

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объема многогранника

И. Х. Сабитов

(Россия, Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)

E-mail: isabitov@mail.ru

Светлой памяти А.Д. Милки посвящаю

Известно, что всякий изгибаемый многогранник является также и нежестким относительно бесконечно малых (б.м.) изгибаний, причем б.м. изгибание, порожденное изгибанием, обладает тем свойством, что соответствующая вариация объема многогранника оказывается равной нулю. Известно также, что существуют нежесткие многогранники, для б.м. изгибаний которых вариация объема отлична от нуля, и поэтому можно утверждать, что такие б.м. изгибания многогранника нельзя продолжить в его изгибание. Следовательно, требование равенства нулю вариации объема разбивает все б.м. изгибания на два класса: те, которые заведомо не продолжимы в изгибания, и другие, для которых выполнено необходимое условие (в виде равенства нулю соответствующей вариации объема) их продолжимости в изгибания. Продолжая эту классификацию с требованием равенства нулю первой, второй и n -й вариации объема, мы получаем также классы деформаций разных порядков, промежуточных между б.м. изгибаниями первого порядка и изгибаниями. По-видимому, те многогранники, которые А.Д. Милка назвал в [1] и [2] *флексорами*, как раз и отличаются от обычных нежестких многогранников и от изгибаемых многогранников порядком нулевой вариации объема (кстати, поскольку для изгибаний вариации объема всех порядков равны нулю, то немедленно встает обратный вопрос - какова природа тех аналитических деформаций многогранника, для которых вариации объема всех порядков равны нулю?).

Формально описать нежесткие многогранники с нулевой вариацией объема очень легко, для этого достаточно добавить к обычным уравнениям б.м. изгибаний еще одно уравнение $\delta V = 0$. Мы же хотим выяснить природу тех многогранников и их б.м. изгибаний, для которых близкие к ним нежесткие многогранники тоже имеют нулевую вариацию объема. Пусть нежесткий симплицальный многогранник P_0 имеет n вершин M_i с координатами (x_i, y_i, z_i) , $1 \leq n$ и пусть $\{\xi_i, \eta_i, \zeta_i\}$ Тогда объем $V(\varepsilon)$ деформированного многогранника с координатами вершин $M_i(\varepsilon) = (x_i + \varepsilon\xi_i, y_i + \varepsilon\eta_i, z_i + \varepsilon\zeta_i)$ имеет представление

$$V(\varepsilon) = V_0 + \varepsilon V_1 + \varepsilon^2 V_2 + \varepsilon^3 V_3,$$

где V_0 - объем исходного многогранника, а V_1 - первая вариация объема. Рассматривая объем многогранника как сумму объемов тетраэдров с общей вершиной и предполагая, что для всех аффинно преобразованных многогранников (а они, как известно, тоже нежесткие) вариации объема тоже нулевые, получаем, что такое возможно, только если б.м. изгибания рассматриваемого многогранника удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \sum_{\langle i,j,k \rangle} \det \begin{pmatrix} \xi_i & y_i & z_i \\ \xi_j & y_j & z_j \\ \xi_k & y_k & z_k \end{pmatrix} &= 0, \\ \sum_{\langle i,j,k \rangle} \det \begin{pmatrix} x_i & \eta_i & z_i \\ x_j & \eta_j & z_j \\ x_k & \eta_k & z_k \end{pmatrix} &= 0, \\ \sum_{\langle i,j,k \rangle} \det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \zeta_i \\ x_j & y_j & \zeta_j \\ x_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

с суммированием по согласованно ориентированным граням. Далее, для б.м. изгибаний аффинно преобразованных многогранников тоже должны выполняться аналогичные равенства, что приводит к следующим новым условиям на б.м.изгибания исходного многогранника

$$\sum_{\langle i,j,k \rangle} \left(\det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \eta_i \\ x_j & y_j & \eta_j \\ x_k & y_k & \eta_k \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_i & z_i & \zeta_i \\ x_j & z_j & \zeta_j \\ x_k & z_k & \zeta_k \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\sum_{\langle i,j,k \rangle} \left(\det \begin{pmatrix} x_i & y_i & \xi_i \\ x_j & y_j & \xi_j \\ x_k & y_k & \xi_k \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} z_i & y_i & \zeta_i \\ z_j & y_j & \zeta_j \\ z_k & y_k & \zeta_k \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\sum_{\langle i,j,k \rangle} \left(\det \begin{pmatrix} y_i & z_i & \eta_i \\ y_j & z_j & \eta_j \\ y_k & z_k & \eta_k \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} x_i & z_i & \xi_i \\ x_j & z_j & \xi_j \\ x_k & z_k & \xi_k \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Оказывается, требование выполнения этих новых условий для б.м. изгибаний аффинно преобразованных многогранников уже не приводит к появлению других новых условий, т.е. появляется какой-то неисследованный еще аналог венка Дарбу с обрывом или замыканием цепочки таких конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] А.Д. Милка. Нежесткие звездчатые бипирамиды А.Д. Александра и С.М. Владимировой *Труды по анализу и геометрии*. Новосибирск,Изд-во Института Математики им. С.Л. Соболева, 2000, с. 414-430.
- [2] A.D. Milka. Linear bendings of star-like bipyramids. *European J. of Combinatorics*, 31 (4):1050-1064.

Бондарь О. П. <i>Об изотопности некоторых функций</i>	98
Герега А.Н., Кривченко Ю.В. <i>Управление структурой кластеров в перколяционных задачах с самоорганизацией</i>	99
Зайтов А. А., Холтураев Х. Ф. <i>Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов</i>	100
Калинина Т. И., Покась С. М., Цехмейструк Л. Г. <i>Инфинитезимальные конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения</i>	102
Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Харитонова С. В. <i>Свойства кривизны почти $C(\lambda)$-многообразий</i>	104
Клищук Б., Салимов Р. <i>Нижняя оценка для объёма образа шара</i>	105
Кузина Ю.В., Лавренюк И.В. <i>О решениях некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений</i>	107
Курбатова И. Н., Хаддад М., Пересторонева Е. <i>Об одном типе квадриструктур на римановом пространстве</i>	108
Лозиенко Д. В., Курбатова И. Н. <i>Рекуррентно-параболические пространства, допускающие канонические квази-геодезические отображения</i>	109
Покась С.М., Червинский Р.В., Цехмейструк Л.Г. <i>Группа Ли движений в симметрическом римановом пространстве 1-го класса</i>	110
Полищук О. Р. <i>Качественный анализ некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения</i>	111
Починка О. <i>Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях</i>	112
И. Х. Сабитов <i>Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объёма многогранника</i>	115
Теплицкая Я. <i>Самосжимающиеся кривые, лежащие в компакте, имеют конечную длину</i>	117
Цвентух Е., Курбатова И. Н. <i>Структурные особенности $2F$-планарных отображений римановых пространств с f-структурой</i>	118