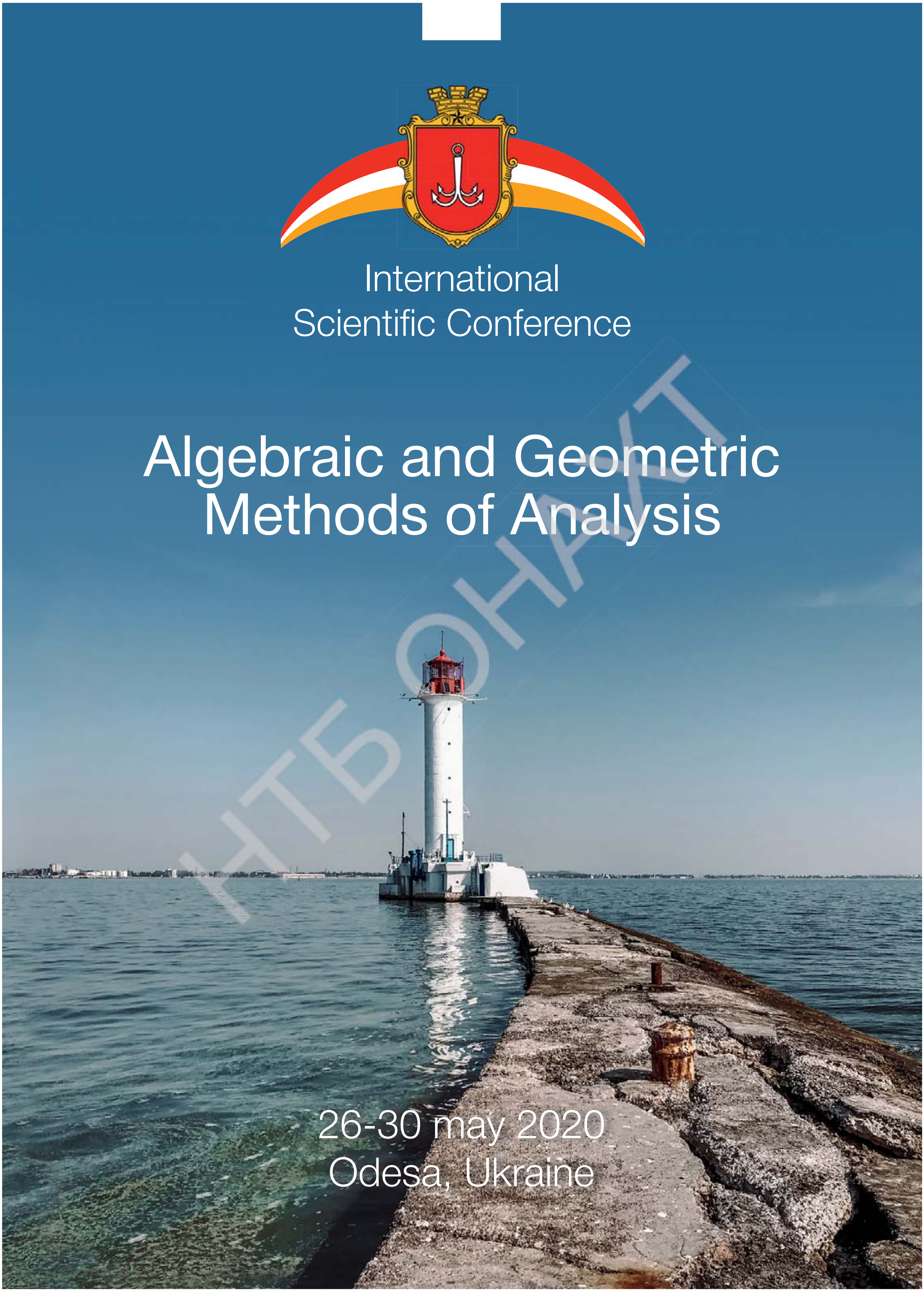

International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis

26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Bolotov D.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Borysenko O.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Cherevko Ye.
(*Odesa, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Volkov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies "Industry 4.0";
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Maksymenko S.
Cherevko Ye.
Osadchuk E.
Prus A.

Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій

Михайло Романський
(ДДПУ імені Івана Франка)
E-mail: `Romanskiy.miha@ukr.net`

Основи асимптотичної топології викладено в статті [2] Дранішнікова. Дранішников також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означає конус, надбудову і джойн.

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проекції на множники не є морфізмами. В роботі [2] А. Дранішніков означив асимптотичний добуток

$$X\tilde{\times}Y(x_0, y_0) = \{(x, y)|d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X\tilde{\times}Y$ індукована вкладенням $X\tilde{\times}Y \subset X \times Y$.

У статті [2] означено конус CX і надбудову $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору за аналогією: $CX = X\tilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_+(X)$ і $\sum X = X\tilde{\times}\mathbb{R}^2_+/i_\pm(X) = CX/i_-X$ де $i_\pm\colon X \to X\tilde{\times}\mathbb{R}^2_+$ вкладення, означені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X конус можна задавати простою формулою $CX = X \times \mathbb{R}_+$, але у статті [5] в лемі 1 доведено, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Аналогічно можна довести, що надбудова $\sum\mathbb{R}$ не ізоморфна простору $\mathbb{R}^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Лема 1. *Конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^2_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

Теорема 2. *Простори $C(\mathbb{R}_+)$ і $\sum(\mathbb{R}_+)$ не є грубо еквівалентні.*

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна означити букет $X \vee Y$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Формула для метрики Канторовича-Рубінштейна на джойні $X * \mathbb{R}_+$ між двома довільними ймовірнісними мірами $\mu = \alpha\delta_x + (1-\alpha)\delta_y$ і $\nu = \beta\delta_{x'} + (1-\beta)\delta_{y'}$ має наступний вигляд

$$d_{KP}(\mu, \nu) =| \alpha - \beta | (y + y') + \min\{\alpha, \beta\}d(x, x') + (1 - \max\{\alpha, \beta\}) | y - y' | .$$

Лема 3. *Джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}^{n+1}_+$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.*

У статті [5] аналогічний результат доведено для γ-слабо опуклих та δ-слабо вгнутих геодезійних просторів.

З лем 1 і 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. *Джойн $\mathbb{R} * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу $C\mathbb{R}$ в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Лема 5. *Нехай $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу CX в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.*

Для метричного простору (X, ρ) через $\exp X$ позначають гіперпростір простору X, тобто множину непорожніх компактних підмножин в X, наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H:

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0|A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\exp_n X$ позначимо підпростір $\exp X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені X^n, що задається умовою $(x_1, ..., x_n) \sim (y_1, ..., y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, ..., n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, ..., n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X і позначають $SP^n(X)$.

Теорема 6. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}_+$ *, симетричний степінь* $SP^3\, \mathbb{R}_+$ *та простір* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Теорема 7. *Гіперпростір* $\exp_3 \mathbb{R}$ *, симетричний степінь* $SP^3\, \mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

З теорем 6 і 7 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 8. *Гіперпростори* $\exp_3 \mathbb{R}_+$, $\exp_3 \mathbb{R}$, *симетричні степені* $SP^3\, \mathbb{R}_+$, $SP^3\, \mathbb{R}$ *та* $\mathbb{R}^3_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Конус $\mathrm{Cone}(X)$ над компактним метричним простором (X, d) — це факторпростір добутку $(X \times \mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається умовою $(x, 0) \sim (y, 0)$, $x, y \in X$. Якщо (X, d) — метричний простір і $\mathrm{diam}(X) \leq 2$, то метрика $\hat{d}$ на $\mathrm{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\hat{d}((x, t), (y, s)) = \min\{t, s\} d(x, y) + |t - s|.$$

Лема 9. *Якщо компактні метричні простори* (X, d) *і* (Y, ρ) *ліпшицево еквівалентні, то метричні простори* $\mathrm{Cone}(X)$ *і* $\mathrm{Cone}(Y)$ *також ліпшицево еквівалентні.*

Лема 10. *Півсфера* S^n_+ *та куб* I^n *ліпшицево еквівалентні.*

З лем 9 та 10, врахувавши, що $\mathrm{Cone}(\mathrm{S}^n_+) \simeq \mathbb{R}^{n+1}_+$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 11. *Конус* $\mathrm{Cone}(\mathrm{I}^n)$ *та* $\mathbb{R}^{n+1}_+$ *ліпшицево еквівалентні.*

Наступну теорему можна вважати грубим аналогом одного результату Шорі [4].

Теорема 12. *Гіперпростір* $\exp_2 \mathbb{R}^m$ *ліпшицево еквівалентний* $\mathbb{R}^m \times \mathrm{Cone}\ (\mathbb{R}P^{m-1})$, *де* $\mathbb{R}P^{m-1}$ *— проєктивний простір.*

Теорема 13. *Простори* $\mathbb{R}^3_+$ *та* $P_2(\mathbb{R})$ *не є грубо еквівалентні.*

Зауваження 14. Аналогічний результат можна довести для суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$. Нагадаємо, що $\lambda_3(\mathbb{R})$ можна визначити як факторпростір $SP^3(X)$ за наступним відношенням еквівалентності $[x, x, y] \sim [x, x, z]$. Зауважимо, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3 (див. [1]).

Зауважимо також, що простори $\mathbb{R}^3_+$ та $P_2(\mathbb{R})$ не гомеоморфні.

Література

[1] Заричный М.М. Фундаментальная група суперрасширения $\lambda_n(X)$. В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ,1984 - С. 24-31.

[2] Dranishnikov A. Asymptotic topology. Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.

[3] Romanskyi M. Coarse equivalences of functorial constructions.Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 69–77

[4] Scori R.M. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces. Fund. Math. 63 (1968).

[5] Zarichnyi M., Romanskyi M. Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.