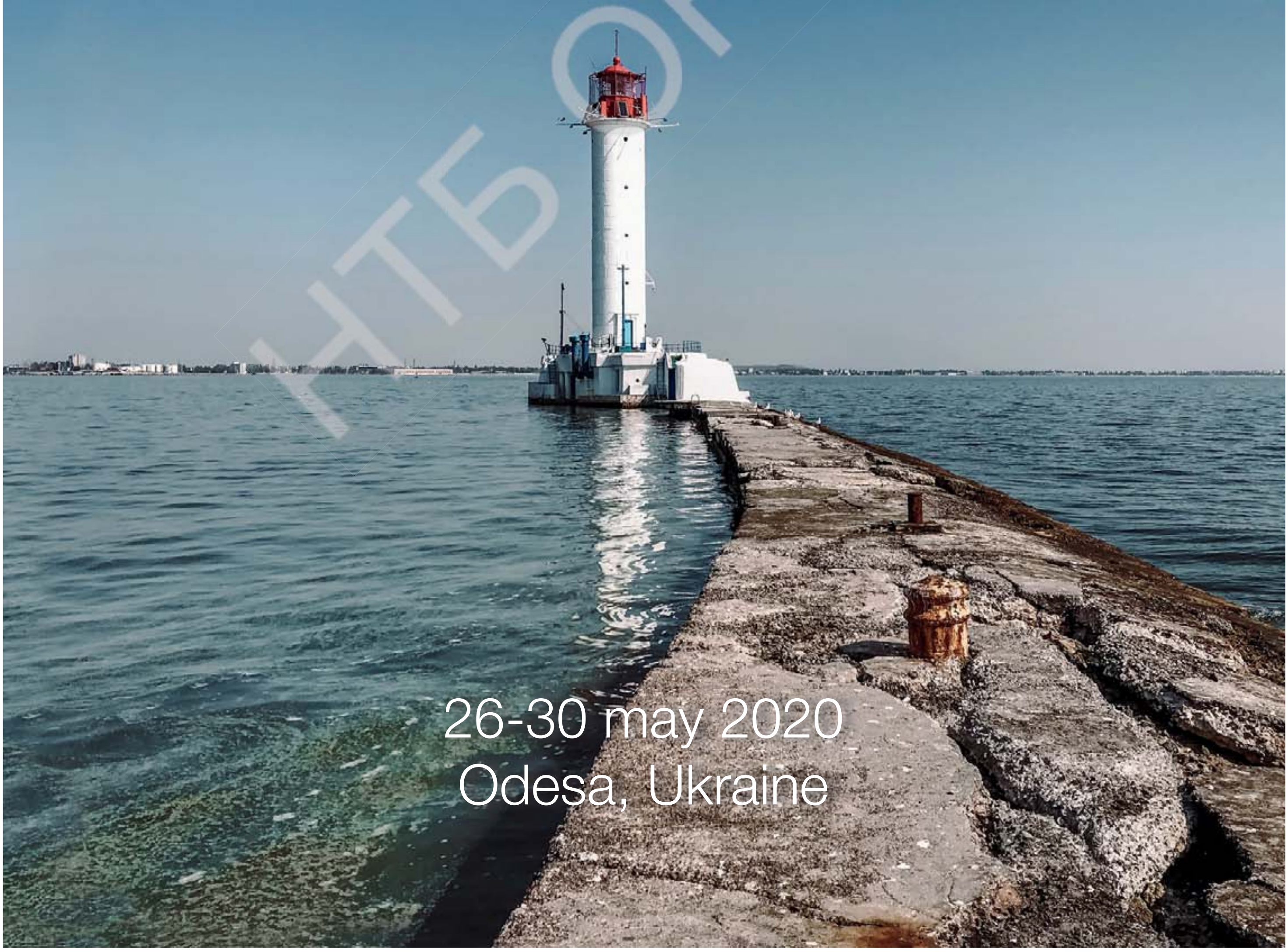
International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis



26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Bolotov D.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Borysenko O.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Cherevko Ye.
(*Odesa, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Volkov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies "Industry 4.0";
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Maksymenko S.
Cherevko Ye.
Osadchuk E.
Prus A.

Поиск точных решений уравнений гидродинамической модели заряженного газа с помошью теории симметрий

С. М. Кляхандлер
(Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова)
E-mail: `kliakhandler.sm16@physics.msu.ru`

Описание механизма возникновения разности электрических потенциалов, основанное на гидродинамической модели заряженного газа, было предложено В.И. Пустовойтом в работе [1]. Им было получено следующее нелинейное дифференциальное уравнение для описания распределения электрического поля при одномерном движении заряженного газа:

$$\frac{\partial^2 y(\xi,\tau)}{\partial\xi\partial\tau} = \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial^2 y(\xi,\tau)}{\partial\xi^2} - (y(\xi,\tau)-y_0)\frac{\partial y(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right), \tag{1}$$

где $y(\xi,\tau)$ – безразмерная напряженность электрического поля, ξ,τ – пространственная и временная координаты, y_0 – постоянная.

В докладе представлен метод построения точных решений уравнения (1), основанный на теории симметрий [2].

Теорема. Алегбра Ли точечных симметрий уравнения (1) бесконечномерна и порождена векторными полями

$$\begin{gathered}
X_1 = \left(F_1(\tau) + \frac{\tau\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\dot{F}_1(\tau) + \frac{\tau u_0}{2} - \frac{\tau y}{2} + \frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y},\\
X_2 = \left(F_2(\tau) + \frac{\xi}{2}\right)\frac{\partial}{\partial\xi} + \tau\frac{\partial}{\partial\tau} + \left(\dot{F}_2(\tau) + \frac{u_0}{2} - \frac{y}{2}\right)\frac{\partial}{\partial y},\\
X_3 = F_3(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\tau} + \dot{F}_3(\tau)\frac{\partial}{\partial y},
\end{gathered} \tag{2}$$

где $F_1(\tau), F_2(\tau), F_3(\tau)$ – произвольные функции, а точка – производная по τ.

Эта алгебра симметрий применяется для построения точных решений уравнения (1). Например, рассматривая симметрию X_2 и полагая $F_2(\tau) \equiv 1$, получим поток φ_t, порождаемый этим векторным полем. Он имеет следующий вид

$$\varphi_t = \{x \longrightarrow (x+2)e^{\frac{p}{2}} - 2, \tau \longrightarrow \tau e^p, y \longrightarrow (y-u_0)e^{-\frac{p}{2}} + u_0\}, \tag{3}$$

где p – параметр сдвига вдоль траекторий. Тогда инвариантное решение имеет вид

$$y(\tau,\xi) = \frac{1}{\sqrt{t}}J(z) + u_0, \qquad z = \frac{x+2}{\sqrt{t}}, \tag{4}$$

где $J(z)$ – произвольная функция.

Получим редуцированное обыкновенное дифференциальное уравнение, которое интегрируется в квадратурах, однако ввиду громоздкости общее решение записывать не будем. Одно из частных решений имеет вид

$$U(z) = \frac{-2(z+2)\exp\left(-\frac{(z+4)^2}{4}\right) - 6\mathrm{KummerM}\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{(z+4)^2}{4}\right)}{(z+4)\exp\left(-\frac{(z+4)^2}{4},\right)}, \tag{5}$$

где KummerM(μ, ν, z) – функция Куммера, решение вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z\frac{d^2y}{dz^2} + (\nu - z)\frac{dy}{dz} - \mu y = 0. \tag{6}$$

Решение исходного уравнения получим, подставив выражение z через исходные переменные системы τ, ξ

$$y(\tau, \xi) = \frac{4\sqrt{\tau} + 4\xi\sqrt{\tau} + \xi^2\sqrt{\tau} + 6\tau^{3/2} + 12\tau + 6\xi\tau + 4u_0\tau^2 + 2u_0\tau^{3/2} + u_0\xi\tau^{3/2}}{\tau^{3/2}(4\sqrt{\tau} + \xi + 2)}. \tag{7}$$

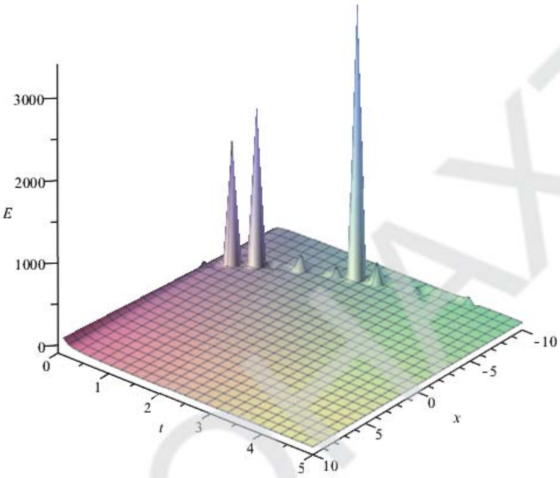


Рис. 0.1. График напряженности электрического поля

Можно увидеть, что на графике присутствует особенность в виде кривой, определяемой нулем знаменателя $4\sqrt{\tau} + \xi + 2 = 0$. Именно на этой кривой напряженность поля стремится к бесконечности – скапливаются заряды и возможно появление молнии.

Литература

[1] Пустовойт В.И. О механизме возникновения молнии // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51, №8. С. 996-1002.

[2] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Contact geometry and nonlinear differential equations, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications,* **101**. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.