International scientific conference

“Algebraic and Geometric Methods of Analysis”

Book of abstracts

May 28 - June 3, 2019

Odesa, Ukraine

Conference webpage: ***imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2019/***

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Fomenko A.
(*Moscow, Russia*)
Fomenko V.
(*Taganrog, Russia*)
Haddad M.
(*Wadi al-Nasara, Syria*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mikesh J.
(*Olomouc, Czech Republic*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Moskaliuk S.
(*Wien, Austria*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Nykyforchyn O.
(*Ivano-Frankivsk, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shvets V.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Vlasenko I.
(*Kyiv, Ukraine*)
Volkov V.
(*Odessa, Ukraine*)
Zadorozhnyj V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Prus A.
Osadchuk E.
Maksymenko S.
Khudenko N.
Cherevko E.

Проективная классификация рациональных функций

Коновенко Н.
(Кафедра высшей и прикладной математики, ОНАПТ, Одесса, Украина)
E-mail: konovenko@ukr.net

Рассматриваем группу Галуа $Aut(\mathbb{C}(z)/\mathbb{C})$, которая изоморфна группе Ли $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ и преобразования Мёбиуса имеют вид

$$f(z) \mapsto f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ и $ad - bc = 1$.

Представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в векторных полях на $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ имеет вид: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) = \langle \partial_z, z\partial_z, z^2\partial_z \rangle$.

Пусть $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - векторное поле из алгебры. Обозначим через $X^{(k)}$ продолжение этого векторного поля на многообразии k-джетов $\mathbf{J}^k$ функций. Тогда соответствие $X \mapsto X^{(k)}$ даёт представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ в векторных полях на $\mathbf{J}^k$.

Например, взяв $k = 3$, мы получаем следующую реализацию алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$:

$$\partial_z, z\partial_z - u_1\partial_{u_1} - 2u_2\partial_{u_2} - 3u_3\partial_{u_3},$$

$$z^2\partial_z - 2zu_1\partial_{u_1} - (4zu_2 + 2u_1)\partial_{u_2} - (6zu_3 + 6u_2)\partial_{u_3},$$

в стандартных координатах.

Мы говорим, что рациональная функция F на многообразии $\mathbf{J}^k$ является проективным дифференциальным инвариантом порядка $\leq k$ ([1], [2], [3]), если $X^{(k)}(F) = 0$, для всех векторных полей $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Теорема 1. (1) *Существует два независимых проективных дифференциальных инварианта порядка* ≤ 3

$$J_0 = u, J_3 = u_1^{-3}u_3 - \frac{3}{2}u_1^{-4}u_2^2,$$

и все остальные инварианты порядка ≤ 3 *являются рациональными функциями* J_0 *и* J_3.

(2) *Эти инварианты разделяют регулярные орбиты, т.е.* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *- орбиты точек, где* $u_1 \neq 0$.

Отметим, что

(1) Значение инварианта J_3 на рациональной функции $f(z)$ равно производной Шварца функции, обратной к $f(z)$.

(2) Регулярные $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в $\mathbf{J}^3$ имеют размерность 3. Есть также особые орбиты размерности 3, они $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в области $u_1 = 0, u_2 \neq 0$.

(3) Сингулярные орбиты размерности 2 являются $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбитами в области $u_1 = u_2 = 0$, $u_3 \neq 0$.

(4) Сингулярные орбиты размерности 1 являются $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбитами в области $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.

(5) Сингулярные орбиты размерностей 3, 2 и 1 соответственно задаются уравнениями:

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 \neq 0,$$

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 \neq 0,$$

$$u = c, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0,$$

где c константа.

Теорема 2. (1) *Поле проективных дифференциальных инвариантов порождается инвариантами* J_0, J_3 *и производной Трессе* $\nabla = \frac{1}{u_1}\frac{d}{dz}$, *т.е. любой проективный дифференциальный инвариант является рациональной функцией инвариантов* J_0, J_3 *и их инвариантных производных.*

(2) *Это поле разделяет регулярные* $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ *- орбиты в пространствах джетов, где регулярность орбиты в* $\mathbf{J}^k$, $k > 3$, *означает, что ее проекция в* $\mathbf{J}^3$ *регулярная орбита.*

Чтобы описать $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ - орбиты в $\mathbb{C}(z)$ отметим, что значения $J_0(f)$ и $J_3(f)$ базисных дифференциальных инвариантов J_0, J_3 на рациональной функции $f(z)$ также рациональные функции.

Степень трансцендентности поля $\mathbb{C}(z)$ равна 1, и поэтому идеал полиномиальных соотношений

$$P\left(J_0(f), J_3(f)\right) = 0 \tag{1}$$

между ними порождается неприводимым полиномом.

Коэффициенты последнего полинома зависят от f, поэтому мы будем обозначать соответствующий неприводимый многочлен $P_f(X,Y)$. Тогда соотношение (1) можно рассматривать как утверждение, что f является решением обыкновенного дифференциального уравнения 3-го порядка:

$$\varepsilon_f = \left\{P_f\left(u, u_1^{-3}u_3 - \frac{3}{2}u_1^{-4}u_2^2\right) = 0\right\} \subset J^3.$$

Проективная группа $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ является группой симметрий дифференциального уравнения $\mathcal{E}_f$ и, следовательно, действует на его пространстве решений.

Теорема 3. *Стабилизатор рациональной функции $h(z)$ для $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ - действия дискретен, если $h \neq const$.*

Мы говорим, что рациональная функция $h(z)$ является *регулярной*, если $h \neq const$.

Например, стабилизатор функции Жуковского $f(z) = \frac{z^2+1}{2z}$ является группой $\mathbb{Z}_2$, порождённой инверсией $z \mapsto z^{-1}$.

Теорема 4. *Две регулярные рациональные функции f и g являются $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда $P_f = \lambda P_g$.*

Отметим, что для трансцендентных расширений поля $\mathbb{C}$ дифференциальные инварианты, а также соответствующие дифференциальные уравнения играют роль неприводимых многочленов для конечных расширений Галуа.

Так например для функции Жуковского $f(z) = \frac{z^2+1}{2z}$

$$P_f(X,Y) = \left(X^2 - 1\right)^2 Y + \frac{3}{8},$$

а соответствующее обыкновенное дифференциальное уравнение имеет вид

$$\left(u^2 - 1\right)^2 \left(u_1 u_3 - \frac{3}{2}u_2^2\right) + \frac{3}{8}u_1^4 = 0.$$

Все регулярные решения этого уравнения являются рациональными функциями, которые $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{C})$-эквивалентны функции Жуковского.

Литература

[1] Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова Думка"НАН України, (2013), 192 с.

[2] N. Konovenko, V. Lychagin. Projective classification of rational CP1-mappings // Anal.Math.Phys. (2019), 12p. https://doi.org/10.1007/s13324-019-00281-2

[3] M. Rosenlicht. A remark on quotient spaces // An. Acad. Brasil. Ci., **35**, (1963), 487–489.

[4] A. Tresse. Sur les invariants differentiels des groupes continus de transformations // Acta Math., **18**, (1894), 1–88.