

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел

Працьовитий М.В.

(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова, Інститут математики НАН України)

E-mail: prats4444@gmail.com

Лисенко І.М.

(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

E-mail: iryna.pratsiovyta@gmail.com

У математиці та її різноманітних застосуваннях використовується багато різних двосимвольних систем зображення чисел, які ґрунтуються на розкладах чисел в ряди, ланцюгові дроби, нескінченні добутки тощо. Такі системи кодування дійсних чисел називаються аналітичними. Ряди, які використовуються в якості моделей дійсних чисел в переважній більшості є або додатними, або почережними. Ми пропонуємо нову систему, залежну від двох параметрів, один з яких є додатним, а інший – від’ємним. Продуктивність нового зображення ілюструється застосуваннями.

Далі використовуватимемо позначення: $A_s = \{0, 1, \dots, s-1\}$ – алфавіт s -кової системи числення; $L_s = A_s \times A_s \times \dots \times A_s \times \dots$ – простір послідовностей алфавіту.

Нехай $\bar{g} = (g_0; g_1)$, де $0 < g_0 < 1$, $g_0 - g_1 = 1$, $g_0 > -g_1$, $\delta_0 \equiv 0$, $\delta_1 \equiv g_0$.

Лема 1. Для будь-якої послідовності $(\alpha_n) \in L_2$ ряд

$$\delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad (1)$$

є збіжним і його сума належить відріzkи $[0; g_0]$.

Зауважимо, що має місце наступне очевидне твердження: значення виразу

$$\delta_{\alpha_{n+1}} \prod_{j=1}^{n-1} g_{\alpha_j} = u_{n+1}$$

є нулем, тоді і тільки тоді, коли $\alpha_{n+1} = 0$;

додатним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є парним числом;

від’ємним числом, якщо $\alpha_{n+1} = 1$ і кількість одиниць серед чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ є непарним числом. Тому, коли послідовність (α_n) містить нескінченну кількість 1, то ряд (1) містить нескінченну кількість як додатних, так і від’ємних членів. Після видалення нульових членів ряду (1) він стане знаковмінним (почережним), причому члени з непарними номерами додатні, а з парними – від’ємні.

Теорема 2. Для будь-якого числа $x \in [0; g_0]$ існує послідовність (α_k) така, що

$$x = \delta_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j}) \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots} \quad (2)$$

Скорочений запис $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}$ ряду (2) і його суми x називається їх Δ -зображенням. При цьому число $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n -ою цифрою цього зображення.

Переважає більшість чисел відріzkи $[0; g_0]$ має єдине Δ -зображення, зліченна множина чисел має їх два, а саме: $\Delta_{01(0)} = \Delta_{11(0)}$, $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k 11(0)} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \alpha_k 01(0)}$.

Геометрію зображення дійсних чисел (топологічні, метричні та фрактальні властивості) в значній мірі розкривають властивості циліндричних та хвостових множин, ергодичні властивості оператора зсуву цифр, метрична незалежність цифр та множин, частотні характеристики, зокрема, середнє значення цифр зображення тощо.

Означення 3. Циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$ для Δ -зображення називається множина

$$\Delta_{c_1 c_2 \dots c_m} \equiv \{x : \alpha_i(x) = c_i, i = \overline{1, m}\}.$$

Якщо $\sigma_m = c_1 + c_2 + \dots + c_m$ є парним числом, то циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m 1(0)}$ є відрізком з кінцями $a = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m 1(0)}$ і $b = \Delta_{c_1 c_2 \dots c_m(0)}$, якщо ж σ_m – число непарне, то

$$\Delta_{c_1 \dots c_m} = [b; a].$$

Тоді $|\Delta_{c_1 \dots c_m}| = |b - a| = -g_1 \prod_{j=1}^m g_{c_j}$, $|\Delta_{c_1 \dots c_m i}| = |g_i| |\Delta_{c_1 \dots c_m}|$.

Якщо $\sigma_m = 2k$, то $\sup \Delta_{c_1 \dots c_m 0} = \inf \Delta_{c_1 \dots c_m 1}$.

Якщо $\sigma_m = 2k - 1$, то $\sup \Delta_{c_1 \dots c_m} = \inf \Delta_{c_1 \dots c_m 0}$.

Міра Лебега є інваріантною мірою оператора лівостороннього зсуву цифр Δ -зображення, означеного рівністю:

$$\omega(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}) = \Delta_{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k \dots}.$$

Ця функція є кусково-лінійною і має вираз $\omega(x) = \frac{1}{g_{\alpha_1(x)}} x - \frac{\delta_{\alpha_1(x)}}{g_{\alpha_1(x)}}$. Якщо $N_i(x, n)$ – це кількість цифр i серед перших n цифр Δ -зображення числа x , то границя (якщо вона існує) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_i(x, n)}{n} = \nu_i(x)$, $i \in \{0; 1\}$, називається частотою цифри i у Δ -зображенні числа x .

Теорема 4. Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел x відрізка $[0; g_0]$ мають місце рівності:

$$\nu_0(x) = g_0, \quad \nu_1(x) = -g_1.$$

Теорема 5. При $\tau_0 \neq g_0$ множина $M[\tau_0, \tau_1] = \{x : \nu_0(x) = \tau_0, \nu_1(x) = \tau_1\}$ є фрактальною і її розмірність Хаусдорфа-Безиковича обчислюється за формулою:

$$\alpha_0(M[\tau_0, \tau_1]) = \frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1}}{\ln g_0^{\tau_0} |g_1|^{\tau_1}}.$$

Теорема 6. Нехай $\bar{g} = (g_0, g_1, g_2)$, де $g_0, -g_1, g_2 \in (0; 1)$, $g_0 > 0 < g_2$, $g_0 + g_1 + g_2 = 1$. Неперервна ніде не монотонна функція f , означена рівністю

$$y = f(x) = f(\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3) = \delta_{\alpha_1(x)} + \sum_{k=2}^{\infty} (\delta_{\alpha_k(x)} \prod_{j=1}^{k-1} g_{\alpha_j(x)}) = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^G,$$

$\delta_0 = 0$, $\delta_1 = g_0$, $\delta_2 = g_0 + g_1$, $\Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^3 = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-4} \alpha_n$ встановлює бієктивне відображення множини канторівського типу $C[\Delta^3, \{0, 1\}]$ з фрактальною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\log_3 2$ на відрізок $[0; g_0]$.

У доповіді пропонуються розв'язки і інших тополого-метричних та ймовірнісних задач, що стосуються цього нового зображення дійсних чисел

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Працьовитий М.В. Геометрія класичного двійкового зображення дійсних чисел. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. — 2012. — 68с.

- [2] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.
- [3] *Турбин А.Ф., Працьовитий Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. - Київ: Наукова думка, 1992. - 208 с.

Damian Wi an iewski <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	66
Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M. <i>History of formation of the decimal number concept</i>	68
Yildiz S. <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	70
Yildiz S. <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	72
Безкоровайна Л. <i>Про A-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	73
Гречнєва М. О., Стеганцева П. Г. <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом</i>	74
Кузь А. М. <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел</i>	76
Маркітан В., Працьовитий М. <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	77
Подоусова Т. Ю. <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	80
Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	81
Працьовитий М. В., Лисенко І. М. <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	83
Пришляк О. О., Прус А. А. <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	86
Сердюк А. С., Соколенко І. В. <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій</i>	87
Синюкова О. М. <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	89
Скуратовський Р. В. <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	90
Черевко Є. В., Чепурна О. Є. <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	91
Федченко Ю. С. <i>Про P-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	93
Хомич Ю., Піструїл М. <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	94
Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	96
Бологова Т. Н., Макаров В. И. <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	97