

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains

Damian Wiśniewski

(Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Warmia and Mazury, Olsztyn, Poland)

E-mail: dawi@matman.uwm.edu.pl

Let $B_1(\mathcal{O})$ be the unit ball in \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ with center at the origin \mathcal{O} and $G \subset \mathbb{R}^n \setminus B_1(\mathcal{O})$ be an unbounded domain with the smooth boundary ∂G . We assume that there exists $R \gg 1$ such that $G = G_0 \cup G_R$, where G_0 is a bounded domain in \mathbb{R}^n , $G_R = \{x = (r, \omega) \in \mathbb{R}^n \mid r \in (R, \infty), \omega \in \Omega \subset S^{n-1}, S^{n-1}$ is the unit sphere}.

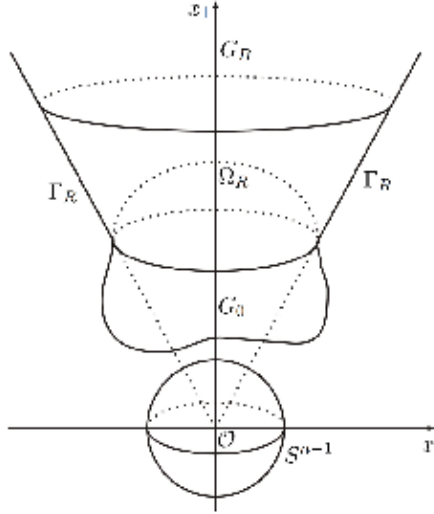


FIGURE 0.1. An unbounded cone-like domain

We consider the following linear problem :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} (a^{ij}(x)u_{x_j}) + b^i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x), & x \in G; \\ \alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{1}{|x|} \gamma \left(\frac{x}{|x|} \right) u = g(x), & x \in \partial G; \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0; \end{cases} \quad (L)$$

here $\frac{\partial}{\partial \nu} = a^{ij}(x) \cos(\vec{n}, x_i) \frac{\partial}{\partial x_j}$, where \vec{n} denotes the unit outward with respect to G normal to ∂G , $\gamma(\omega)$ is positive bounded piecewise smooth function on $\partial \Omega$ such that $\gamma(\omega) \geq \gamma_0 > 0$ and $\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \in \mathcal{D}; \\ 1, & \text{if } x \notin \mathcal{D}, \end{cases}$ $\mathcal{D} \subseteq \partial G$ is the part of the boundary ∂G , where the Dirichlet boundary condition is posed.

We assume that the following conditions are fulfilled :

(a) *the condition of uniform ellipticity :*

$$\begin{aligned} \nu \xi^2 \leq a^{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu \xi^2 \quad \forall x \in \overline{G}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \\ \nu, \mu = \text{const} > 0 \text{ and } \lim_{|x| \rightarrow \infty} a^{ij}(x) = \delta_i^j \end{aligned}$$

(b) $a^{ij}(x) \in C^0(\overline{G})$, $b^i(x) \in L_p(G)$, $p > n$; for them holds inequalities

$$\sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a^{ij}(x) - \delta_i^j|^2} \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \left(\sum_{i=1}^n |b^i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \in G_R,$$

where $\mathcal{A}(t)$, $t \geq 0$ is a monotonically increasing, nonnegative function, continuous at zero and $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{A}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$;

(c) $0 \geq c(x) \in L_{p/2}(G) \cap L_2(G)$;

(d) $f(x) \in L_{p/2}(G) \cap L_2(G)$;

(e) there exist numbers $f_1 \geq 0$, $g_1 \geq 0$, $s > 0$ such that $|f(x)| \leq f_1|x|^{-s-2}$, $|g(x)| \leq g_1|x|^{-s-1}$.

In [1] we investigated the behaviour of weak solutions to the problem (L) in a neighborhood of infinity assuming that the function $\mathcal{A}(t)$ is Dini-continuous at zero in the meaning that the integral $\int_0^d \frac{\mathcal{A}(t)}{t} dt$ is finite for some $d > 0$. More precisely, we obtained the following theorem:

Theorem 1. *If the function $\mathcal{A}(t)$ from assumption (b) is Dini-continuous at zero, then*

$$|u(x)| \leq C_0 \left(\|u\|_{2,G} + f_1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} g_1 \right) \cdot \begin{cases} |x|^{\lambda_-}, & \text{if } s > -\lambda_-; \\ |x|^{\lambda_-} \ln|x|, & \text{if } s = -\lambda_-; \\ |x|^{-s}, & \text{if } 0 < s < -\lambda_-, \end{cases}$$

where $\lambda_- = \frac{2-n-\sqrt{(n-2)^2+4\vartheta}}{2}$, ϑ is the smallest positive eigenvalue of the eigenvalue problem for the Laplace-Beltrami operator on the unit sphere.

In [3] our aim was to derive the estimate of the weak solution modulus for our problems near the infinity under assumption that leading coefficients of the equations **do not** satisfy the Dini-continuity condition. We obtained the following result:

Theorem 2. *Let $u(x)$ be a weak solution of problem (L) and assumptions (a)-(e) be satisfied with $\mathcal{A}(t)$ which is **not Dini-continuous** at zero. Then for all $\varepsilon > 0$ there are $R \gg 1$ and a constant $C_\varepsilon > 0$ such that for all $x \in G_R$*

$$|u(x)| \leq C_\varepsilon \left(\|u\|_{2,G} + f_1 + \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}} g_1 \right) \cdot \begin{cases} |x|^{\lambda_- + \varepsilon}, & \text{if } s \geq -\lambda_-; \\ |x|^{-s}, & \text{if } 0 < s < -\lambda_-. \end{cases}$$

REFERENCES

- [1] Damian Wiśniewski. Boundary value problems for a second-order elliptic equation in unbounded domains. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia Mathematica*, IX (2010) , 87–122
- [2] Mikhail Borsuk, Damian Wiśniewski. Boundary value problems for quasi-linear elliptic second order equations in unbounded cone-like domains. *Central European Journal of Mathematics*, 10(6) (2012), 2051–2071
- [3] Damian Wiśniewski. The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains *Annales Mathematicae Silesianae*, 30 (2016), 203–217
- [4] Mariusz Bodzioch, Damian Wiśniewski, Krzysztof Żyjewski Comments on behaviour of solutions of elliptic quasi-linear problems in a neighbourhood of boundary singularities. *Open Mathematics*, 15 (2017), 667–678

Damian Wi an iewski <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	66
Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M. <i>History of formation of the decimal number concept</i>	68
Yildiz S. <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	70
Yildiz S. <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	72
Безкоровайна Л. <i>Про A-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	73
Гречнєва М. О., Стеганцева П. Г. <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом</i>	74
Кузь А. М. <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел</i>	76
Маркітан В., Працьовитий М. <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	77
Подоусова Т. Ю. <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	80
Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	81
Працьовитий М. В., Лисенко І. М. <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	83
Пришляк О. О., Прус А. А. <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	86
Сердюк А. С., Соколенко І. В. <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій</i>	87
Синюкова О. М. <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	89
Скуратовський Р. В. <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	90
Черевко Є. В., Чепурна О. Є. <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	91
Федченко Ю. С. <i>Про P-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	93
Хомич Ю., Піструїл М. <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	94
Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	96
Бологова Т. Н., Макаров В. И. <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	97