



International  
Scientific Conference

# Algebraic and Geometric Methods of Analysis

26-30 may 2020  
Odesa, Ukraine

## LIST OF TOPICS

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

## ORGANIZERS

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odessa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

## PROGRAM COMMITTEE

<b>Chairman: Prishlyak A.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )	<b>Kiosak V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Pokas S.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
<b>Balan V.</b> ( <i>Bucharest, Romania</i> )	<b>Kirillov V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Polulyakh E.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )
<b>Banakh T.</b> ( <i>Lviv, Ukraine</i> )	<b>Konovenko N.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Sabitov I.</b> ( <i>Moscow, Russia</i> )
<b>Bolotov D.</b> ( <i>Kharkiv, Ukraine</i> )	<b>Lyubashenko V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )	<b>Savchenko A.</b> ( <i>Kherson, Ukraine</i> )
<b>Borysenko O.</b> ( <i>Kharkiv, Ukraine</i> )	<b>Maksymenko S.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )	<b>Sergeeva A.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
<b>Cherevko Ye.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Matsumoto K.</b> ( <i>Yamagata, Japan</i> )	<b>Shelekhov A.</b> ( <i>Tver, Russia</i> )
<b>Fedchenko Yu.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )	<b>Mormul P.</b> ( <i>Warsaw, Poland</i> )	<b>Volkov V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )
<b>Karlova O.</b> ( <i>Chernivtsi, Ukraine</i> )	<b>Mykhailyuik V.</b> ( <i>Chernivtsi, Ukraine</i> )	<b>Zarichnyi M.</b> ( <i>Lviv, Ukraine</i> )
	<b>Plachta L.</b> ( <i>Krakov, Poland</i> )	

## ADMINISTRATIVE COMMITTEE

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies "Industry 4.0";
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

## ORGANIZING COMMITTEE

Kirillov V.  
Konovenko N.  
Fedchenko Yu.

Maksymenko S.  
Cherevko Ye.

Osadchuk E.  
Prus A.

ІНТЕРНАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР СПІВРОБІТНИЦТВА

## Про число топологічно нееквівалентних напівмінімальних гладких функцій на двовимірному кренделі

О. А. Кадубовський

(ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ, Україна)

E-mail: kadubovs@ukr.net

Нехай  $M_g$  – замкнена гладка орієнтовна поверхня роду  $g \geq 0$ , а  $C_n(M_g)$  – клас гладких функцій на  $M_g$  (з трьома критичними значеннями), які окрім локальних мінімумів та локальних максимумів мають лише одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла, індекс Пуанкаре якої становить  $1 - n = 2 - 2g - \lambda$ , де  $\lambda \geq 2$  – сумарне число локальних мінімумів та максимумів (напр. [4], [5]).

Функції  $f_1$  і  $f_2$  з класу  $C_n(M_g)$  називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми  $h : M_g \rightarrow M_g$  і  $h' : R^1 \rightarrow R^1$  ( $h'$  зберігає орієнтацію), такі що  $f_2 = h' \circ f_1 \circ h^{-1}$ .

Якщо  $h$  зберігає орієнтацію, то функції  $f_1$  та  $f_2$  називають топологічно спряженими (напр. [4] або ж  $O$ -топологічно еквівалентними (напр. [5])).

Через  $C_{k,l}(M_g) \subset C_n(M_g)$  позначимо клас функцій на  $M_g$ , які мають точно  $k$  локальних мінімумів (максимумів),  $l$  локальних максимумів (мінімумів) та одну критичну точку типу сідла. Якщо  $k = l = 1$ , то функції з відповідного класу називають мінімальними; якщо ж  $k = 1, l > 1$  (або  $l = 1, k > 1$ ), то функції з відповідного класу будемо називати *напівмінімальними*.

Задачі про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класів  $C_{1,1}(M_g)$  ( $g \geq 0$ ) і  $C_{k,l}(M_0)$  ( $k, l \in N$ ) було повністю розв'язано лише у 2015 р. в роботах [5] та [6] відповідно.

В загальному випадку, для натуральних  $g, k, l$  (або ж  $k, l$  і  $n = 2g + k + l - 1$ , тобто для функцій з фіксованим сингулярним типом), задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_g)$  виявилась досить важкою та нерозв'язаною до сьогодні проблемою.

Як з'ясувалося (в [2] з посиланням на роботу [1]), задача про перерахування одноклітинкових двокольорових карт з  $n$  ребрами (одне з яких є поміченим),  $k$  білими та  $l$  чорними вершинами тісно пов'язана із задачею про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(M_g)$ . Відомості про карти можна знайти, наприклад, в огляді [1] та роботі [2].

Явні формули для підрахунку числа  $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_n(T^2) \equiv C_n(M_1)$  анонсовано в [7]. Для фіксованих натуральних  $k$  і  $l$  задача про підрахунок числа топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{k,l}(T^2)$  також залишається нерозв'язаною.

З урахуванням результатів робіт [2] і [3] встановлено справедливості наступних тверджень для двовимірного кренделя  $P^2$ .

**Теорема 1.** Для довільного натурального  $n = t + 4 \geq 5$  число  $d^*(n)$   $O$ -топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,m}(P^2)$  можна обчислити за формулою

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left( \frac{(3n^2 - n - 6)}{8} \cdot C_{n+1}^6 + \sum_{j|n, j \in \{2;3;4;5;6;8\}} \phi(j) \cdot \rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \right), \quad (1)$$

де:  $\phi(q)$  – функція Ейлера;  $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$  величини  $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right) \equiv 0$ , а

$\forall j \in \{2; 3; 4; 5; 6; 8\} : \frac{n}{j} \in N$  величини  $\rho\left(n, \frac{n}{j}\right)$  визначаються за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} \rho\left(n, \frac{n}{5}\right) &= \frac{3n}{5}, & \rho\left(n, \frac{n}{6}\right) &= \frac{n}{6}, & \rho\left(n, \frac{n}{8}\right) &= \frac{n}{8}, \\ \rho\left(n, \frac{n}{3}\right) &= \frac{n(n-3)}{6}, & \rho\left(n, \frac{n}{4}\right) &= \frac{n(n-4)}{32}, & \rho\left(n, \frac{n}{2}\right) &= \frac{n(n-2)(n-4)(5n+2)}{384}. \end{aligned} \quad (2)$$

**Теорема 2** (основна). Для довільного натурального  $n = m + 4 \geq 5$  число  $d^{**}(n)$  топологічно нееквівалентних функцій з класу  $C_{1,m}(P^2)$  можна обчислити за формулами

$$d^{**}(n) = \frac{1}{2}(d^*(n) + S(n)), \quad (3)$$

де

$$S(n) = \begin{cases} \frac{(n-3)(n-1)(n+1)(5n+7)}{384}, & n = 2k+1 \\ \frac{(n-4)(n-2)(5n^2+34n+96)}{384}, & n = 2k. \end{cases} \quad (4)$$

$n$	$d(n)$	$d^*(n)$	$d^{**}(n)$	$n$	$d(n)$	$d^*(n)$	$d^{**}(n)$
5	8	4	4	21	12 087 306	575 592	288 951
6	84	16	13	22	17 968 566	816 858	409 959
7	469	67	44	23	26 212 571	1 139 677	571 516
8	1 869	237	140	24	37 589 475	1 566 377	785 361
9	5 985	667	366	25	53 068 015	2 122 723	1 063 721
10	16 401	1 649	883	26	73 854 495	2 840 739	1 423 367
11	39 963	3 633	1 894	27	101 437 245	3 756 943	1 881 702
12	88 803	7 417	3 836	28	137 637 045	4 915 841	2 461 957
13	183 183	14 091	7 203	29	184 664 025	6 367 725	3 188 185
14	355 355	25 405	12 945	30	245 181 573	8 173 019	4 091 833
15	654 654	43 650	22 112	31	322 377 804	10 399 284	5 205 312
16	1 154 062	72 166	36 503	32	420 045 164	13 126 768	6 570 279
17	1 958 502	115 206	58 086	33	542 668 764	16 444 518	8 229 569
18	3 215 142	178 678	90 018	34	695 524 060	20 457 020	10 237 300
19	5 126 010	269 790	135 660	35	884 784 516	25 279 560	12 649 062
20	7 963 242	398 242	200 162	36	1 117 639 908	31 046 082	15 534 091

ТАБЛИЦЯ 2.1. Початкові значення величин  $d(n)$ ,  $d^*(n)$  та  $d^{**}(n)$

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Cori R., Machi A. Maps hypermaps and their automorphisms: a survey I, II, III. *Expositiones Mathematicae*, 10 : 403–427, 429–447, 449–467, 1992.
- [2] Адрианов Н.М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ и его приложения*, 31(3) : 1–9, 1997.
- [3] Goupil A., Schaeffer G. Factoring  $n$ -cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*, 19(7) : 819–834, 1998.
- [4] Prishlyak A.O. Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface. *Topology and its Applications*, 119(3) : 257–267, 2002.
- [5] Кадубовський О.А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях. *Збірник праць Інституту математики НАН України*, 12(6) : 105–145, 2015.
- [6] Кадубовский А.А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. *Труды международного геометрического центра*, 8(1) : 46–61, 2015.
- [7] Кадубовський О.А. Про число топологічно нееквівалентних гладких функцій з однією критичною точкою типу сідла на двовимірному торі // Тези доповідей міжнародної конференції «Алгебраїчні та геометричні методи аналізу». Одеса, 28 травня – 3 червня 2019. С. 65-66. 94 с.

<b>S. Volkov, V. Ryazanov</b> <i>Mappings with finite length distortion and prime ends on Riemann surfaces</i>	<b>74</b>
<b>R. Skuratovskii, A. Williams</b> <i>Minimal generating set and structure of a wreath product of groups and the fundamental group of an orbit of Morse function</i>	<b>76</b>
<b>A. Savchenko, M. Zarichnyi</b> <i>Functors and fuzzy metric spaces</i>	<b>78</b>
<b>О. Чепок</b> <i>Асимптотичні зображення <math>P_\omega(Y_0, Y_1, 0)</math>-розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку, що містять добуток різного типу нелінійностей у правій частині</i>	<b>80</b>
<b>Є. В. Черевко, В. Е. Березовський, Й. Микеш</b> <i>Голоморфно-проективні перетворення локально конформно-келерових многовидів у симетричній <math>F</math>-зв'язності.</i>	<b>82</b>
<b>Б. Феценко</b> <i>Графи Кронрода–Ріба функцій Морса на 2-торі та їх автоморфізми</i>	<b>84</b>
<b>М. Гречнёва, П. Стеганцева</b> <i>Приклади поверхонь з плоскою нормальною зв'язністю та сталою кривиною грасманового образу в просторі Мінковського</i>	<b>86</b>
<b>О. А. Кадубовський</b> <i>Про число топологічно нееквівалентних напівмінімальних гладких функцій на двовимірному кренделі</i>	<b>88</b>
<b>В. Кіосак, О. Лесечко</b> <i>Геодезичні відображення просторів з <math>\varphi(\text{Ric})</math>-векторними полями</i>	<b>89</b>
<b>Н. Г. Коновенко, І. М. Курбатова</b> <i>Деякі питання теорії <math>2F</math>-планарних відображень псевдоріманових просторів з абсолютно паралельною <math>f</math>-структурою</i>	<b>91</b>
<b>І. М. Лисенко, М. В. Працьовитий</b> <i>Фрактальні властивості неперервних перетворень квадрата, пов'язані з двосимвольними зображеннями дійсних чисел</i>	<b>93</b>
<b>Л. Ладиненко</b> <i>Про геометричну характеристику спеціальних майже геодезичних відображень просторів афінного зв'язку зі скрутом</i>	<b>94</b>
<b>М. І. Піструїл, І. М. Курбатова</b> <i>Про квазі-геодезичні відображення узагальнено-рекурентних просторів</i>	<b>96</b>
<b>Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова</b> <i>Мінімальні поверхні та їх деформації</i>	<b>98</b>
<b>О. Поливода</b> <i>Про нескінченновимірні многовиди, модельовані на деяких <math>k_\omega</math>-просторах</i>	<b>99</b>
<b>М. М. Романський</b> <i>Конус, надбудова та джойн в асимптотичних категоріях. Ліпшицева та груба еквівалентності деяких функторіальних конструкцій</i>	<b>101</b>
<b>А. С. Сердюк, І. В. Соколенко</b> <i>Асимптотика найкращих рівномірних наближень класів згорток періодичних функцій високої гладкості</i>	<b>103</b>
<b>О. Синюкова</b> <i>Певні характеристики спеціальної геометрії дотичного розширення простору афінної зв'язності, породженої інваріантною теорією наближень базового простору</i>	<b>105</b>