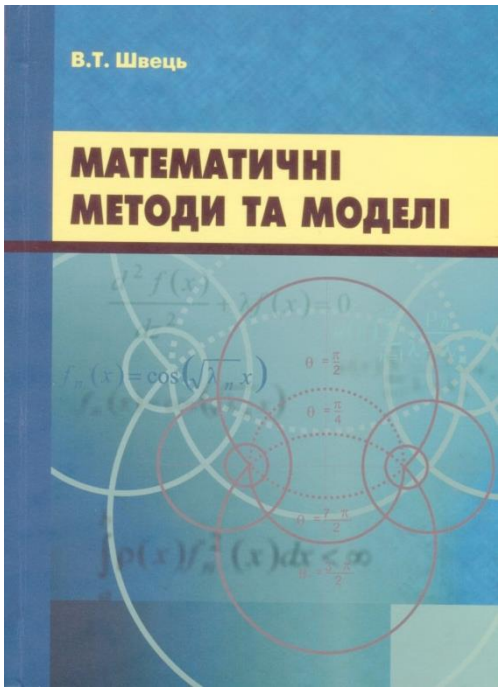


**Швець, В. Т.** Математичні методи та моделі [Текст] : навч. посіб. / Швець Валерій Тимофійович. - Херсон : Грінь Д.С., 2017. - 334 с. : Бібліогр.: с. 331-332. - ISBN 978-966-930-217-5.

Навчальний посібник присвячений викладенню основних методів математичної фізики, що широко використовуються при розв’язанні великої кількості практичних інженерних задач. В ньому широко використовуються спеціальні функції. Вони розглядаються з різних точок зору, а саме: як розв'язки звичайних лінійних диференційних рівнянь із змінними коефіцієнтами, як власні функції лінійних самоспряжених операторів, як базиси у відповідних функційних просторах. Крім того, у навчальному посібнику викладені теорія узагальнених рядів Фур'є та такі популярні методи розв'язку звичайних диференційних рівнянь та межових задач для рівнянь з частинними похідними як метод степеневих рядів та метод поділу змінних. Можливості перерахованих методів демонструються на розв'язанні великої кількості класичних задач математичної фізики, теорії теплопровідності та квантової механіки.

Розрахований на аспірантів та студентів технічних вузів.

## Передмова

Цей навчальний посібник написаний на основі курсу лекцій, що на протязі багатьох років викладався автором для аспірантів Одеської державної академії холоду Значна частина матеріалу використовувалась і у курсі лекцій для студентів. Поява посібника викликана тим, що у навчальному процесі на протязі останніх років стала відчуватись гостра нестача підручників з практично всіх розділів вищої математики. Особливо це стосується тих з них, що взагалі не вивчаються на молодших курсах технічних вузів у традиційних курсах вищої математики. Звичайно вони викладаються у вигляді окремих спецкурсів, або складових частин деяких технічних дисциплін. Зазначимо, що банк підручників для української вищої школи взагалі знаходиться у початковій стадії формування і ніша, пов’язана із спеціальними функціями та їх використанням у математичній фізиці, є незаповненою.

В основу розгляду покладені звичайні лінійні однорідні диференційні рівняння із змінними коефіцієнтами. Для них формулюються два типи межових задач. Перший тип розглядає особливі точки диференційного рівняння як межові точки області (комплексної площини), де відшукуються розв’язки рівняння. Перебираючи всі можливі варіанти поведінки розв’язків

рівняння в околі цих точок, ми одержуємо можливість знайти всі його лінійно незалежні розв'язки. Другий тип межових задач пов'язаний з розглядом задачі Штурма-Ліувілля з межовими умовами на дійсній осі першого, другого та третього родів, власними функціями якої є багато спеціальних функцій. Такий підхід дозволяє у загальному вигляді проаналізувати властивості багатьох спеціальних функцій математичної фізики.

Велику увагу автор приділяє використанню спеціальних функцій для розв'язання значної кількості межових задач математичної фізики у найбільш вживаних популярних криволінійних системах координат

## ЗМІСТ


***Передмова***……..7
***Глава 1. Метод степеневих рядів***……...8
1 1.Класифікація особливих точок диференційних рівнянь……8
1.2. Поведінка аналітичних функцій в околі особливих точок…….....15
1.3. Тригонометричні, гіперболічні та показникова функції……19
1.4. Степенева та логарифмічна функції……..24
1.5. Функції та поліноми Ерміта…….....30
1.6. Функції та поліноми Лагерра……34
1 7.Функції та поліноми Лежандра……...41
1.8. Функції Бесселя……49
1.9. Гіпергеометричні функції……...56
1.10. Задачі для самостійної роботи .....……...60
***Глава 2. Задача Штурма-Ліувілля***……63
2.1. Одновимірна класична задача Штурма-Ліувілля……63
2.2. Самоспряженість одновимірної задачі Штурма-Ліувілля……...67
2.3. Властивості власних функцій та власних значень……...72
2.4. Функції Бесселя та задача Штурма-Ліувілля……77
2.5. Узагальнена одновимірна задача Штурма-Ліувілля……80
2.6. Тривимірна задача Штурма-Ліувілля……83
2.7. Повнота власних функцій задачі Штурма-Ліувілля……87
2.8. Приклади задач, що не є задачами Штурма-Ліувілля ……90
2.9. Задачі для самостійної роботи……95
***Гпава 3. Ряди* Фур'є……**98
3.1. Тригонометричний ряд Фур'є……98
3.2. Експоненційний ряд Фур'є……102
3.3. Збіжність ряду Фур'є……104
3.4. Ряд Фур'є за функціями Бесселя (ряд Бесселя)……..110

3.5.Ряд Фур'є за поліномами Ерміта (ряд Ерміта)……112
3.6.Ряд Фур'є за функціями Лагера (ряд Лагера)……..112
3.7. Ряд Фур'є за поліномами Лежандра (ряд Лежандра)……115
3.8. Кратні ряди Фур'є……..117
3.9. Ряд Фур'є за сферичними функціями……...118
3.9.1 .Розвинення у ряд Фур'є компонент вектора……119
3.9.2.Сферичні функції та багатократні інтеграли……121
3.9.3.Сферичні функції та інтеграли з дельта – функціями……122
3.10. Задачі для самостійної роботи……124

***Глава 4. Рівняння Гельмгольца……....***127
4.1. Одновимірне рівняння Гельмгольца……...128
4.1.1. $\chi \in [a.b]$ ……...128
4.1.2. $\chi \in [0.l]$ .....……..132
4.1.3. $\chi \in [-l.l]$ ……....134
4.1.4. Циклічні межові умови……137
4.1.5. Неоднорідні межові умови……...139
4.2. Двовимірні Декартові координати……...141
4.3. Полярні координати.....……143
4.4. Еліптичні координати...……146
4.5. Двовимірні параболічні координати……....149
4.6. Тривимірні Декартові координати……...152
4.7. Циліндричні координати……..154
4.8. Сферичні координати ...……157
4.9. Розвинення плоскої хвилі на парціальні хвилі……...161
4.10. Неоднорідне рівняння Гельмгольца……...167
4.11. Задачі для самостійної роботи……168

***Глава 5. Рівняння Лапласа.....……***174
5.1. Двовимірні Декартові координати……...174
5.2. Полярні координати……...179
5.4. Двовимірні параболічні координати……188
5.5. Біполярні координати……192
5.6. Тривимірні Декартові координати……...197
5.6.1. Теплопровідність стінки……...200
5.7 Циліндричні координати……201
5.7.1. Теплопровідність стінки……...206
5.8. Сферичні координати……207
5.8.1. Теплопровідність стінки……...212
5.8.2. Обтікання кулі ідеальною рідиною……..213
5.8.3. Діелектрична куля в однорідному електричному полі……..216
5.9. Витягнуті сфероїдальні координати……220
5.10. Сплюснуті сфероїдальні координати……225
5.11 Тривимірні параболічні координати……...229
5.12. Задачі для самостійної роботи……233

***Глава 6. Рівняння Пуассона*** ..... ……235
6.1 Неоднорідні диференційні рівняння……235
6.2. Теплопровідність стінки з внутрішніми джерелами тепла……238
6.2.1. Стінка, утворена паралельними площинами……..238
6.2.2. Стінка, утворена циліндричними поверхнями……...241
6.2.3. Стінка, утворена сферичним поверхнями……...243
6.3. Межові задачі з неоднорідними межовими умовами……245
6.4. Двовимірні Декартові координати……...247
6.5. Течія у трубі з трикутним перерізом……249
6.6. Полярні координати……...252
6.7 Провідна сфера у полі точкового заряду……..255

***Глава*** 7. ***Хвильове рівняння*** ..... ……258
7.1.Стаціонарна задача……258
7.1.1. Приклади……263
7.2.Задача Коші для однорідного рівняння……265
7.2.1.Приклади……267
7.3.Задача Коші для неоднорідного рівняння……269
7.4. Задачі для самостійної роботи……271

***Глава 8. Рівняння теплопровідності***……..278
8.1.Одновимірне однорідне рівняння теплопровідності……..278

8.2.Одновимірне неоднорідне рівняння теплопровідності ……..286
8.3. Неоднорідні межові умови……...289
8.4. Межові умови спряження……290
8.5. Рівняння теплопровідності ($-\infty < t < \infty$)……...297
8.1.1.Приклади……300
8.6.Задача Коші для однорідного рівняння……302
8.2.1.Приклади……304
8.7.Задача Коші для неоднорідного рівняння……306
8.8. Задачі для самостійної роботи……308

*Глава 9. Рівняння Шредінгера*.....…….316
9.1 .Перша межова задача для одновимірного рівняння……..317
9.2. Потенціал з прямокутним профілем……319
9.3. Гармонійний осцилятор……323
9.4. Рівняння Шредінгера для атома водню……..326

***Література*** .....…….331