

International scientific conference  
**«Algebraic and geometric  
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,  
Odesa,  
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

## Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов

А. А. Зайтов

(Ташкентский архитектурный и строительный институт)

*E-mail:* adilbek\_zaitov@mail.ru

Х. Ф. Холтураев

(Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства)

*E-mail:* xolsaid\_81@mail.ru

В работе показано, что если для натурального числа  $n$ ,  $n \geq 3$ , пространство  $I_n X \setminus X$ , наследственно нормально, то бикompакт  $X$  метризуем.

Рассмотрим множество  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  с двумя алгебраическими операциями: сложением  $\oplus$  и умножением  $\odot$  определенными следующим образом  $u \oplus v = \max\{u, v\}$  и  $u \odot v = u + v$  где  $\mathbb{R}$  множество действительных чисел.

Пусть  $X$  – компактное Хаусдорфово пространство,  $C(X)$  – алгебра непрерывных функций на  $X$  с обычными алгебраическими операциями. На  $C(X)$  операции  $\oplus$  и  $\odot$  определим по правилам  $\varphi \oplus \psi = \max\{\varphi, \psi\}$  и  $\varphi \odot \psi = \varphi + \psi$ , где  $\varphi, \psi \in C(X)$ .

Напомним, что функционал  $\mu : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  называется [1] идемпотентной вероятностной мерой (мерой Маслова) на  $X$ , если он обладает следующими свойствами:

- (1)  $\mu(\lambda_X) = \lambda$  для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$ , где  $\lambda_X$  – постоянная функция;
- (2)  $\mu(\lambda \odot \varphi) = \lambda \odot \mu(\varphi)$ , для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  и  $\varphi \in C(X)$ ;
- (3)  $\mu(\varphi \oplus \psi) = \mu(\varphi) \oplus \mu(\psi)$  для всех  $\varphi, \psi \in C(X)$ ;

Для компактного Хаусдорфово пространства  $X$  обозначим через  $I(X)$  множество для идемпотентных вероятностных мер на  $X$ . Рассмотрим  $I(X)$  как подпространство пространства  $\mathbb{R}^{C(X)}$ . Для заданных компактных Хаусдорфовых пространств  $X, Y$  и непрерывного отображения  $f : X \rightarrow Y$  можно проверить, что естественное отображение  $I(f) : I(X) \rightarrow I(Y)$ , определенное по формуле  $I(f)(\mu)(\psi) = \mu(\psi \circ f)$ , непрерывно. Более того, конструкция  $I$  является нормальным функтором. Поэтому для произвольной идемпотентной вероятностной меры  $\mu \in I(X)$  можно определить понятие носителя:

$$\text{Supp } \mu = \cap \{A \subset X : \bar{A} = A, \mu \in I(A)\}.$$

Для положительного целого числа  $n$  определим следующее множество

$$I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\text{Supp } \mu| \leq n\}.$$

Положим

$$I_\omega(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n(X).$$

Множество  $I_\omega(X)$  всюду плотно [1] в  $I(X)$ . Идемпотентную вероятностную меру  $\mu \in I_\omega(X)$  называют идемпотентной вероятностной мерой с конечным носителем.

Заметим, что если  $\mu$  – идемпотентная вероятностная мера с конечным носителем  $\text{Supp } \mu = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ , то  $\mu$  можно представить в виде  $\mu = \lambda_1 \odot \delta_{x_1} \oplus \lambda_2 \odot \delta_{x_2} \oplus \dots \oplus \lambda_k \odot \delta_{x_k}$  единственным образом, где  $-\infty < \lambda_i \leq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $\lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_k = 0$ .

Здесь, как обычно, для  $x \in X$  через  $\delta_x$  обозначен функционал на  $C(X)$ , определенный формулой  $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ ,  $\varphi \in C(X)$ , и называемый мерой Дирака. Она сосредоточена в точке  $x$ .

Для бикомпактов  $X$  и  $Y$  через  $C(X, Y)$  обозначается пространство непрерывных отображений из  $X$  в  $Y$ , снабженное компактно-открытой топологией. Ясно, что  $C(k, Y)$  естественно гомеоморфно  $k$ -той степени  $Y^k$  пространства  $Y$ , где  $k$  – дискретное пространство, состоящее из  $k$  точек. Для функтора  $F$ , бикомпактов  $X$  и  $k$  определим отображение

$$\pi_{I, X, k} : C(k, X) \times I(k) \rightarrow I(X)$$

равенством

$$\pi_{I, X, k}(\xi, a) = I(\xi)(a), \xi \in C(k, X), a \in I(k).$$

Имеет место

**Предложение 1.** Для компакта  $X$  и натурального числа  $k$  отображение  $\pi_{I, X, k}$  непрерывно. Для компакта  $X$ , непустого множества  $A \subset X$  положим

$$S_I(A) = \{a \in I(X) : \text{supp } a \cap A \neq \emptyset\}.$$

Ясно, что  $S_I(\emptyset) = \emptyset$ ,  $S_I(X) = I(X)$ . По построению, включение  $A \subset B$  влечет  $S_I(A) \subset S_I(B)$ .

**Предложение 2.** Для компакта  $X$ , всякого его открытого подмножества  $U$  имеет место

$$I(X \setminus U) = I(X) \setminus S_I(U).$$

**Следствие 3.** Для всякого открытого подмножества  $U$  компакта  $X$  множество  $S_I(U)$  открыто в  $I(X)$ .

Отметим, что многозначное отображение  $\text{supp} : I(X) \rightarrow X$  полунепрерывно снизу.

**Предложение 4.** Для всякого замкнутого подмножества  $\Phi$  компакта  $X$  множество  $S_I(\Phi)$  замкнуто в  $I(X)$ .

Для компакта  $X$  введем обозначение  $I_n^0 X = I_n X \setminus I_{n-1} X$ .

Для бесконечного кардинала  $\tau$  через  $\alpha N_\tau$  обозначим Александровскую одноточечную компактификацию дискретного множества  $N_\tau$  мощности  $\tau$ .

**Предложение 5.** Если  $\tau$  – несчетный кардинал, то пространство  $I_3^0(\alpha N_\tau)$  не нормально.

**Теорема 6.** Пусть  $X$  – бикомпакт. Если пространство  $I_3 X \setminus X$  наследственно нормально, то  $X$  метризуем.

**Следствие 7.** Пусть  $X$  – бикомпакт и  $n \geq 4$ . Если пространство  $I_n X \setminus X$  наследственно нормально, то бикомпакт  $X$  метризуем.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. M. Zarichnyi. Idempotent probability measures, I. *arXiv: math/060854v1 [math.GN]* 30 Aug 2006.
- [2] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, and G. B. Shpiz, Idempotent functional analysis: An algebraic approach, *Translated from Matematicheskie Zametki*, vol.69, no. 5, 2001, pp. 758-797.
- [3] Т. Ф. Жураев. Функтор  $\lambda$  и метризуемость бикомпактов. *Вестник МГУ. Серия: Механика-математика*. Москва, 1999, № 4, стр. 54-56.

<b>Бондарь О. П.</b> <i>Об изотопности некоторых функций</i>	<b>98</b>
<b>Герега А.Н., Кривченко Ю.В.</b> <i>Управление структурой кластеров в перколяционных задачах с самоорганизацией</i>	<b>99</b>
<b>Зайтов А. А., Холтураев Х. Ф.</b> <i>Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов</i>	<b>100</b>
<b>Калинина Т. И., Покась С. М., Цехмейструк Л. Г.</b> <i>Инфинитезимальные конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения</i>	<b>102</b>
<b>Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Харитонова С. В.</b> <i>Свойства кривизны почти <math>C(\lambda)</math>-многообразий</i>	<b>104</b>
<b>Клищук Б., Салимов Р.</b> <i>Нижняя оценка для объёма образа шара</i>	<b>105</b>
<b>Кузина Ю.В., Лавренюк И.В.</b> <i>О решениях некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений</i>	<b>107</b>
<b>Курбатова И. Н., Хаддад М., Пересторонева Е.</b> <i>Об одном типе квадратичной структуры на римановом пространстве</i>	<b>108</b>
<b>Лозиенко Д. В., Курбатова И. Н.</b> <i>Рекуррентно-параболические пространства, допускающие канонические квази-геодезические отображения</i>	<b>109</b>
<b>Покась С.М., Червинский Р.В., Цехмейструк Л.Г.</b> <i>Группа Ли движений в симметрическом римановом пространстве 1-го класса</i>	<b>110</b>
<b>Полищук О. Р.</b> <i>Качественный анализ некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения</i>	<b>111</b>
<b>Починка О.</b> <i>Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях</i>	<b>112</b>
<b>И. Х. Сабитов</b> <i>Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объёма многогранника</i>	<b>115</b>
<b>Теплицкая Я.</b> <i>Самосжимающиеся кривые, лежащие в компакте, имеют конечную длину</i>	<b>117</b>
<b>Цвентух Е., Курбатова И. Н.</b> <i>Структурные особенности <math>2F</math>-планарных отображений римановых пространств с <math>f</math>-структурой</i>	<b>118</b>