

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail: tatyana_top@mail.ru

Н. В. Вашпанова

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

E-mail: vasha_nina@ukr.net

Нехай у E_3 -просторі задана однозв'язна регулярна поверхня S класу C^3 рівнянням $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2)$, де x^1, x^2 -криволінійні координати змінної точки S .

Регулярне сімейство поверхонь S_t , яке залежить від малого параметра t ,

$$\tilde{\mathbf{r}}(x^1, x^2, t) = \mathbf{r}(x^1, x^2) + t\mathbf{y}(x^1, x^2) \quad (1)$$

зветься нескінченно малою (н.м) деформацією першого порядку з вектором зміщення $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ класу C^3 .

Припустимо, що при н.м. деформації (1) лінії геодезичного скруту (LGT-лінії) [1] переходять у лінії геодезичного скруту (в головному) і зберігається повна гаусова кривина K поверхні S .

Аналітично задача про існування таких н.м. деформацій S зводиться до дослідження і розв'язування наступної системи рівнянь відносно невідомих $T^{\alpha\beta}$, T^α , μ , ψ :

$$\begin{cases} T_{,\alpha}^{\alpha k} - b_\alpha^k T^\alpha = \mu_\alpha c^{k\alpha}, & b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + T_{,\alpha}^\alpha = 0, & c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \\ (c_{\alpha i} h_{j\beta} + 2H c_{\beta i} g_{\alpha j}) T^{ij} = (\psi + \mu) h_{\alpha\beta} + 2c_{\alpha i} T_{,\beta}^i - c_k^j g_{\alpha\beta} T_{,j}^k, \\ c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha d^{ij} + 2\mu = 0, \end{cases} \quad (2)$$

де $g_{\alpha\beta}$, $c_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ - метричний, дискримінантний та сітковий тензори S відповідно, H -середня кривина, $b_{\alpha\beta}$ -коефіцієнти другої квадратичної форми S , $b_\alpha^k = g^{k\beta} b_{\beta\alpha}$, $g^{\alpha\beta}$ - елементи матриці оберненої до матриці $\|g_{ij}\|$, $d^{ij} = \frac{1}{K} c^{i\alpha} c^{j\beta} b_{\alpha\beta}$, комою позначено коваріантне диференціювання на базі g_{ij} , індекси всюди приймають значення 1,2.

Через будь-який роз'язок системи рівнянь (2) вектор зміщення набуває вигляду

$$\mathbf{y}(M) = \int_{M_0 M} \left(c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \mathbf{r}_\beta - \mu \mathbf{r}_i + c_{i\alpha} T^\alpha \mathbf{n} \right) dx^i + \mathbf{y}_0,$$

де криволінійний інтеграл обчислюється вздовж будь-якої спрямованої кривої, що належить S і з'єднує довільно фіксовану точку M_0 із змінною точкою M . Векторне поле \mathbf{y} при цьому буде однозначною функцією (з точністю до сталого вектора \mathbf{y}_0), в силу однозв'язності S .

Нехай S - мінімальна поверхня ($H = 0$).

Справедлива наступна

Теорема 1. *Н.м. деформація першого порядку мінімальної поверхні S із стаціонарними LGT-лініями і повною гаусовою кривиною цілком визначається тензорами*

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \left(d^{\alpha i} T_{,i}^\beta + d^{\beta i} T_{,i}^\alpha \right)$$

та функціями $\mu = -\psi = -\frac{1}{2} c_{i\alpha} T_{,j}^\alpha d^{ij}$, які представлені через контраваріантний вектор T^α , який є розв'язком наступної системи рівнянь:

$$K_\alpha d^{\alpha i} T_{,i}^\beta - K d^{\alpha i} \left(T_{,i}^\beta \right)_{,\alpha} + K^2 d_\alpha^\beta T^\alpha = 0. \quad (3)$$

Очевидно, що система рівнянь (3) завжди має розв'язок $T^\alpha = 0$. Тоді вектор зміщення $\mathbf{y} = const$, що означає жорсткість поверхні S при даній н.м. деформації.

Позначимо $T^1 = \psi(x^1, x^2)$, $T^2 = \nu(x^1, x^2)$ і віднесемо поверхню S до ліній кривини, які в даному випадку утворюють ізотермічну сітку. Тоді система рівнянь (3) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \psi_{11} - \psi_{22} + a\psi_1 + b\psi_2 + c\psi = 0, \\ \nu_{11} - \nu_{22} + d\nu_1 + e\nu_2 + f\nu = 0, \end{cases} \quad (4)$$

де a, b, c, d, e, f -відомі функції точки S . Кожне із цих рівнянь є однорідним диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних гіперболічного типу. Будемо шукати інтеграли цих рівнянь, які приймають певні значення

$$\psi \Big|_{x^1+x^2=x'_0} = t_1(x^1+x^2), \quad \psi \Big|_{x^1-x^2=y'_0} = s_1(x^1-x^2)$$

для рівняння (4.1) на характеристиках $x^1+x^2=x'_0$ і $x^1-x^2=y'_0$
і

$$\nu \Big|_{x^1+x^2=x''_0} = t_2(x^1+x^2), \quad \nu \Big|_{x^1-x^2=y''_0} = s_2(x^1-x^2)$$

для рівняння (4.2) на характеристиках $x^1+x^2=x''_0$ і $x^1-x^2=y''_0$.

Будемо рахувати, що функції

$$t_1(x^1+x^2), s_1(x^1-x^2), t_2(x^1-x^2), s_2(x^1-x^2)$$

мають неперервні похідні першого порядку і

$$t_1(y'_0) = s_1(x'_0), t_2(y''_0) = s_2(x''_0).$$

Згідно задачі Гурса [2], яку ми отримали, кожній парі функцій

$$t_1(x^1+x^2), s_1(x^1-x^2), \quad t_2(x^1-x^2), s_2(x^1-x^2)$$

відповідають єдині розв'язки цих рівнянь $\psi(x^1, x^2)$ і $\nu(x^1, x^2)$ відповідно.

Отже, має місце

Теорема 2. *Кожна мінімальна поверхня допускає н.м. деформацію зі стаціонарними LGT-лініями та повною гаусовою кривиною. Вектор зсуву $\mathbf{y}(x^1, x^2)$ при цьому залежить від наступних довільних регулярних функцій*

$$t_1(x^1+x^2), t_2(x^1-x^2), s_1(x^1-x^2), s_2(x^1-x^2).$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] Вашпанова Т.Ю., Безкоровайная Л.Л. LGT-сеть и ее деформации. Современные проблемы математики и механики, Том 4. Математика, Вып.№2. К 100-летию со дня рождения Ефимова Н.В – Москва, 2011, с.157-163.
[2] Кошляков Н.С. и др. Уравнения в частных производных математической физики. Учебное пособие для мех.-мат. фак.ун-тов, М., "Высшая школа 1970, 712 с.

Damian Wi an iewski <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	66
Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M. <i>History of formation of the decimal number concept</i>	68
Yildiz S. <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	70
Yildiz S. <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	72
Безкоровайна Л. <i>Про A-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	73
Гречнёва М. О., Стеганцева П. Г. <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом</i>	74
Кузь А. М. <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел</i>	76
Маркітан В., Працьовитий М. <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	77
Подоусова Т. Ю. <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	80
Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	81
Працьовитий М. В., Лисенко І. М. <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	83
Пришляк О. О., Прус А. А. <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	86
Сердюк А. С., Соколенко І. В. <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій</i>	87
Синюкова О. М. <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	89
Скуратовський Р. В. <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	90
Черевко Є. В., Чепурна О. Є. <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	91
Федченко Ю. С. <i>Про P-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	93
Хомич Ю., Піструїл М. <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	94
Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	96
Бологова Т. Н., Макаров В. И. <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	97