод испытания на выносливость на роликах применительно к зубчатой передаче	75
10. Г. И. Коган-Вольман К вопросу выбора и определения показателей качества навивки гибких проволоочных валов . . .	85
11. Г. И. Коган-Вольман Метод экспериментального исследования износостойкости гибких проволоочных валов	89
12. А. А. Иванов Работа асинхронного генератора с конденсаторным возбуждением при переменной скорости вращения ротора .	97
13. А. А. Иванов Бесконтактный электрический генератор двойного тока	105
14. В. А. Сомов Некоторые вопросы, связанные с регулированием вторичного напряжения трансформатора подмагничиванием	113
15. Информационное сообщение о совещании по гибким валам . .	127

Техредактор Бабич Н. М.

Корректор Литинецкий А. Я.

БР 02459. Зак. № 1251. Подписано к печати 20-III 1957 г. Печат. листов 10. Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бумага. листов 4,0. Обл. изд. листов 9. Тираж 500. Типография Одесского государственного университета им. И. И. Мечникова.