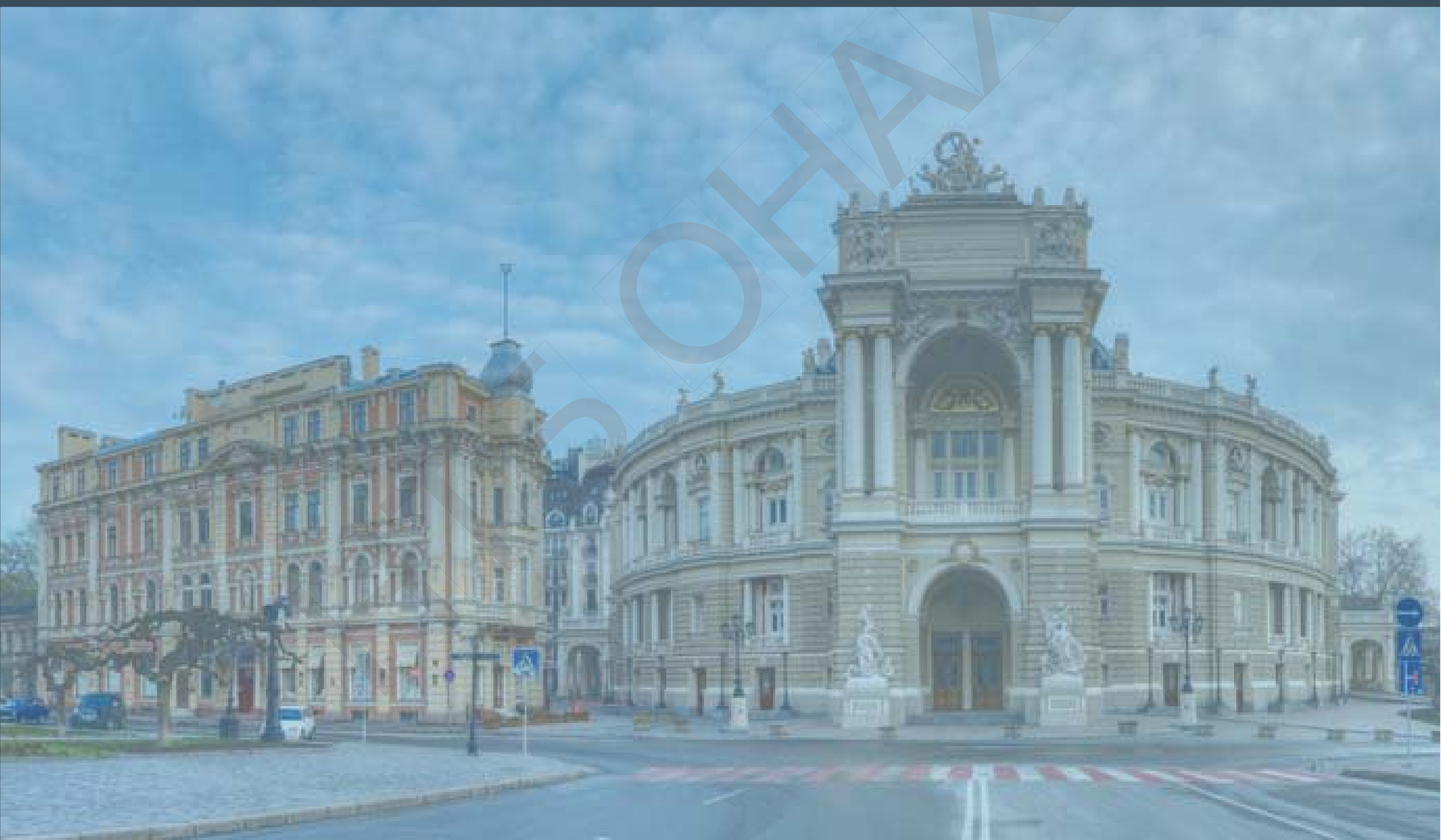
International scientific conference

“Algebraic and Geometric Methods of Analysis”

Book of abstracts



May 28 - June 3, 2019

Odesa, Ukraine

Conference webpage: *imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2019/*

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Fomenko A.
(*Moscow, Russia*)
Fomenko V.
(*Taganrog, Russia*)
Haddad M.
(*Wadi al-Nasara, Syria*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mikesh J.
(*Olomouc, Czech Republic*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Moskaliuk S.
(*Wien, Austria*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Nykyforchyn O.
(*Ivano-Frankivsk, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shvets V.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Vlasenko I.
(*Kyiv, Ukraine*)
Volkov V.
(*Odessa, Ukraine*)
Zadorozhnyj V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Prus A.
Osadchuk E.
Maksymenko S.
Khudenko N.
Cherevko E.

Инвариантеые решения двумерного уравнения теплопроводности

Нарманов Отабек Абдигаппарович
(Ташкентский университет информационных технологий, Узбекистан)
E-mail: otabek.narmanov@mail.ru

Методы группового анализа широко используются для исследования уравнений в частных производных и для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений В работах [1], [2],[3], [4],[5],[6]. рассматривается вопросы интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных дифференциальных уравнений в частных производных, на основе известных инфинитезимальных симметрий. В работе [3] разработан вычислительный метод, явно определяющий полную группу симметрий произвольного дифференциального уравнения в частных производных. В работе [4] рассматриваются вопросы групповой классификации дифференциальных уравнений и их решений. В работе [2] найдена алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для двумерного и трехмерного уравнения теплопроводности. Алгебра Ли инфинитезимальных образующих группы симметрий для одномерного уравнения теплопроводности использована в работе [6].

Рассмотрим двумерное уравнение теплопроводности

$$u_t = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}(k_i(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}) + Q(u) \tag{1}$$

где $u = u(x_1, x_2, t) \geq 0$ — температурная функция, $k_i(u) \geq 0, Q(u)$ — функции от температуры u. Функция $Q(u)$ описывает процесс тепловыделения, если $Q(u) > 0$ и процесс теплопоглощения, если $Q(u) < 0$.

Исследования показывают, коэффициенты теплопроводности $k_1(u), k_2(u)$ в достаточно широком диапазоне изменения параметров может быть описан степенной функцией температуры, т. е. имеет вид $k(u) = u^\sigma$.

Рассмотрим случай $k_1(u) = k_2(u) = u^\sigma$, $Q(u) = u$. В этом случае уравнение (1.1) имеет следующий вид:

$$u_t = u^\sigma \Delta u + \sigma u^{\sigma-1}(\nabla u)^2 + u \tag{2}$$

где $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$ — оператор Лапласа,$\nabla u = \{\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\}$ —градиент функции u.

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (1.2):

$$X_1 = \sigma x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sigma x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + 2u\frac{\partial}{\partial u}, X_2 = \exp(-\sigma t)\frac{\partial}{\partial t} + \exp(-\sigma t)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{3}$$

Потоки векторных полей X_1, X_2 порождают следующие группы преобразований соответственно

$$(t, x_1, x_2, u) \to (t, x_1 e^s, x_2 e^s, ue^{2s}), s \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$(t, x_1, x_2, u) \to (\frac{1}{\sigma}\ln(e^{\sigma t} + \sigma s), x_1, x_2, u(e^{\sigma t} + \sigma s)^{\frac{1}{\sigma}}, s \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Мы найдем решения уравнения (1.2), инвариантные относительно групп преобразований (1.4), (1.5). Для этого сначала находим инвариантые функции этих преобразований.

Известно, что [3, с. 117] гладкая функция $f : M \to R$ является инвариантной функцией группы преобразований G, действующей на многообразии M тогда и только тогда, когда $Xf = 0$ для каждой инфинитезимальной образующей X группы G.

Используя этот критерий мы находим, что функции $I_1 = \frac{(x_1+x_2)\exp(\sigma t/2)}{\sqrt{u^\sigma}}$, $I_2 = \frac{x_1}{x_2}$ являются инвариантными фунциями группы преобразований (1.4),(1.5), что вытекает из следущих равенств $X_1(I_1) = 0$, $X_1(I_2) = 0$, $X_2(I_1) = 0$, $X_2(I_2) = 0$.

Теорема 1. *Решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4),(5) имеют вид*

$$u(t,x_1,x_2)=\frac{\sigma}{2}e^t\frac{(x_1+x_2)^{2/\sigma}}{2}V(\xi) \tag{6}$$

где $V(\xi)-$ *общее решение дифференциальное уравнение второго порядка:*

$$f(\xi)VV''+f(\xi)V'^2+4\sigma(\xi+1)[\frac{\sigma}{2}(\xi^2+\xi)-2\xi+2]VV'+4[2+2(\frac{2}{\sigma}-1)]V^2=0, \tag{7}$$

где $f(\xi)=(\xi+1)^2(\xi^2+1)$, $g(\xi)=\sigma(\xi+1)[\frac{\sigma}{2}(\xi^2+\xi)-2\xi+2]$.

Теперь рассмотрим случай, когда есть поглощение тепла: $k_1(u)=k_2(u)=u^\sigma$, $Q(u)=-u$. В этом случае уравнение (1.1) имеет следующий вид:

$$u_t=u^\sigma\Delta u+\sigma u^{\sigma-1}(\nabla u)^2-u \tag{8}$$

Как показано в работе [2] следующие векторные поля являются инфинитезимальными образующими группы симметрий для уравнения (8):

$$X_1=\sigma x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\sigma x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+2u\frac{\partial}{\partial u}, X_2=\exp(\sigma t)\frac{\partial}{\partial t}+\exp(\sigma t)u\frac{\partial}{\partial u}. \tag{9}$$

Используя вышеприведенный критерий мы находим, что функции $I_1=\frac{(x_1+x_2)\exp(-\sigma t/2)}{\sqrt{u^\sigma}}$, $I_2=\frac{x_1}{x_2}$ являются инвариантными фунциями группы преобразований (1.5),(1.6), что вытекает из следущих равенств $X_1(I_1)=0$, $X_1(I_2)=0$, $X_2(I_1)=0$, $X_2(I_2)=0$.

Теорема 2. *Решения уравнения (2), инвариантные относительно групп преобразований (4),(5) имеют вид*

$$u(t,x_1,x_2)=\frac{\sigma}{2}e^{-t}\frac{(x_1+x_2)^{2/\sigma}}{2}V(\xi) \tag{10}$$

где $V(\xi)$ *общее решение дифференциальное уравнение второго порядка (7).*

Выводы. В уравнении (2) есть источник тепловыделения, поэтому в каждой точке области переменных (x_1,x_2), отличных от точек $(0,0)$, температурная функция (6) возрастает экспоненциально при возрастающем t. В уравнении (1.12) есть источник поглощения, в каждой точке области переменных (x_1,x_2), отличных от точек $(0,0)$, температурная функция (10) убывает экспоненциально при возрастающем t.

Литература

[1] Ли С., Шефферс. Симметрии дифференциальных уравнений. Т. 1. Лекции о дифференциальных уравнениях с известными инфинитезимальными преобразованиями. Москва - Ижевск: Научно-издательский центр: "Регулярная и хаотическая динамика". 2011. 704 с.

[2] Дородницын В.А.,Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях. Дифференцальые уравнения, 1983, том 19, номер 7,С. 1215–1223. http://mi.mathnet.ru/de4904

[3] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям.М.: Мир, 1989. 639 с.

[4] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений М.: Наука, 1978. 398 с.

[5] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва, Наука, 1987, 481стр.

[6] Narmanov O.A. Lie algebra of infinitesimal generators of the symmetry group of the heat equation // Journal of Applied Mathematics and Physics. 2018,6, C.373–381. DOI: 10.4236/jamp.2018.62035