

# International scientific conference «Algebraic and geometric methods of analysis»

Book of abstracts



May 31 - June 5, 2017  
Odessa  
Ukraine

## LIST OF TOPICS

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

## ORGANIZERS

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

## PROGRAM COMMITTEE

|                                                  |                                               |                                           |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------------|-------------------------------------------|
| <b>Chairman: Prishlyak A.</b><br>(Kyiv, Ukraine) | <b>Maksymenko S.</b><br>(Kyiv, Ukraine)       | <b>Rahula M.</b><br>(Tartu, Estonia)      |
| <b>Balan V.</b><br>(Bucharest, Romania)          | <b>Matsumoto K.</b><br>(Yamagata, Japan)      | <b>Sabitov I.</b><br>(Moscow, Russia)     |
| <b>Banakh T.</b><br>(Lviv, Ukraine)              | <b>Mashkov O.</b><br>(Kyiv, Ukraine)          | <b>Savchenko A.</b><br>(Kherson, Ukraine) |
| <b>Fedchenko Yu.</b><br>(Odesa, Ukraine)         | <b>Mykytyuk I.</b><br>(Lviv, Ukraine)         | <b>Sergeeva A.</b><br>(Odesa, Ukraine)    |
| <b>Fomenko A.</b><br>(Moscow, Russia)            | <b>Milka A.</b><br>(Kharkiv, Ukraine)         | <b>Strikha M.</b><br>(Kyiv, Ukraine)      |
| <b>Fomenko V.</b><br>(Taganrog, Russia)          | <b>Mikesh J.</b><br>(Olomouc, Czech Republic) | <b>Shvets V.</b><br>(Odesa, Ukraine)      |
| <b>Glushkov A.</b><br>(Odesa, Ukraine)           | <b>Mormul P.</b><br>(Warsaw, Poland)          | <b>Shelekhov A.</b><br>(Tver, Russia)     |
| <b>Haddad M.</b><br>(Wadi al-Nasara, Syria)      | <b>Moskaliuk S.</b><br>(Wien, Austria)        | <b>Shurygin V.</b><br>(Kazan, Russia)     |
| <b>Herega A.</b><br>(Odesa, Ukraine)             | <b>Panzhenskiy V.</b><br>(Penza, Russia)      | <b>Vlasenko I.</b><br>(Kyiv, Ukraine)     |
| <b>Khruslov E.</b><br>(Kharkiv, Ukraine)         | <b>Pastur L.</b><br>(Kharkiv, Ukraine)        | <b>Zadorozhnyj V.</b><br>(Odesa, Ukraine) |
| <b>Kirichenko V.</b><br>(Moscow, Russia)         | <b>Plachta L.</b><br>(Krakov, Poland)         | <b>Zarichnyi M.</b><br>(Lviv, Ukraine)    |
| <b>Kirillov V.</b><br>(Odesa, Ukraine)           | <b>Pokas S.</b><br>(Odesa, Ukraine)           | <b>Zelinskiy Y.</b><br>(Kyiv, Ukraine)    |
| <b>Konovenko N.</b><br>(Odesa, Ukraine)          | <b>Polulyakh E.</b><br>(Kyiv, Ukraine)        |                                           |

## ADMINISTRATIVE COMMITTEE

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Volkov V., Director of the Educational Research Institute of Mechanics, Automation and Computer Systems named after P. M. Platonov;
- Bukaros A., Dean of the Faculty of automation, mechatronics and robotics

## ORGANIZING COMMITTEE

Kirillov V.  
Konovenko N.  
Fedchenko Yu.

Hladysh B.  
Nuzhnaya N.  
Osadchuk E.

Maksymenko S.  
Khudenko N.  
Cherevko E.

# О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга

**Нарманов Абдигаппар Якубович**

(Национальный университет Узбекистана, Ташкент, Узбекистан)

*E-mail:* narmanov@yandex.ru

**Турсунов Байрамали Акбарович**

(Каршинский государственный университет, Карши, Узбекистан)

*E-mail:* t.bayramali@yandex.com

В этой работе мы изучим геометрию некоторых субмерсий, которые возникают при исследовании геометрии орбит векторных полей Киллинга. Геометрия орбит векторных полей является объектом многочисленных исследований в связи ее важностью в геометрии и других областях математики [2].

Изучению геометрии субмерсий посвящены многочисленные исследования ([1]-[5]), в частности в работе [3] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

Пусть  $M$  — гладкое риманово многообразие размерности  $n$  с римановой метрикой  $g$ ,  $\nabla$  — связность Леви-Чивита,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение, определенное римановой метрикой  $g$ .

Напомним, что векторное поле  $X$  на  $M$  называется векторным полем Киллинга, если однопараметрическая группа локальных преобразований  $x \rightarrow X^t(x)$ , порожденная полем  $X$ , состоит из изометрий [2]. Множество всех векторных полей Киллинга на многообразии  $M$ , обозначаемое  $K(M)$ , образует алгебру Ли над полем действительных чисел. Известно, что алгебра Ли  $K(M)$  является конечномерной.

Гладкость в данной работе означает гладкость класса  $C^\infty$ .

**Определение 1.** Дифференцируемое отображение  $\pi : M \rightarrow B$  максимального ранга, где  $B$  — гладкое многообразие размерности  $m$ , называется субмерсией при  $n > m$ .

По теореме о ранге дифференцируемой функции для каждой точки  $p \in B$  полный прообраз  $\pi^{-1}(p)$  является подмногообразием размерности  $k = n - m$ . Таким образом субмерсия  $\pi : M \rightarrow B$  порождает слоение  $F$  размерности  $k = n - m$  на многообразии  $M$ , слоями которого являются подмногообразия  $L_p = \pi^{-1}(p)$ ,  $p \in B$ .

Пусть  $F$ -слоение размерности  $k$ , где  $0 < k < n$ . Обозначим через  $T_q F$ -касательное пространство слоя  $L_p$  в точке  $q \in L_p$ , через  $H_q F$ -ортогональное дополнение подпространства  $T_q F$ . В результате возникают подрасслоения  $TF = \{T_q F\}$ ,  $HF = \{H_q F\}$  касательного расслоения  $TM$  и имеем ортогональное разложение  $TM = TF \oplus HF$ . Таким образом каждое векторное поле  $X$  разложимо в виде:  $X = X^v + X^h$ , где  $X^v \in TF$ ,  $X^h \in HF$ . Если  $X^h = 0$  (соответственно  $X^v = 0$ ), то поле  $X$  называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

Напомним, что если дифференциал субмерсии  $\pi : M \rightarrow B$  сохраняет длину горизонтальных векторов, то она называется римановой. Известно, что риманова субмерсия порождает риманово слоение. Слоение  $F$  называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой точке к слоению, остается ортогональной к слоению во всех своих точках.

Кривая называется горизонтальной, если ее касательный вектор является горизонтальным.

Пусть  $\gamma : [a, b] \rightarrow B$  — гладкая кривая в  $B$ , и  $\gamma(a) = p$ . Горизонтальная кривая  $\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow M$ ,  $\tilde{\gamma}(a) \in \pi^{-1}(p)$  называется горизонтальным поднятием кривой  $\gamma[a, b] \rightarrow B$ , если  $\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$  для всех  $t \in [a, b]$ .

Отображения  $S : V(F) \times HF \rightarrow V(F)$ , заданное формулой  $S(X, U) = \nabla_X^v U$  называется вторым основным тензором, где  $V(F)$ ,  $HF$ -множество всех вертикальных и горизонтальных векторных полей соответственно.

При фиксированном поле нормалей  $X \in HF$  отображение  $S(U, X)$  обращается в тензорное поле  $S_X$  типа  $(1,1)$ :

$$S(U, X) = S_X U = \nabla_U^v X,$$

где  $\nabla_U^v X$ -вертикальная компонента векторного поля  $\nabla_U X$ .

Тензорное поле  $S_X$  является линейным отображением и поэтому задается матрицей  $S(U, X) = AU$ .

Горизонтально векторное поле  $X$  называется слоеным, если для каждого поля  $V \in V(F)$ , поле  $[V, X]$  также является вертикальным. В случае, когда поле  $X$  является слоеным, собственные значения матрицы  $A$  называются главными кривизнами слоения  $F$ . Если главные кривизны локально постоянны вдоль слоев, то слоение  $F$  называется изопараметрическим.

Рассмотрим следующие  $n$  векторные поля Киллинга в  $R^n$ , из которых  $k$  вращений,  $n - k$  параллельных переносов, где  $n = 2k + l$ .

Пусть

$$\begin{aligned} Y_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } i \text{ нечетно и } 1 \leq i \leq 2k, \\ Y_i &= -x_i \frac{\partial}{\partial x_{i-1}} + x_{i-1} \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } i \text{ четно и } 1 \leq i \leq 2k, \\ Y_i &= \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ если } 2k + 1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Результаты работы [2] показывают, что орбита этих векторных полей для каждой точки совпадает со всем пространством  $R^n$ . Поэтому мы можем определить следующую субмерсию  $\pi : R^{n+k} \rightarrow R^n$  формулой:

$$\pi(t_1, t_2, \dots, t_{n+k}) = X_{n+k}^{t_{n+k}}(\dots(X_2^{t_2}(X_1^{t_1}(O)\dots))),$$

где  $O$  — начало координат в  $R^n$ .

**Теорема 2.** *Существует такая риманова метрика  $\tilde{g}$  на  $R^n$ , что*

- 1) *Отображение  $\pi : R^{n+k} \rightarrow R^n$  является римановой субмерсией и порождает риманово слоение;*
  - 2) *Субмерсия  $\pi : R^{n+k} \rightarrow R^n$  порождает на  $R^{n+k}$  изопараметрическое слоение;*
  - 3)  *$(R^n, \tilde{g})$  является многообразием неотрицательной кривизны;*
- Если  $k \geq 2$ , то*
- 4) *Субмерсия  $\pi : R^{n+k} \rightarrow R^n$  порождает на  $R^{n+k}$  слоение нулевой кривизны.*

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 236-242.
- [2] Нарманов А.Я., Саитова С. О геометрии орбит векторных полей Киллинга. Дифференциальные уравнения. 2014, том 50, №12, с.1582-1589.
- [3] O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p. 459-469
- [4] Reinhart B. L. Foliated manifolds with bundle-like metrics. Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 69, No. 1, 1959, pp. 119-132
- [5] Zoyidov A.N., Tursunov B.A. Geometry of submersions on manifolds of nonnegative curvature. Uzbek mathematical journal. 2015 №2, pp. 27-34.

|                                                                                                                                                              |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Байтураев А. М.</b> Структура множества субмерсий, для которых все поверхности уровня являются линейно связными                                           | 107 |
| <b>Березовский В. Е., Микеш Й., Гинтерлейтнер И.</b> К вопросу о конформных отображениях римановых пространств на Риччи симметрические римановы пространства | 108 |
| <b>Березовский В. Е., Микеш Й., Черевко Е. В.</b> К вопросу о канонических почти геодезических отображениях первого типа                                     | 110 |
| <b>Гергега А. Н., Кривченко Ю. В., Швец Н. В.</b> О мультимасштабных элементах перколяционного кластера                                                      | 112 |
| <b>Дышлис А. А., Покась С. М., Прохода А. С.</b> Хирургия орбифолдов и её применение в кристаллографии                                                       | 113 |
| <b>Жураев Д. А.</b> Задача Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в трехмерной неограниченной области                                         | 114 |
| <b>Кирилов В. Х., Худенко Н. П., Витюк А. В.</b> Факторный анализ динамики процесса выживания микромицетов в фруктово-ягодных сиропах                        | 116 |
| <b>Кириченко В. Ф., Суровцева Е. В.</b> Риманова геометрия фундаментального распределения                                                                    | 118 |
| <b>Лозиенко Д. В., Курбатова И. Н.</b> Канонические квази-геодезические отображения рекуррентно-параболических пространств                                   | 120 |
| <b>Маматов М. Алимов Х.</b> О задаче преследования, описываемой дифференциальными уравнениями дробного порядка                                               | 122 |
| <b>Маматов М., Эсонов Э.</b> Способы создания проблемных ситуаций в процессе развития творческого мышления студентов                                         | 123 |
| <b>Маматов М. Собиров Х.</b> О задаче преследования по позиции в дифференциальных играх                                                                      | 124 |
| <b>Мозель В. А.</b> Движения в геометрии Лобачевского и алгебры операторов Бергмана со сдвигами                                                              | 125 |
| <b>Нарманов О. А.</b> Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий уравнения теплопроводности                                                    | 127 |
| <b>Нарманов А. Я., Турсунов Б. А.</b> О геометрии субмерсий над орбитой векторных полей Киллинга                                                             | 129 |
| <b>Нежуренко А. С., Курбатова И. Н.</b> $F$ -планарные отображения многообразий с аффинорной структурой специального типа                                    | 131 |
| <b>Покась С. М., Крутоголова А. В.</b> Инфинитезимальные проективные преобразования 2-ой степени в римановом пространстве второго приближения                | 132 |
| <b>Починка О. В.</b> О существовании энергетической функции у динамических систем                                                                            | 133 |
| <b>Ромакина Л. Н.</b> Элементы объема в гиперболическом пространстве положительной кривизны                                                                  | 135 |
| <b>Романов А. Н.</b> Расстояния внутри цилиндров, конечные и бесконечные                                                                                     | 137 |