



International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis

26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

LIST OF TOPICS

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

ORGANIZERS

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

PROGRAM COMMITTEE

Chairman: Prishlyak A. (Kyiv, Ukraine)	Kiosak V. (Odessa, Ukraine)	Pokas S. (Odessa, Ukraine)
Balan V. (Bucharest, Romania)	Kirillov V. (Odessa, Ukraine)	Polulyakh E. (Kyiv, Ukraine)
Banakh T. (Lviv, Ukraine)	Konovenko N. (Odessa, Ukraine)	Sabitov I. (Moscow, Russia)
Bolotov D. (Kharkiv, Ukraine)	Lyubashenko V. (Kyiv, Ukraine)	Savchenko A. (Kherson, Ukraine)
Borysenko O. (Kharkiv, Ukraine)	Maksymenko S. (Kyiv, Ukraine)	Sergeeva A. (Odessa, Ukraine)
Cherevko Ye. (Odessa, Ukraine)	Matsumoto K. (Yamagata, Japan)	Shelekhov A. (Tver, Russia)
Fedchenko Yu. (Odessa, Ukraine)	Mormul P. (Warsaw, Poland)	Volkov V. (Odessa, Ukraine)
Karlova O. (Chernivtsi, Ukraine)	Mykhailyuk V. (Chernivtsi, Ukraine)	Zarichnyi M. (Lviv, Ukraine)
	Plachta L. (Krakow, Poland)	

ADMINISTRATIVE COMMITTEE

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies "Industry 4.0";
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

ORGANIZING COMMITTEE

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.

Maksymenko S.
Cherevko Ye.

Osadchuk E.
Prus A.

Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій

Михайло Романський
(ДДПУ імені Івана Франка)
E-mail: Romanskiy.miha@ukr.net

Основи асимптотичної топології викладено в статті [2] Дранішнікова. Дранішников також розглядає різноманітні конструкції у асимптотичній категорії $\mathcal{A}$ (тобто категорії власних метричних просторів і асимптотично ліпшицевих відображень), зокрема пропонує новий підхід до поняття добутку. Він також означає конус, надбудову і джойн.

Декартів добуток $(X \times Y, d_X + d_Y)$ не є категорним в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$, оскільки проєкції на множники не є морфізмами. В роботі [2] А. Дранішников означив асимптотичний добуток

$$X \tilde{\times} Y(x_0, y_0) = \{(x, y) | d_X(x_0, x) = d_Y(y_0, y), x \in X, y \in Y\},$$

де x_0, y_0 — фіксовані точки в метричних просторах X та Y відповідно. Метрика на $X \tilde{\times} Y$ індукована вкладенням $X \tilde{\times} Y \subset X \times Y$.

У статті [2] означено конус CX і надбудову $\sum X$ в асимптотичних категоріях для кожного метричного простору за аналогією: $CX = X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2 / i_+(X)$ і $\sum X = X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2 / i_+(X) = CX / i_-X$ де $i_\pm: X \rightarrow X \tilde{\times} \mathbb{R}_+^2$ вкладення, означені формулами $i_\pm(x) = (x, \pm\|x\|, 0)$. В цій же статті стверджується, що для геодезійних просторів X конус можна задавати простою формулою $CX = X \times \mathbb{R}_+$, але у статті [5] в лемі 1 доведено, що конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}_+^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$. Аналогічно можна довести, що надбудова $\sum \mathbb{R}$ не ізоморфна простору $\mathbb{R}^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Лема 1. Конус $C\mathbb{R}$ не ізоморфний півпростору $\mathbb{R}_+^2$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

Теорема 2. Простори $C(\mathbb{R}_+)$ і $\sum(\mathbb{R}_+)$ не є грубо еквівалентні.

Для будь-яких двох метричних просторів X і Y з фіксованими точками можна означити букет $X \vee Y$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ це підпростір простору $P_2(X \vee \mathbb{R}_+)$ ймовірнісних мір, носіями яких є двоточкові множини. Формула для метрики Канторовича-Рубінштейна на джойні $X * \mathbb{R}_+$ між двома довільними ймовірнісними мірами $\mu = \alpha\delta_x + (1 - \alpha)\delta_y$ і $\nu = \beta\delta_{x'} + (1 - \beta)\delta_{y'}$ має наступний вигляд

$$d_{KP}(\mu, \nu) = |\alpha - \beta| (y + y') + \min\{\alpha, \beta\} d(x, x') + (1 - \max\{\alpha, \beta\}) |y - y'|.$$

Лема 3. Джойн $\mathbb{R}^n * \mathbb{R}_+$ ізоморфний півпростору $\mathbb{R}_+^{n+1}$ в асимптотичній категорії $\mathcal{A}$.

У статті [5] аналогічний результат доведено для γ -слабо опуклих та δ -слабо вгнутих геодезійних просторів.

З лем 1 і 3 отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 4. Джойн $\mathbb{R} * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу $C\mathbb{R}$ в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.

Лема 5. Нехай $X = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Джойн $X * \mathbb{R}_+$ не ізоморфний конусу CX в асимптотичній категорії $\overline{\mathcal{A}}$.

Для метричного простору (X, ρ) через $\text{exr } X$ позначають гіперпростір простору X , тобто множину непорожніх компактних підмножин в X , наділену метрикою Гаусдорфа ρ_H :

$$\rho_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \mid A \subset O_\varepsilon(B), B \subset O_\varepsilon(A)\}.$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ через $\text{exr}_n X$ позначимо підпростір $\text{exr} X$, що складається з усіх множин потужності $\leq n$.

Нехай $\sim$ — відношення еквівалентності на степені X^n , що задається умовою $(x_1, \dots, x_n) \sim (y_1, \dots, y_n)$ тоді й тільки тоді, коли існує перестановка σ множини $\{1, \dots, n\}$ така, що $x_i = y_{\sigma(i)}$ для кожного $i = 1, \dots, n$. Факторпростір простору X^n за таким відношенням еквівалентності називають симетричним степенем простору X і позначають $SP^n(X)$.

Теорема 6. *Гіперпростір $\text{exr}_3 \mathbb{R}_+$, симетричний степінь $SP^3 \mathbb{R}_+$ та простір $\mathbb{R}_+^3$ лінійцево еквівалентні.*

Теорема 7. *Гіперпростір $\text{exr}_3 \mathbb{R}$, симетричний степінь $SP^3 \mathbb{R}$ та $\mathbb{R}_+^3$ лінійцево еквівалентні.*

З теорем 6 і 7 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 8. *Гіперпростори $\text{exr}_3 \mathbb{R}_+$, $\text{exr}_3 \mathbb{R}$, симетричні степені $SP^3 \mathbb{R}_+$, $SP^3 \mathbb{R}$ та $\mathbb{R}_+^3$ лінійцево еквівалентні.*

Конус $\text{Cone}(X)$ над компактим метричним простором (X, d) — це факторпростір добутку $(X \times \mathbb{R}_+)/\sim$, де відношення еквівалентності $\sim$ задається умовою $(x, 0) \sim (y, 0)$, $x, y \in X$. Якщо (X, d) — метричний простір і $\text{diam}(X) \leq 2$, то метрика $\hat{d}$ на $\text{Cone}(X)$ задається формулою:

$$\hat{d}((x, t), (y, s)) = \min\{t, s\}d(x, y) + |t - s|.$$

Лема 9. *Якщо компактні метричні простори (X, d) і (Y, ρ) лінійцево еквівалентні, то метричні простори $\text{Cone}(X)$ і $\text{Cone}(Y)$ також лінійцево еквівалентні.*

Лема 10. *Півсфера S_+^n та куб I^n лінійцево еквівалентні.*

З лем 9 та 10, врахувавши, що $\text{Cone}(S_+^n) \simeq \mathbb{R}_+^{n+1}$, отримуємо такий наслідок.

Наслідок 11. *Конус $\text{Cone}(I^n)$ та $\mathbb{R}_+^{n+1}$ лінійцево еквівалентні.*

Наступну теорему можна вважати грубим аналогом одного результату Шорі [4].

Теорема 12. *Гіперпростір $\text{exr}_2 \mathbb{R}^m$ лінійцево еквівалентний $\mathbb{R}^m \times \text{Cone}(\mathbb{R}P^{m-1})$, де $\mathbb{R}P^{m-1}$ — проективний простір.*

Теорема 13. *Простори $\mathbb{R}_+^3$ та $P_2(\mathbb{R})$ не є грубо еквівалентні.*

Зауваження 14. Аналогічний результат можна довести для суперрозширення $\lambda_3(\mathbb{R})$. Нагадаємо, що $\lambda_3(\mathbb{R})$ можна визначити як факторпростір $SP^3(X)$ за наступним відношенням еквівалентності $[x, x, y] \sim [x, x, z]$. Зауважимо, що простір $\lambda_3(S^1)$ гомеоморфний S^3 (див. [1]).

Зауважимо також, що простори $\mathbb{R}_+^3$ та $P_2(\mathbb{R})$ не гомеоморфні.

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Заричный М.М. Фундаментальная группа суперрасширения $\lambda_n(X)$. В кн.: Отображения и функторы. Под ред. П.С. Александрова. — Москва: МГУ, 1984 - С. 24-31.
- [2] Dranishnikov A. Asymptotic topology. Russian Math. Surveys., Vol. 55, №6 (2000), P. 71-116.
- [3] Romanskyi M. Coarse equivalences of functorial constructions. Proceedings of the International Geometry Center Vol. 12, no. 3 (2019) pp. 69-77
- [4] Scori R.M. Hyperspaces and symmetric products of topological spaces. Fund. Math. 63 (1968).
- [5] Zarichnyi M., Romanskyi M. Cone and join in the asymptotic categories. Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2017. Issue 83. P. 34-41.

S. Volkov, V. Ryazanov <i>Mappings with finite length distortion and prime ends on Riemann surfaces</i>	74
R. Skuratovskii, A. Williams <i>Minimal generating set and structure of a wreath product of groups and the fundamental group of an orbit of Morse function</i>	76
A. Savchenko, M. Zarichnyi <i>Functors and fuzzy metric spaces</i>	78
О. Чепок <i>Асимптотичні зображення $P_\omega(Y_0, Y_1, 0)$-розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять добуток різного типу нелінійностей у правій частині</i>	80
Є. В. Черевко, В. Е. Березовський, Й. Микеш <i>Голоморфно-проективні перетворення локально конформно-келерових многовидів у симетричній F-зв'язності.</i>	82
Б. Фещенко <i>Графи Кронрода-Ріба функцій Морса на 2-торі та їх автоморфізми</i>	84
М. Гречнёва, П. Стеганцева <i>Приклади поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю та сталою кривиною грассманового образу в просторі Мінковського</i>	86
О. А. Кадубовський <i>Про число топологічно нееквівалентних напівмінімальних гладких функцій на двовимірному кренделі</i>	88
В. Кіосак, О. Лесечко <i>Геодезичні відображення просторів з $\varphi(Ric)$-векторними полями</i>	89
Н. Г. Коновенко, І. М. Курбатова <i>Деякі питання теорії $2F$-планарних відображень псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною f-структурою</i>	91
І. М. Лисенко, М. В. Працьовитий <i>Фрактальні властивості неперервних перетворень квадрата, пов'язані з двосимвольними зображеннями дійсних чисел</i>	93
Л. Ладиненко <i>Про геометричну характеристику спеціальних майже геодезичних відображень просторів афінного зв'язку зі скрутом</i>	94
М. І. Піструїл, І. М. Курбатова <i>Про квазі-геодезичні відображення узагальнено-рекурентних просторів</i>	96
Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова <i>Мінімальні поверхні та їх деформації</i>	98
О. Поливода <i>Про нескінченновимірні многовиди, модельовані на деяких k_ω-просторах</i>	99
М. М. Романський <i>Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпишцева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій</i>	101
А. С. Сердюк, І. В. Соколенко <i>Асимптотика найкращих рівномірних наближень класів згорток періодичних функцій високої гладкості</i>	103
О. Синюкова <i>Певні характеристики спеціальної геометрії дотичного розширювання простору афінної зв'язності, породженої інваріантною теорією наближень базового простору</i>	105