

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Одеський національний технологічний університет**  
**Університет Інформатики і прикладних знань, м.Лодзь, Польща**  
**Національний технічний університет України «Київський**  
**політехнічний інститут»**  
**Навчально-науковий інститут комп'ютерних систем і технологій**  
**«Індустрія 4.0» ім. П.М. Платонова**

**XXII Всеукраїнська науково-технічна конференція**  
**молодих вчених, аспірантів та студентів**

**«СТАН, ДОСЯГНЕННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ**  
**ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ І ТЕХНОЛОГІЙ»**

*Матеріали конференції*



Одеса

21-22 квітня 2022 р.

Стан, досягнення та перспективи інформаційних систем і технологій /  
Матеріали XXII Всеукраїнської науково-технічної конференції молодих вчених,  
аспірантів та студентів. Одеса, 21-22 квітня 2022 р. - Одеса, Видавництво  
ОНТУ, 2022 р. – 251 с.

Збірник включає матеріали доповідей учасників конференції, які об'єднані  
за тематичними напрямками конференції.

## **ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ**

**Голова** - д.т.н., проф., **Єгоров Б.В.**, ректор ОНТУ

### **Співголови:**

**Поварова Н.М.** – к.т.н., доц., проректор з наукової роботи ОНТУ,  
**Котлик С.В.** – к.т.н., доц., директор ННІКСіТ "Індустрія 4.0" ОНТУ,  
**Даріуш Долива**, д.математичн.наук, уповноважений декана факультету  
Інформатики УІтаПЗ, м.Лодзь, Польща,  
**Ковалюк Т.В.** - к.т.н., доц., Київський національний університет імені Тараса  
Шевченка

### **Члени оргкомітету:**

**Плотніков В. М.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри ІТтаКБ ОНТУ,  
**Артеменко С.В.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри КІ ОНТУ,  
**Хобін В.А.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри АТПтаРС ОНТУ,  
**Тарасенко В.П.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри СКС НТУУ «Київський  
політехнічний інститут»,  
**Невлюдов І.Ш.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри КІТАМ ХНУРЕ,  
**Мельник А.О.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри ЕОМ НУ “Львівська  
політехніка”,  
**Жуков І.А.** – д.т.н., проф., завідувач кафедри КСтаМ НАУ.

Матеріали подано українською та англійською мовами.  
Редактор збірника Котлик С.В.

**ЗМІСТ**

<b>Розділ 1: Математичне і комп'ютерне моделювання складних процесів</b>	11
ALGORITHM FOR CONSTRUCTING AN ATTRACTIVE ROUTE BETWEEN TWO POINTS. <b>Mazurok I., Veremiov K., Goryn A.</b> (Odesa I.I. Mechnikov National University, Steps)	11
DESIGN OF AUTOMATED CONTROL SYSTEM THE ZONAL INK SUPPLY BASED A SINGLE-BOARD PLATFORM. <b>V. Fedirko, T. Neroda</b> (Ukrainian Academy of Printing)	12
CUMULATIVE DISCRETE LOGARITHM ZERO-KNOWLEDGE PROOF. <b>Volkov K., Mazurok I., Leonchik Y., Antonenko O.</b> (Odesa I. I. Mechnikov National University)	14
COMPUTER SYSTEM OF THE THERMAL MODE OF THE TOP CONVERTER LANCE. <b>Zhulkovskiy O.O., Zhulkovska I.I., Panteikov S.P, Muzychka K.O.</b> (Dniprovsky State Technical University)	16
НЕЧІТКИЙ КЛАСИФІКАТОР РІВНЯ ШКІДЛИВИХ РЕЧОВИН У ВИКИДАХ АВТОМОБІЛЯ. <b>Галушак А.В.</b> (Вінницький національний технічний університет)	18
МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ПОТОКІВ НА МОСТУ. <b>Глівінський Д. О., Сохацький А. В.</b> (Університет митної справи та фінансів)	19
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ФАЗОВОГО СЕНСОРА ВОЛОГОСТІ ТРАНСФОРМАТОРНОГО МАСЛА. <b>Граняк В. Ф.</b> (Вінницький національний аграрний університет)	21
ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРИ ВДОСКОНАЛЕННІ РЕЦЕПТУРИ ЗДОБИ З ДОДАВАННЯМ ЯГІДНИХ ПОРОШКІВ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ХАРЧОВОЇ ЦІННОСТІ ПРОДУКТУ. <b>Дубина А.А., Тележенко Л.М.</b> (Одеський національний технологічний університет)	24
КОМП'ЮТЕРНА ПРОГРАМА ДЛЯ РОЗРАХУНКУ ВТРАТ НАПОРУ В БЛОК-СЕКЦІЯХ ГІДРОТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ ПОВЕРХНЕВОГО ОБІГРІВУ ҐРУНТУ. <b>Куницький С.О., Шатний С.В., Пінчук О.Л, Іванчук Н.В.</b> (Національний університет водного господарства та природокористування)	26
ВПЛИВ ЗАПАСУ ЕНЕРГІЇ АДАПТИВНОЇ МОДЕЛІ НА ДИНАМІКУ НАЛАШТУВАННЯ ЇЇ ПАРАМЕТРІВ ПРИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОБ'ЄКТА. <b>Литвинов М.А., Ткаля К.М.</b> (ДВНЗ «Український державний хіміко-технологічний університет)	28
СИНТЕЗ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ СКЛАДОВИХ СИСТЕМ УПРАВЛІННЯ СУДНОВИМИ ЕЛЕКТРОЕНЕРГЕТИЧНИМИ СИСТЕМАМИ. <b>Макаров А.В., Бинявський А.С., Ушкаренко О.О.</b> (Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова)	30
ВИКОРИСТАННЯ СТІЙКИХ МЕТРИК ПОДІБНОСТІ ПРИ ВЗАЄМНО-КОРЕЛЯЦІЙНІЙ ОБРОБЦІ. <b>Олійник В.О.</b> (Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського "Харківський авіаційний інститут")	32
СИМУЛЯТОР АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ СОНАРУ В СИСТЕМІ РОЗПІЗНАВАННЯ МОРСЬКИХ ОБ'ЄКТІВ. <b>Опанасевич О.Б., Бандурка О.І., Свинчук О.В.</b> (Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»)	34
МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КІЛЬКОСТІ СТРОК КОДУ ВЕБ-ЗАСТОСУНКІВ, ЩО СТВОРЮЮТЬСЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ФРЕЙМВОРКУ САКЕРНР. <b>Приходько С.Б., Приходько А.С., Шутко І.С.</b> (Національний університет кораблебудування імені адмірала Макарова)	36
МЕТОДИ УСУНЕННЯ ЕФЕКТУ РУНГЕ ПРИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КРИВИХ ПОЛІНОМАМИ ЛАГРАНЖА У ЗАДАЧАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ. <b>Романюк О.А, Латуша А.В.</b> (Вінницький національний технічний університет)	37
МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ АСИНХРОНОГО ДВИГУНА З ПОВТОРНО КОРОТКОЧАСНИМИ РЕЖИМАМИ РОБОТИ З ЧАСТОТНО-ЗАЛЕЖНИМИ ІНДУКЦІЙНИМИ РЕОСТАТАМИ. <b>С'янов О.М., Косухіна О.С., Дерезь С.О., Косухін</b>	39

## МЕТОДИ УСУНЕННЯ ЕФЕКТУ РУНГЕ ПРИ ІНТЕРПОЛЯЦІЇ КРИВИХ ПОЛІНОМАМИ ЛАГРАНЖА У ЗАДАЧАХ КОМП'ЮТЕРНОЇ ГРАФІКИ

О. В. РОМАНЮК (*romaniukoksnav@gmail.com*),

А. В. ЛАТУША (*annapop03072701@gmail.com*),

Вінницький національний технічний університет

*Розглянуто методи усунення ефекту Рунге при інтерполяції кривих поліномами Лагранжа високого порядку.*

### Вступ

Однією з важливих задач при створенні графічних зображень є побудова кривих складної форми. Безпосереднє використання рівнянь, що описують криві, у більшості випадків, є надто трудомісткою операцією з погляду обчислювальної складності комп'ютера. Тому на практиці, складні рівняння замінюють більш простими апроксимаційними залежностями та проводять інтерполяцію кривих по заданим опорним точкам.

Задача інтерполяції полягає у побудові кривої через скінченну множину точок, причому чим більше таких опорних точок, тим менша похибка апроксимації кривої, але час побудови кривої збільшується, що є критичним для задач комп'ютерної графіки. У багатьох підсистемах машинної графіки і геометричних розрахунків перевагу віддають кусково-поліноміальному зображенню. До найбільш простих інтерполяційних поліномів відносять поліном Лагранжа.

Нехай задано  $n+1$  точок  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  на координатній площині, причому  $x_i < x_{i+1}$ ,  $i = 0, n$ . Інтерполяційний поліном Лагранжа  $n$ -го степеня для даної множини точок має вигляд [1]:

$$y = \sum_{i=0}^n \left( \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)} \right) \cdot y_i.$$

Оскільки степінь  $n$  багаточлена Лагранжа залежить від кількості вузлів, спроба їх збільшення для покращення точності апроксимації викликає збільшення степеня полінома  $y$  ускладнення формули, що є істотним недоліком при інтерполяції методом Лагранжа [2]. Якщо степінь полінома рівний або перевищує 5, то на кривій з'являється "хвилястість", яка одержала назву феномен Рунге. Таким чином, неможливо досягнути точкової збіжності кривої  $P(x)$  до  $f(x)$  шляхом збільшення кількості рівномірно розподілених вузлів [1].

Метою роботи є огляд методів для усунення ефекту Рунге при інтерполяції кривих.

### Методи усунення ефекту Рунге при інтерполяції кривих

Ефект Рунге – проблема, що виникає в результаті використання поліноміальної інтерполяції на рівновіддалених вузлах за допомогою поліномів високих порядків (степенів). Цей феномен відкрив та дослідив німецький математик Карл Девід Тольме Рунге у 1901 році при дослідженні поведінки помилок в процесі використання поліноміальної інтерполяції для апроксимації певних функцій.

Методи усунення ефекту Рунге при інтерполяції кривих:

1. Розбиття інтервалу інтерполювання. Один із шляхів зменшення хвилястості полягає у розбитті інтервалу інтерполювання на декілька підінтервалів, для кожного із яких формують багаточлени Лагранжа нижчих ступенів. Наступним кроком є «склеювання» багаточлена Лагранжа, проте об'єднана апроксимуюча функція може бути недиференційованою на кінцях підінтервалів [1].

2. Зміна точок інтерполяції. Щоб мінімізувати коливання можна використати вузли, які розподілені більш щільно до країв інтервалу, а саме, з асимптотичною щільністю (на інтервалі  $[-1, 1]$ ), заданою формулою:

$$\frac{1}{1-x^2}.$$

Найчастіше в такому випадку використовуються вузли Чебишева [3], для яких максимальна похибка апроксимації гарантовано зменшується зі збільшенням порядку поліномів. Це явище демонструє, що поліноми високого ступеня, як правило, непридатні для інтерполяції з рівновіддаленими вузлами.

3. Алгоритм S-Runge без повторної вибірки. Коли необхідно використовувати рівновіддалені вибірки, оскільки повторна дискретизація на хороших наборах вузлів неможлива, можна розглянути алгоритм S-Runge. У цьому підході вихідний набір вузлів відображається на множині вузлів Чебишева, забезпечуючи стабільну поліноміальну реконструкцію. Особливість цього методу полягає в тому, що на відображених вузлах, які також називають фальшивими вузлами, немає потреби в повторній вибірці.

4. Використання кускових поліномів. Проблеми можна уникнути, використовуючи сплайнові криві, які є кусковими поліномами. При спробі зменшити похибку інтерполяції можна збільшити кількість поліномів, які використовуються для побудови сплайна, замість збільшення ступеня використаних поліномів.

5. Інтерполяція зовнішніх фальшивих обмежень. Цей метод пропонує оптимально укласти щільний розподіл обмежень типу  $P''(x)=0$  на вузли, розташовані зовні поблизу кінцевих точок кожної сторони інтерполяційного інтервалу, де  $P''(x)$  – друга похідна полінома інтерполяції. Ці обмеження називаються зовнішніми підробленими обмеженнями, оскільки вони не належать інтерполяції та не відповідають поведінці функції Runge. Метод продемонстрував, що він має кращу продуктивність інтерполяції, ніж кускові поліноми (сплайни), щоб пом'якшити феномен Рунге [4].

6. Поліном Бернштейна. Використовуючи поліноми Бернштейна, можна рівномірно апроксимувати кожну неперервну функцію в замкнутому інтервалі, хоча цей метод є досить дорогим з точки зору обчислень, тому в задачах комп'ютерної графіки не знайшов поширення.

7. Підбір методом найменших квадратів. Іншим методом є підбір полінома нижчого ступеня за допомогою методу найменших квадратів [5]. Як правило, при використанні  $m$  рівновіддалених точок, якщо  $2N > \sqrt{m}$  тоді наближення найменших квадратів  $P_N(x)$  добре обумовлене.

### **Висновок**

Отже, інтерполяційний поліном Лагранжа 5-ої і вище степені може призводити до появи ефекту «хвилястості» Рунге. Розглянуто багато методів усунення цього ефекту Рунге. Однак для задач комп'ютерної графіки найефективнішими є метод розбиття інтервалу інтерполявання, завдяки якому можна досягти будь-якої точності, але ціною можливої недиференційованості об'єднаної функції в деяких вузлах, а також використання вузлів Чебишова замість рівновіддалених вузлів.

### **СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. О.Н.Романюк. Комп'ютерна графіка. Навч. посіб./ Вінниця: ВДТУ, 1999 – с. 130.
2. С. Цыбульник, И.Коменчук. Аппроксимация колебательных процессов в технической диагностике / Bulgarian Society for NDT. International Journal “NDT Days”. – Volume II, Issue 1. – 2019. – P.48-57.
3. О.М.Самборська, Б.Г.Шелестовський Числові методи. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. – Тернопіль: ТДТУ імені Івана Пулюя, 2008. – 140с.
4. Belanger, Nicolas. External Fake Constraints Interpolation: the end of Runge phenomenon with high degree polynomials relying on equispaced nodes – Application to aerial robotics motion planning// Proceedings of the 5th Institute of Mathematics and its Applications Conference on Mathematics in Defence - 2017.
5. О.Ф. Москалец, В.М. Шутко, «Метод найменших квадратів для сплайнів непарних степенів», Bulletin of Engineering Academy Of Ukraine, №2, С. 224, 2010.

**XXII Всеукраїнська науково-технічна конференція  
молодих вчених, аспірантів та студентів**

**«СТАН, ДОСЯГНЕННЯ ТА ПЕРСПЕКТИВИ  
ІНФОРМАЦІЙНИХ СИСТЕМ І ТЕХНОЛОГІЙ»**

Одеса

21-22 квітня 2022 р

Збірник включає доповіді учасників конференції. Тези доповідей публікуються у вигляді, в якому вони були подані авторами.

Відповідальність за зміст і форму подачі матеріалу несуть автори статей.

**Редакційна колегія:** Котлик С.В., Корнієнко Ю.К.

**Комп'ютерний набір і верстка:** Соколова О.П.

**Відповідальний за випуск:** Котлик С.В.