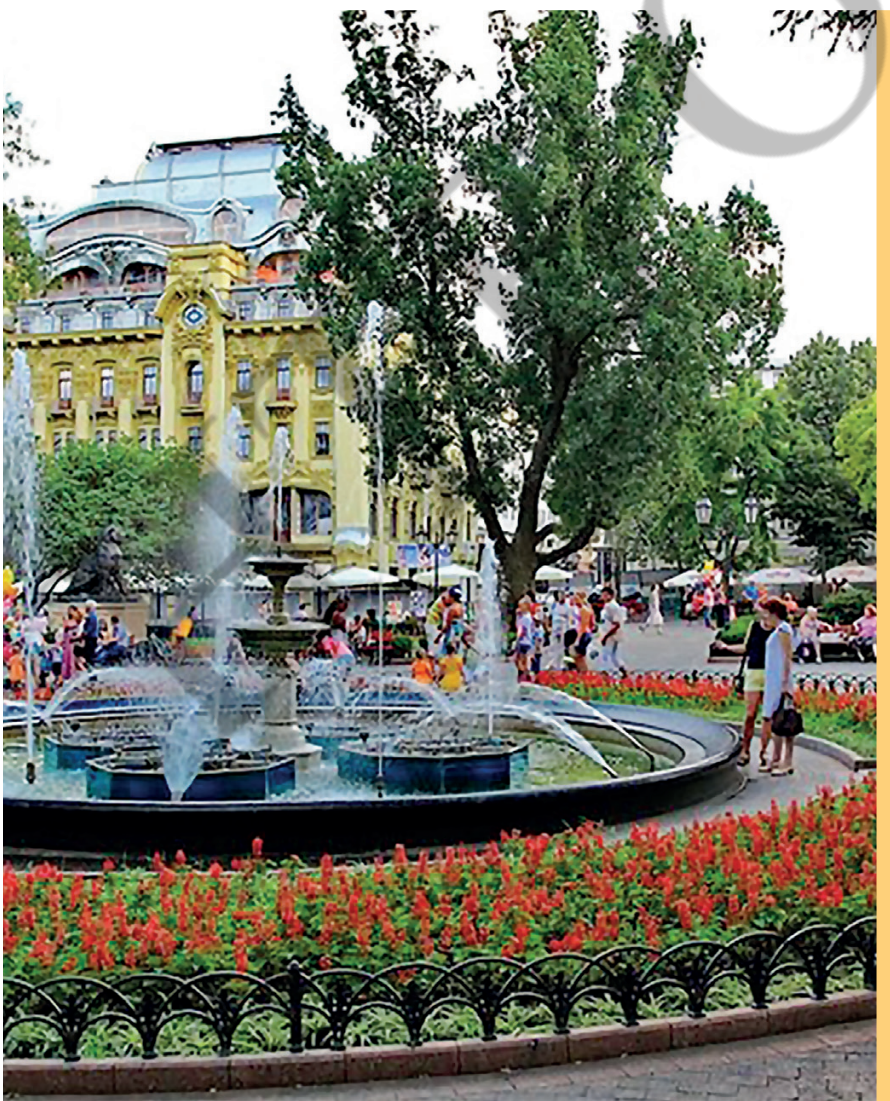
International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis



Devoted to 160 anniversary of
Dvytro Grave
(25.08.1863 - 19.12.1939)
Academician of the Ukrainian Academy of Sciences, the first director of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

May 29 – June 1, 2023
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric and topological methods in natural sciences
- Geometric problems in mathematical analysis

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National University of Technology
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- Kyiv Mathematical Society

Scientific Committee

- **Bolotov D.** (*Kharkiv, Ukraine*)
- **Bondarenko V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Boychuk O.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Boyko V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Cherevko Ye.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Dorogovtsev A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Drozd Yu.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Gerasymenko V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Fedchenko Yu.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Kiosak V.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Kochubei A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Konovenko N.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Maksymenko S.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Mikhailets V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Ostrovskyi V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Petravchuk A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Plaksa S.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Portenko M.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Pratsiovytyi M.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Savchenko O.** (*Kherson, Ukraine*)
- **Romanyuk A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Timokha O.** (*Kyiv, Ukraine*)

Organizing commitee

- **Maksymenko S.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Konovenko N.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Fedchenko Yu.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Cherevko Ye.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Osadchuk Ye.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Sergeeva O.** (*Odesa, Ukraine*)

HTBOHTY

Thinness at infinity and Deny's principle of positivity of mass in the theory of Riesz potentials

Natalia Zorii
(Institute of Mathematics of NASU, Tereshchenkivska 3, 01601, Kyiv-4, Ukraine)
E-mail: zorii@imath.kiev.ua

This talk is based on [9], and it deals with the theory of potentials on $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, with respect to the Riesz kernel $|x-y|^{\alpha-n}$, $\alpha \in (0,2]$, $\alpha < n$, where $|x-y|$ is the Euclidean distance between $x, y \in \mathbb{R}^n$. Denote by $\mathfrak{M}^+$ the cone of all positive Radon measures μ on $\mathbb{R}^n$ such that the Riesz *potential*

$$U^\mu(x) := \int |x-y|^{\alpha-n}\, d\mu(y)$$

is not identically infinite on $\mathbb{R}^n$, which according to [5, Section I.3.7] occurs if and only if

$$\int_{|y|>1} \frac{d\mu(y)}{|y|^{n-\alpha}} < \infty.$$

Then U^μ is actually finite everywhere on $\mathbb{R}^n$, up to a set of *zero Riesz capacity*, cf. [5, Section III.1.1].

The principle of positivity of mass was first introduced by J. Deny (see e.g. [2]), and for Riesz potentials it reads as follows [3, Theorem 3.11].

Theorem 1. *For any $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^+$ such that*

$$U^\mu \leqslant U^\nu \quad \text{everywhere on } \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

we have $\mu(\mathbb{R}^n) \leqslant \nu(\mathbb{R}^n)$.

It is easy to verify that (1) can be slightly weakened by replacing 'everywhere on $\mathbb{R}^n$' by 'nearly everywhere on $\mathbb{R}^n$' (see [8, Theorem 2.6], establishing the principle of positivity of mass for potentials with respect to rather general function kernels on locally compact spaces). Recall that a proposition $\mathcal{P}(x)$ is said to hold *nearly everywhere* (*n.e.*) on $A \subset \mathbb{R}^n$ if $c_*(E) = 0$, where E is the set of all $x \in A$ for which $\mathcal{P}(x)$ fails, while $c_*(E)$ denotes the *inner Riesz capacity* of E, see [5, Section II.2.6].

The main result of this talk, given by Theorem 2, shows that Theorem 1 still holds even if (1) is fulfilled only on a proper subset A of $\mathbb{R}^n$, which however must be 'large enough' in an arbitrarily small neighborhood of $\infty_{\mathbb{R}^n}$, the Alexandroff point of $\mathbb{R}^n$. This discovery illustrates a special role of the point at infinity in Riesz potential theory, in particular with regard to the principle of positivity of mass.

Theorem 2. *Given $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^+$, assume there exists $A \subset \mathbb{R}^n$ which is not inner α-thin at infinity, and such that*

$$U^\mu \leqslant U^\nu \quad \text{n.e. on } A.$$

Then

$$\mu(\mathbb{R}^n) \leqslant \nu(\mathbb{R}^n).$$

PREPRINT

Recall that according to [4, 7], $A \subset \mathbb{R}^n$ is said to be *inner α-thin at infinity* if

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{c_*(A_k)}{q^{k(n-\alpha)}} < \infty, \tag{2}$$

where $q \in (1,\infty)$ and $A_k := A \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \ q^k \leqslant |x| < q^{k+1}\}$; or equivalently, if either A is bounded, or $x = 0$ is an inner α-irregular boundary point for the inverse of A with respect to $|x| = 1$. (For the concept of inner α-irregular points for arbitrary $A \subset \mathbb{R}^n$ and relevant results, see [6, Section 6]; compare with [5, Section V.1], where A was required to be Borel.) We emphasize that *if A is not inner α-thin at infinity, then necessarily $c_*(A) = \infty$; but not the other way around* (see [7, Section 2]).

The following theorem shows that Theorem 2 is *sharp* in the sense that the requirement on A of not being α-thin at infinity can not in general be weakened.

Theorem 3. *If $A \subset \mathbb{R}^n$ is inner α-thin at infinity, then there are $\mu_0, \nu_0 \in \mathfrak{M}^+$ such that $U^{\mu_0} = U^{\nu_0}$ nearly everywhere on A, but nonetheless, $\mu_0(\mathbb{R}^n) > \nu_0(\mathbb{R}^n)$.*

Nevertheless, Theorem 2 remains valid for *arbitrary* $A \subset \mathbb{R}^n$ once we impose upon $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^+$ suitable additional requirements (see Theorem 4 below).

A measure $\mu \in \mathfrak{M}^+$ is said to be *carried* by $A \subset \mathbb{R}^n$ if $\mathbb{R}^n \setminus A$ is μ-negligible, or equivalently if A is μ-measurable and $\mu = \mu|_A$, $\mu|_A$ being the trace of μ to A, cf. [1, Section V.5.7]. We denote by $\mathfrak{M}^+_A$ the cone of all $\mu \in \mathfrak{M}^+$ carried by A. (For closed A, μ is carried by A if and only if it is supported by A.)

A measure $\mu \in \mathfrak{M}^+$ is said to be *C-absolutely continuous* if $\mu(K) = 0$ for every compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ of zero Riesz capacity. This certainly occurs if $\int U^\mu \, d\mu$ is finite (or, more generally, if U^μ is locally bounded); but not conversely, see [5, pp. 134–135].

Theorem 4. *For any set $A \subset \mathbb{R}^n$ and any C-absolutely continuous measures $\mu, \nu \in \mathfrak{M}^+_A$ such that $U^\mu \leqslant U^\nu$ n.e. on A, we still have $\mu(\mathbb{R}^n) \leqslant \nu(\mathbb{R}^n)$.*

Remark 5. If $A \cap A_I = \varnothing$, where A_I denotes the set of all inner α-irregular points for A, then the requirement of C-absolute continuity imposed on μ and ν, is unnecessary for the validity of Theorem 4.

Remark 6. The proofs of the above-quoted theorems are based on the theory of inner α-Riesz balayage as well as on that of inner α-Riesz equilibrium measures, both originated in [6, 7] (see also [8]). The concept of inner equilibrium measure is understood in an extended sense where its energy as well as its total mass may be infinite. The following two facts of these theories are crucial to our proofs:

- $A \subset \mathbb{R}^n$ is not α-thin at infinity if and only if the inner balayage of *any* $\mu \in \mathfrak{M}^+$ to A preserves its total mass (see [7, Corollary 5.3]).
- The inner α-Riesz equilibrium measure of $A \subset \mathbb{R}^n$ exists if and only if A is α-thin at infinity (see [7, Theorem 2.1]).

Remark 7. The results presented in the talk have already found applications to minimum Riesz energy problems in the presence of external fields, see for instance [10, Section 4.10].

References

[1] Bourbaki, N.: Integration. Chapters 1–6. Springer, Berlin (2004)

HEP OFTY

[2] Deny, J.: Méthodes Hilbertiennes en Théorie du Potentiel. In: Potential Theory. CIME. Summer Schools 49, pp. 121–201. Springer, Berlin (2010)
[3] Fuglede, B., Zorii, N.: Green kernels associated with Riesz kernels. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43**, 121–145 (2018)
[4] Kurokawa, T., Mizuta, Y.: On the order at infinity of Riesz potentials. Hiroshima Math. J. **9**, 533–545 (1979)
[5] Landkof, N.S.: Foundations of Modern Potential Theory. Springer, Berlin (1972)
[6] Zorii, N.: A theory of inner Riesz balayage and its applications. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **68**, 41–67 (2020)
[7] Zorii, N.: Harmonic measure, equilibrium measure, and thinness at infinity in the theory of Riesz potentials. Potential Anal. **57**, 447–472 (2022)
[8] Zorii, N.: On the theory of capacities on locally compact spaces and its interaction with the theory of balayage. Potential Anal. (2022). https://doi.org/10.1007/s11118-022-10010-3
[9] Zorii, N.: On the role of the point at infinity in Deny's principle of positivity of mass for Riesz potentials. Anal. Math. Phys. **13**, 38 (2023)
[10] Zorii, N.: Minimum Riesz energy problems with external fields. J. Math. Anal. Appl. **526**, 127235 (2023)

Знаходження форми квантових графів за умов Діріхле на висячих вершинах

Анастасія Чернишенко
(Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса, Україна)
E-mail: nastya.chernyshenko12@gmail.com

Проблема існування коспектральних (або інакше ізоспектральних) графів виникла ще у минулому сторіччі. У класичній теорії графів коспектральними вважають неізоморфні графи з однаковим спектром матриці суміжності (див. [5], Розділ 6.1). У [4] був наведений перший приклад коспектральних графів.

У багатьох випадках більш важливу роль ніж матриця суміжності відіграє нормований лапласіан. Існують різні означення нормованого лапласіана, котрий ще називають дискретним лапласіаном (див. [7], С.2). Ми розуміємо під нормованим лапласіаном матрицю $D^{-1/2}AD^{-1/2}$, де A - матриця суміжності графа, а $D = diag\{d(v_1), d(v_2), ..., d(v_p)\}$ - матриця степенів вершин, де $d(v_j)$ - степінь вершини v_j.

У теорії квантових графів розглядають спектральні задачі, породжені рівняннями Штурма-Ліувілля на рівнобічних графах (метричних графах, з ребрами однакової довжини) з крайовими умовами Неймана або Діріхле на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана (умовами неперервності і Кірхгофа) у внутрішніх вершинах. Тут також виникає проблема коспектральності.

У [9] було показано, що існують коспектральні графи (неізометричні графи з однаковим спектром задачі Штурма-Ліувілля) у квантовій теорії графів. Слід зауважити, що у випадку графа з несумірними довжинами ребер спектр однозначно визначає форму графа [8].

Спектр задачі теорії квантових графів зв'язаний з нормованим лапласіаном відповідного
комбінаторного графа наступним чином: власні значення нормованого лапласіана взаємно

НЕ ДРУКУВАТИ

M. Bessmertnyi, V. Zolotarev *p-Hyperbolic Zolotarev functions in boundary value problems for a p th order differential operator* **113**

N. Zorii *Thinness at infinity and Deny's principle of positivity of mass in the theory of Riesz potentials* **114**

А. Чернишенко *Знаходження форми квантових графів за умов Діріхле на висячих вершинах* **116**

І. Гавриленко, Є. Петров *Стійкість мінімальних поверхонь у субріхмановому многовиді* $\widetilde{E(2)}$ **118**

М. Гречнєва, П. Стєганцева *Двовимірні неізотропні поверхні з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом постійної кривини у просторі Мінковського* **121**

В. Кіосак *Геодезичні відображення симетричних просторів* **122**

І. Курбатова *Про 3F-планарні відображення псевдо-ріманових з інтегровною структурою Яно-Хоу-Чена* **123**

М. Працьовитий, І. Лисенко, Ю. Маслова *Тополого-метрична теорія G-зображення чисел* **124**

С. Покась, А. Ніколайчук *Наближення для просторів афінної зв'язності та індуковані відображення* **125**

М. Піструіл *Закономірності квазі-геодезичних відображень узагальнено-рекурентно-параболічних просторів* **126**

М. В. Працьовитий, О. І. Бондаренко, Я. В. Гончаренко, С. П. Ратушняк *Геометрія чисел у задачах конструктивної теорії локально складних функцій* **128**

А. Сердюк, Т. Степанюк *Розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона* **130**

І. Пєтков, Р. Салімов, М. Стефанчук *Про нижню оцінку діаметра образу круга* **132**

НТБОНТУ