

Міністерство освіти і науки України
Одеська національна академія харчових технологій
Інститут математики НАН України
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский государственный педагогический университет
Тверской государственный университет
Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
Одеський державний екологічний університет
Международный геометрический центр (Одесса)
Фонд "Наука"(Одесса)

Тези доповідей міжнародної конференції
ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕСІ - 2013
Одеса, 27 травня - 1 червня 2013 р.

Тезисы докладов международной конференции
ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2013
Одесса, 27 мая - 1 июня 2013 г.

Abstracts of the International Conference
GEOMETRY IN ODESSA - 2013
Odessa, the 27th of May- the 1st of June 2013

ОДЕСА - 2013

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тези доповідей міжнародної конференції
ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2013

Тези містять результати досліджень учасників Міжнародної конференції в галузі геометрії, топології та застосувань. Видання спрямоване на наукових співробітників, викладачів, аспірантів, студентів.

ISBN 978-966-389-171-2

Міжнародний науковий комітет:

Шарко В. (Україна) - голова, Аківіс М. (Ізраїль), Алексеевський Д. (Великобританія), Банах Т. (Україна), Гандель Ю. (Україна), Глушков О. (Україна), Дискант В. (Україна), Дубровін Б. (Італія), Задорожний В. (Україна), Зарічний М. (Україна), Ібрагімов Н. (Швеція), Кириченко В. (Росія), Кирилов В. (Україна), Кіосак В. (Україна), Коновенко Н. (Україна), Красильщик Й. (Росія), Кузаконь В. (Україна), Максименко С. (Україна), Марченко В. (Україна), Машков О. (Україна), Мікеш Й. (Чехія), Микитюк І. (Україна), Мілка А. (Україна), Паньженський В. (Росія), Пастур Л. (Україна), Покась С. (Україна), Пришляк О. (Україна), Рахула М. (Естонія), Роджер С. (Франція), Рубцов В. (Франція), Сабітов І. (Росія), Стріха М. (Україна), Толстихіна Г. (Росія), Федченко Ю. (Україна), Фоменко А. (Росія), Фоменко В. (Росія), Хруслов Є. (Україна), Шелехов О. (Росія), Шуригін В. (Росія).

Організаційно-адміністративний комітет:

Єгоров Б. - голова оргкомітету, ректор ОНАХТ, Капрельянц Л. - заст. голови, проректор з наукової роботи і міжнародних зв'язків, Федосов С. - начальник відділу міжнародних зв'язків, Волков В. - директор навчально-наукового інституту механіки, автоматизації та комп'ютерних систем ім. П.М. Платонова, Сергеева О. - завідувач кафедри фізики та матеріалознавства, Носенко Л. - секретар.

Організаційний комітет:

Кузаконь В. - голова оргкомітету, президент БФ "Наука", Коновенко Н. - заступник голови оргкомітету, Федченко Ю. - заступник голови оргкомітету, Башкар'єв П., Задорожний В., Кузаконь Г., Мойсеєнок О. - WEB-адміністратор, Осадчук Є., Прокіп В., Худенко Н., Чепурна О., Черевко Є., Якімчук О. - секретар.

ISBN 978-966-389-171-2

©Благодійний фонд "Наука", 2013

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тезисы докладов международной конференции

ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2013

Тезисы содержат результаты исследований участников Международной конференции в области геометрии, топологии и приложений. Издание адресовано научным работникам, преподавателям, аспирантам, студентам.

ISBN 978-966-389-171-2

Международный научный комитет:

Шарко В. (Украина) - председатель, Акивис М. (Израиль), Алексеевский Д. (Великобритания), Банах Т. (Украина), Гандель Ю. (Украина), Глушков А. (Украина), Дискант В. (Украина), Дубровин Б. (Италия), Задорожный В. (Украина), Заричный М. (Украина), Ибрагимов Н. (Швеция), Кириченко В. (Россия), Кириллов В. (Украина), Киосак В. (Украина), Коновенко Н. (Украина), Красильщик И. (Россия), Кузаконь В. (Украина), Максименко С. (Украина), Марченко В. (Украина), Машков О. (Украина), Микеш Й. (Чехия), Микитюк И. (Украина), Милка А. (Украина), Паньженский В. (Россия), Пастур Л. (Украина), Пришляк А. (Украина), Рахула М. (Эстония), Роджер С. (Франция), Рубцов В. (Франция), Сабитов И. (Россия), Стриха М. (Украина), Толстихина Г. (Россия), Федченко Ю. (Украина), Фоменко А. (Россия), Фоменко В. (Россия), Хруслов Е. (Украина), Шелехов А. (Россия), Шурыгин В. (Россия).

Организационно-административный комитет:

Егоров Б. - председатель оргкомитета, ректор ОНАПТ, Капрелянц Л. - зам. председателя, проректор по научной работе и международным связям, Федосов С. - начальник отдела международных связей, Волков В. - директор научно-учебного института механики, автоматизации и компьютерных систем им. П.М. Платонова, Сергеева А. - заведующая кафедрой физики и материаловедения, Носенко Л. - секретарь.

Организационный комитет:

Кузаконь В. - председатель оргкомитета, президент БФ "Наука", Коновенко Н. - заместитель председателя оргкомитета, Федченко Ю. - заместитель председателя оргкомитета, Башкарев П., Задорожный В., Кузаконь Г., Мойсеенок А. - WEB-администратор, Осадчук Е., Прокип В., Худенко Н., Чепурная Е., Черевко Е., Якимчук О. - секретарь.

ISBN 978-966-389-171-2

©Благотворительный фонд "Наука", 2013

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Abstracts of the International Conference
GEOMETRY IN ODESSA - 2013

Abstracts contain the results of researching of participants of the International Conference on geometry, topology and applications. The publication is addressed to researchers, lectures, post-graduate students.

ISBN 978-966-389-171-2

International Scientific Committee:

Sharko V. (Ukraine) - Chairman, Akivis M. (Israel), Alekseevskii D. (UK), Banakh T. (Ukraine), Gandel Yu. (Ukraine), Glushkov A. (Ukraine), Diskant V. (Ukraine), Dubrovin B. (Italy), Zadorozhnyi V. (Ukraine), Zarichnyi M. (Ukraine), Ibragimov N. (Sweden), Kirichenko V. (Russia), Kirillov V. (Ukraine), Kiosak V. (Ukraine), Konovenko N. (Ukraine), Krasilshchik J. (Russia), Kuzakon V. (Ukraine), Maksimenko S. (Ukraine), Marchenko V. (Ukraine), Mashkov O. (Ukraine), Mikes J. (Czech Republic), Mikityuk I. (Ukraine), Milka A. (Ukraine), Panzhenskiy V. (Russia), Pastur L. (Ukraine), Pokas' S. (Ukraine), Prishlyak A. (Ukraine), Rahula M. (Estonia), Roger S. (France), Rubtsov V. (France), Sabitov I. (Russia), Strikha M. (Ukraine), Tolstikhina G. (Russia), Fedchenko Yu. (Ukraine), Fomenko A. (Russia), Fomenko V. (Russia), Khruslov E. (Ukraine), Shelekhov (Russia), Shurygin V. (Russia).

Organizing-Administrative Committee:

B. Egorov - chairman, rector ONAFT (Odessa), L. Kaprel'ants - deputy chairman, S. Fedosov - head of the international department, Volkov V. - Director of Training and Research Institute of mechanics, automation and computer systems named after P.M. Platonov, A. Sergeeva - head of the chair of physics (ONAFT, Odessa), L. Nosenko - the secretary (ONAFT, Odessa)

Organizing Committe:

Kuzakon V. - Chairman of the Organizing Committee, President of the Charity Fund «Science», Konovenko N. - deputy chaiman, Fedchenko Yu. - deputy chairman, Bashkaryov P., Zadorozhnyi V., Kuzakon G., Moiseenok A. - WEB-administrator, Osadchuk E., Prokip V., Khudenko N., Chepurnaya E., Yakimchuk O. - the secretary.

ISBN 978-966-389-171-2

©"Science" Foundation, 2013

ЮБІЛЕЇ

ЮБИЛЕИ

ANNIVERSARIES

МАКС АЙЗИКОВИЧ АКВИС

К 90-летию со дня рождения и 70-летию научной деятельности



Одному из самых ярких геометров современности Макс Айзиковичу Аквису в этом году исполнилось 90 лет. Все мы — прямо или косвенно — его ученики. Не одно поколение геометров воспитывалось на его замечательных работах, которые, выйдя из печати, сразу становились классическими — настолько они были глубокими по содержанию, совершенными по форме и по ясности изложения. Такими были уже его первые работы по линейчатой геометрии, которой тогда (первая половина 20 века) увлекались и Э. Картан, и лучший популяризатор картановских идей, выдающийся советский геометр Сергей Павлович Фиников, научный руководитель молодого Макса Аквиса. Статьи по парам T комплексов прямых, защищенные им как кандидатская диссертация, — пример красоты, изящества и глубокого понимания вопроса, что всегда отличало работы Макса Айзиковича. Поиск симметрии и постижение внутренней гармонии геометрических структур — так можно охарактеризовать то, что вышло из под его пера. В наибольшей степени, наверное, это замечание относится к работам по теории многомерных три-тканей, которой Макс Айзикович увлекся, переведя книгу Вильгельма Бляшке "*Einführung in die Geometrie der Waben*". Он записал структурные уравнения ткани в наиболее естественной и удобной форме, что позволило ему описать геометрические свойства тканей, провести их классификацию, ввести ряд новых важнейших понятий (например, понятие W -алгебры, обобщающее алгебры Ли, понятие канонических координат в локальной аналитической лупе, понятие замкнутой G -структуры и др.)

Мы не будем описывать многочисленные научные результаты юбиляра, за подробностями отсылаем читателя к предыдущим публикациям, посвященным ему же (*Макс Айзикович Аквис*, Успехи матем. наук, 48(1993), № 3, 213-216; *Maks Aizikovich Akivis*, в кн. *Webs and Quasigroups*, Tver State University, Tver, 1993, 4-8; *Maks Aizikovich Akivis*, в кн. *Webs and Quasigroups*, Tver State University, Tver, 1998/1999, 7-11 (в последней статье полный список публикаций М.А. Аквиса по 1999 год и список диссертаций, защищенных под его руководством); *Maks A. Akivis*, Тезисы докладов международной конф. "Геометрия в Одессе-2008", Одесса, 2008, 7-16).

Используя результаты Макса Айзиковича и его идеи, его ученики и коллеги решили ряд крупных проблем теории тканей. Перечислим некоторые из них. Коллега Макса Айзиковича, его ближайший соавтор и друг, Владислав Викторович Гольдберг (безвременно ушедший от нас в 2011 году) создал теорию $(n + 1)$ -тканей и решил ряд сложнейших задач, относящихся к проблеме ранга ткани. Вместе с В. В. Лычагиным они нашли условия линеаризации криволинейной три-ткани в терминах дифференциальных инвариантов ткани ("проблема анаморфозы", возникшая на рубеже 19-20 веков). А.Д. Иванов описал все четырехмерные ткани Бола, В. И. Федорова нашла достаточное условие боловости многомерной три-ткани и описала шестимерные ткани Бола. В. И. Бычек, В. Б. Лазарева, В. К. Драгунов и А. А. Уткин

описали координатные три-ткани на поверхностях в пространствах с кубическим абсолютном (три прямые в одной плоскости, три прямые общего положения в пространстве, кубическая кривая в несобственной плоскости и пространственная кубическая кривая соответственно). В.В. Тимошенко описал три-ткани над коммутативными ассоциативными алгебрами; В. П. Боцу — все четырехмерные шестиугольные три-ткани; С.А. Герасименко — многомерные $(n + 1)$ -ткани Бола; М.А. Андикян — три-ткани на касательных расслоениях. Н.В. Гвоздович описал инфинитезимальные автоморфизмы три-тканей; Г.А. Клековкин изучал геометрию четырехмерных три-тканей; В.К. Восканян рассматривал криволинейные $(n + 1)$ -ткани на n -мерном многообразии; С.Н. Богданов — римановы метрики и симплектические структуры, ассоциированные и многомерными три-тканями. Л.М. Пиджакова рассмотрела ткани с ковариантно постоянным тензором кривизны, А. А. Дуюнова — три-ткани, определяемые системой обыкновенных дифференциальных уравнений. А.М. Шелехов доказал замкнутость G -структуры, определяемой многомерной шестиугольной три-тканью; решил (вместе с В. Лазаревой) проблему В. Бляшке об описании всех регулярных три-тканей из пучков окружностей; доказал, что эквивалентные грасмановы три-ткани проективно эквивалентны, откуда следует положительное решение проблемы Гронвола (1912 г.). Г.А. Толстихина рассматривала три-ткани и локальные идемпотентные квазигруппы. Она также существенно развила теорию тканей, образованных слоениями разных размерностей, основы которой были заложены в работах Аквиса и Гольдберга.

Таким образом, уже в четвертом поколении существует школа геометров, основанная Максом Айзиковичем, — благодаря его необычайной научной активности, его харизме, доброжелательному отношению к ученикам и коллегам. Этой школе принадлежит основная часть работ по теории тканей, полученных за последние 50 лет. Многие из них были опубликованы в основанном Аквисом и Шелеховым сборнике "Ткани и квазигруппы", который выходил в издательстве Тверского университета с 1981 по 2002 год и отражены в их монографиях *Geometry and Algebra of Multidimensional Three-Webs*. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992) и *Многомерные три-ткани и их приложения*. (Тверь, Тверской гос-т, 2010, 307 с.)

Все перечисленные работы выполнены методом внешних форм и подвижного репера, основы которого были заложены Э. Картаном, и развиты в трудах многих выдающихся математиков. Неоценимый вклад в практику применения метода Картана внес и Макс Айзикович. Благодаря ему, этот поистине универсальный метод получил широкое приложение в теории тканей, конформной и проективной дифференциальной геометрии, см. монографии, написанные юбиляром вместе с В.В. Гольдбергом: *Projective Differential Geometry of Submanifolds* (North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokio, 1993, xi+362 pp.); *Conformal Differential Geometry and Its Generalizations* (John Wiley and Sons, 1996, xiv+383 pp.)

Мы приводим работы Макса Айзиковича за последние 3 года, которые, возможно, еще неизвестны читателю.

1. Проективный аналог преобразований Егорова. *Фундамент. и прикл. матем.*, 16:1 (2010), 3–12.

2. Замкнутые G -структуры, определяемые три-тканями. В кн.: *Теория относительности, гравитация и геометрия. Труды международной конф. "Petrov 2010 Anniversary Symposium on General Relativity and Gravitation"*, 1-6 ноября 2010, Казань. Казанский ун-т, 2010, с. 267-273 (совместно с А.М. Шелеховым). English translation: *Closed G-structures defined by three-webs*. *Kazan Gos. Univ., Uchen. Zap., Ser. Fiz-Mat. Nauki*, 2011, v. 153, book 3, pp. 22-28.

3. Метод Картана-Лаптева в теории многомерных три-тканей. // *Фундамент. и прикл. матем.*, 2010, 16:1, 13-38 (совместно с А.М. Шелеховым). English translation: *Cartan-Laptev method in the theory of multidimensional three-webs*. *J. of Math. Sciences*, Sept. 2011, v. 177. n. 4, pp. 522-540.

У Макса Айзиковича замечательная семья, много внуков и правнуков, в воспитании которых он принимает деятельное участие.

Дорогой Макс Айзикович! Мы, Ваши коллеги, друзья, ученики, от всей души поздравляем Вас с замечательным юбилеем, желаем здоровья, счастья, творческих удач и успехов в воспитании праправнуков!

Международный геометрический центр.

ИТТБ ОНАХТ

Марченко Володимир Олександрович



7 липня 2012 р. виповнюється 90 років від дня народження академіка НАН України та РАН В.О. Марченка. Володимир Олександрович Марченко - видатний математик, автор більш ніж 130 наукових публікацій, в тому числі 12 монографій. В.О. Марченко належать фундаментальні результати у наступних областях математики: гармонічному аналізі і теорії майже періодичних функцій; спектральній теорії диференціальних та різницевих операторів; теорії обернених задач спектрального аналізу і теорії розсіювання; спектральній теорії випадкових матриць великої розмірності; теорії дифракції електромагнітних хвиль на періодичних структурах; теорії усереднення крайових задач математичної фізики у областях складної мікроструктури; теорії цілком інтегрованих нелінійних еволюційних рівнянь.

Видатні наукові досягнення Володимира Олександровича широко відомі у математичних колах всього світу. Він є академіком Національної академії наук України і Російської академії наук, почесним доктором Паризького університету, членом Норвезького королівського товариства наук і літератури. Протягом багатьох років В.О. Марченко читав лекції у Харківському університеті, приділяючи особливу увагу підготовці наукових кадрів. Серед його учнів кандидати і доктори наук, два академіка НАН України. Велику увагу він приділяє організації математичної науки в Харкові. Він неодноразово вибирався президентом Харківського математичного товариства. В.О. Марченко приймав активну участь у заснуванні Фізико-технічного інституту низьких температур і його Математичного відділення.

Після закінчення університету в 1945 році В.О. Марченко вступає до аспірантури університету, яку закінчує достроково. Його науковим керівником був Н.С.Ландкоф. Перші роботи В.О. Марченка відносяться до майже періодичних функцій, узагальнених рядів Фур'є і теорії апроксимації. Відзначимо лише один з отриманих в цьому напрямку результатів. В.О. Марченко ввів таку топологію на дійсній осі, в якій кожна рівномірно неперервна функція виявляється майже періодичною функцією Г. Бора, а кожна просто неперервна функція - майже періодичною функцією Б.М. Левітана. Точки неперервності і точки Лебега у введеної топології відіграють таку ж роль для узагальнених рядів Фур'є, як звичайні точки неперервності і точки Лебега для звичайних рядів Фур'є. Кандидатську дисертацію "Методи підсумовування узагальнених рядів Фур'є" він захистив у 1948 році. Пізніше В.О. Марченко неодноразово повертався до тематики, пов'язаної з узагальненим гармонічним аналізом, теоремами тауберова типу та апроксимацією функцій, заданих на всій осі.

Після захисту кандидатської дисертації В.О.Марченко зацікавився спектральною теорією диференціальних операторів. Його увагу привернули оператори перетворення, що переводять розв'язки одного диференціального рівняння Штурма-Ліувілля у розв'язки іншого. Роботи В.О. Марченка показали, що такі оператори є потужним апаратом дослідження багатьох питань спектральної теорії. Серед них в першу чергу слід назвати обернені задачі спектрального аналізу самоспряжених диференціальних операторів і асимптотичні формули

для спектральної функції. Особливо цікавим і змістовним є випадок, коли розглядається самоспряжений оператор Штурма-Ліувілля на півосі, фіксований дійсним параметром в граничній умові. Тут В.О. Марченко отримує ряд фундаментальних результатів. Найбільш відомий з них - теорема єдиності, згідно з якою потенціал і параметр в граничній умові однозначно визначаються своєю спектральною функцією. Всі відомі теореми єдиності для оберненої задачі відновлення оператора Штурма-Ліувілля (теорема Г. Борга по двох спектрах, теорема Н. Левінсона про граничну фазу розсіювання та інші) містяться в цій теоремі. Ефективні методи відновлення диференціального оператора по його спектральній функції були запропоновані в роботах І.М. Гельфанда і Б.М. Левітана, В.О. Марченка і М.Г. Крейна. Значним внеском в спектральну теорію операторів стала отримана В.О. Марченком асимптотична формула для спектральної функції задачі Штурма-Ліувілля з довільним потенціалом. У 1951 р. він представляє до захисту докторську дисертацію "Деякі питання теорії одновимірних лінійних диференціальних операторів другого порядку". Питання спектрального аналізу диференціальних операторів і в наступні роки залишалися важливим об'єктом досліджень В.О. Марченка, де йому вдалося отримати цілий ряд красивих і несподіваних результатів. Зокрема, їм було запропоновано нову точку зору на теорію розкладання по власним функціям несамоспряжених диференціальних операторів другого порядку, ряд важливих асимптотичних формул і т.п.

В середині 50-х років увагу В.О. Марченка привернули обернені задачі іншого класу, а саме обернені задачі теорії розсіювання, зобов'язані своїм походженням теоретичній фізиці. У квантовій механіці основна експериментальна інформація про розсіювання часток потенційним полем витягується з асимптотик хвильових функцій на нескінченності. Тому природно виникає задача про відновлення потенціалу поля по асимптотиці хвильових функцій, тобто за даними розсіювання. Цією проблемою в різний час займалися багато фізиків-теоретиків і математиків (В. Баргман, Н. Левінсон, Р. Йост, В. Кон та ін.) У разі центрально-симетричного поля задача зводиться до відновлення потенціалу оператора Шредінгера на півосі за відомими даними розсіювання. В.О. Марченко довів, що дані розсіювання однозначно визначають потенціал і, головне, запропонував процедуру його відновлення, в основі якої лежить лінійне інтегральне рівняння, що носить нині його ім'я. Грунтуючись на цій процедурі, він провів вичерпне дослідження розв'язності оберненої задачі, отримав необхідні і достатні умови на дані розсіювання, які забезпечують приналежність потенціалу даному класу. За ці дослідження в 1962 р. В.О. Марченку, спільно з Б.М. Левітаном, було присуджено Ленінську премію. Згодом він вивчив проблеми стійкості обернених задач теорії розсіювання і спектрального аналізу. Ці та інші обернені задачі спектральної теорії викладені В.О. Марченком в його монографіях, опублікованих в Україні та за кордоном і які користуються широкою популярністю.

У 1960 р. був створений Фізико-технічний інститут низьких температур (ФТІНТ АН УРСР). Ініціатором створення інституту був Б.І. Веркін, який і став його першим директором. Б.І.Веркін запропонував В.О.Марченку очолити відділ математичної фізики. З цього моменту починається новий етап в житті і науковій діяльності В.О. Марченка. Він бере активну участь в організації роботи математичних відділів та встановлення творчих зв'язків з фізиками та інженерами інституту. Перед відділами ставилося подвійна мета: математики повинні були, з одного боку, брати участь у наукових програмах інституту і в ідеалі стати однією з ланок у творчому ланцюжку: фізики - математики - конструктори - виробництво, а з іншого - проводити дослідження з широкого кола фундаментальних проблем математики, продовжуючи і розвиваючи тим самим традиції Харківської математичної школи. Наукова атмосфера інституту характеризувалася рівноправними і дружніми відносинами між представниками різних областей науки і техніки. Величезна заслуга в цьому, безумовно, належала його директору Б.І. Веркіну і провідним вченим інституту, в тому числі В.О. Марченку.

У цей період виникають нові теми в науковій творчості В.О. Марченка. Його зацікавила теорія дифракції електромагнітних хвиль на періодичних структурах. Ним було запропоновано ефективний метод розв'язання основних задач цієї теорії. Значення і

перспективність методу полягали в його застосовності в усьому інтервалі довжин падаючих хвиль. Ці роботи відіграли важливу роль у розвитку теоретичних і прикладних досліджень в Інституті радіоелектроніки АН України під керівництвом академіка АН України В.П. Шестопалова.

Аналіз задач теорії дифракції привів В.О. Марченка до постановки нового класу задач математичної фізики - крайових задач в областях з дрібнозернистою межею. Задачі такого типу виникають також в теорії пружності, акустиці, гідродинаміці суспензій. Метод розв'язання таких задач, запропонований В.О. Марченком, полягав у вивченні асимптотичної поведінки їх розв'язків при подрібненні межі області і виведення усереднених рівнянь, розв'язки яких описують перший член асимптотики. Згодом в західній літературі цей метод став називатися методом усереднення диференціальних операторів. Перший етап розвитку цього нового напрямку в теорії диференціальних рівнянь у частинних похідних був підсумований у монографії (написаної спільно з Є.Я. Хрусловим), яка є однією з перших книг, що відносяться до теорії усереднення. Вона істотно вплинула на подальший розвиток цього напрямку. Результати останніх років викладені в монографіях В.О. Марченка і Є.Я. Хрустова 2006 и 2011 років.

У 60-і роки В.О. Марченко з великим інтересом обговорює питання спектральної теорії операторів з випадковими коефіцієнтами з видатним фізиком-теоретиком І.М. Ліфшицем. Це стало поштовхом до створення В.О. Марченком спільно з Л.А. Пастуром нового напрямку математичної фізики - спектральної теорії випадкових матриць і випадкових операторів, яке зараз інтенсивно розвивається. В їх піонерських роботах, завдяки плідному об'єднанню ідей теорії ймовірностей та спектральної теорії операторів, були отримані чудові результати, які інтенсивно використовуються та цитуються і в теперішній час.

В кінці 60-х років В.О. Марченко повертається до теорії обернених задач для диференціальних рівнянь. У математичній постановці оберненої задачі теорії розсіяння припускається, що фаза розсіяння відома у всьому інтервалі енергій, тоді як при фізично коректній постановці оберненої задачі фаза розсіяння може задаватися лише в скінченному інтервалі енергій. В.О. Марченко отримав точні оцінки похибки відновлення потенціалу і власних функцій оператора Штурма-Ліувілля на півосі залежно від довжини інтервалу, на якому відома функція розсіяння. У роботах з Д.Ш. Лундіною і К.В. Масловим цей результат був поширений на обернені задачі спектрального аналізу.

Обернені задачі теорії розсіяння і спектрального аналізу відіграли на початку 70-х років важливу роль у розвитку нового напрямку в теорії рівнянь з частинними похідними - теорії цілком інтегрованих нелінійних рівнянь, або теорії солітонів. Новий метод, будучи узагальненням методу Фур'є на нелінійні рівняння, виявився тісно пов'язаним не тільки з теорією розсіяння і спектральною теорією операторів, а й з іншими областями математики, такими як алгебраїчна геометрія і абелеві функції, алгебри Лі і симплектична геометрія. Будучи тісно пов'язаною зі спектральною теорією, ця нова область природно викликала великий інтерес В.О. Марченка. І в цій новій для себе області він запропонував оригінальні і перспективні ідеї та підходи. Він запропонував метод розв'язання періодичної задачі Коші для рівняння Кортевега-де Фріза, що базується на процедурі поліноміальних апроксимацій матриці монодромії рівнянь Лакса, які призводять до сумісних автономних систем звичайних диференціальних рівнянь, і наступного граничного переходу. Цей метод знайшов застосування і подальший розвиток в роботах його учнів В.А. Козела, В.П. Котлярова, А.Є. Боровіка. Дослідження періодичної задачі привели до необхідності по новому переосмислити обернені задачі спектрального аналізу для оператора Шредінгера з періодичним потенціалом (оператора Хілла), що і було зроблено в спільних з І.В. Островським роботах. В них отримана ефективна і природна параметризація спектральних даних і доведена теорема про апроксимації довільного періодичного потенціалу скінченнозонними. Спектральна теорія оператора Шредінгера і її застосування до інтегрування нелінійних еволюційних рівнянь склали зміст монографії В.О.Марченка "Оператори Штурма-Ліувілля та їх застосування". Нещодавно ця монографія була перероблена, доповнена автором главою

по стійкості розв'язків обернених задач і видана Американським математичним товариством.

У 80-ті роки В.О.Марченко запропонував новий метод побудови розв'язків нелінійних рівнянь, заснований на красивих операторно-алгебраїчних ідеях і глибокому аналітичному апараті. В основу методу була покладена заміна даного рівняння на рівняння того ж виду щодо функцій, які приймають значення в довільній операторній алгебрі. Розв'язки вихідного рівняння породжуються односолітонними операторними розв'язками шляхом спряження їх спеціальними скінченновимірними проекторами. Довільний вибір операторної алгебри і проекторів дозволяє знаходити широкі класи розв'язків цілком інтегровних нелінійних рівнянь. Відповідні результати становлять зміст монографії В.О. Марченка "Нелінійні рівняння і операторні алгебри" (К.: "Наукова думка", 1986 р. і Dordrecht: "D.Reidel", 1987). Ці дослідження, що представляють великий інтерес для теорії нелінійних рівнянь, мають також глибокий спектральний зміст. У них пропонуються нові підходи до конструктивного розв'язання обернених задач спектрального аналізу для диференціальних операторів з неспадними коефіцієнтами - найменш вивченого класу обернених задач. Подальший розвиток цих ідей привело В.О. Марченка до створення в 90-ті роки теорії неспадних розв'язків цілком інтегровних рівнянь. Так, в роботах ним була знайдена характеристика розв'язків Вейля для операторів Шредінгера і Дірака з неспадними потенціалами, він надав конструктивне доведення можливості розв'язання задач Коші для рівняння Кортевега-де Фріза і нелінійного рівняння Шредінгера з неспадними початковими даними та узагальнення перетворення Дарбу, що дозволяє будувати широкі класи розв'язків нелінійних еволюційних рівнянь, залежних від скінченного числа функціональних параметрів.

У першому десятилітті нового століття В.О. Марченко продовжує успішну наукову роботу. Він отримав ряд нових результатів, що відносяться до методу оберненої задачі теорії розсіяння для розв'язання нелінійних еволюційних рівнянь, по-новому переглядає теорію обернених задач спектрального аналізу для матриць Якобі і видає монографію "Введення в теорію обернених задач спектрального аналізу". Методи, розвинені в цій монографії, дозволили В.О. Марченку спільно з Ю.І. Любарським сформулювати і розв'язати обернені задачі багатоканального розсіяння і теорії малих коливань системи взаємодіючих частинок.

Протягом багатьох років В.О.Марченко керував міським семінаром з математичної фізики, що працював щотижнево в Харківському університеті. Семінар мав великий вплив на розвиток математичних досліджень не тільки в Харкові, а й у всій країні.

Наукові та громадські заслуги В.О.Марченка отримали широке визнання. Він - лауреат Ленінської премії (1962), Державної премії України в галузі науки і техніки (1989), премій ім. М.М.Крилова (1983), ім. М.М.Боголюбова (1996) і ім. М.О.Лаврентьева (2007) НАН України; нагороджений двома орденами Трудового червоного прапора (1967, 1982), орденами Ярослава Мудрого V (2002) і IV (2007) ступенів; в 1961 році був обраний членом-кореспондентом, а в 1969 - академіком Академії наук України; в 1987 р. стає дійсним членом Академії наук СРСР. Визнанням його наукових досягнень є присудження йому звання Почесного доктора Паризького університету (1997 р.) і Харківського національного університету (2002), обрання членом Норвезького королівського товариства наук і літератури (2001) та нагородження Золотою медаллю імені В.І.Вернадського НАН України (2010). У 2007 році В.О.Марченко був удостоєний звання "Почесного громадянина Харківської області".

Широта наукових інтересів і ерудиція, відданість науці і висока вимогливість до себе, постійна увага до учнів і колег, доброзичливість і готовність надати допомогу добре відомі всім, кому доводилося зустрічатися і працювати з Володимиром Олександровичем.

Ми бажаємо Володимирі Олександровичу міцного здоров'я, доброго настрою і нових творчих досягнень.

Пастур Леонід Андрійович



Видатний український вчений в галузі математичної та теоретичної фізики, результати якого мали великий вплив на розвиток світової науки.

Наукові інтереси Л.А.Пастура є надзвичайно широкими. Для його наукової творчості є характерним органічний зв'язок з теоретичною фізикою, вміння побачити у фізичній проблемі нові математичні задачі та перспективні напрямки, ефективного застосування сучасних математичних методів для розв'язку фізичних задач. Одною з головних сфер його діяльності є теорія неупорядкованих систем. Результати досліджень в цієї галузі було підсумовано в монографії І.М.Лівшиця, С.О.Гредескула та Л.А.Пастура „Введение в теорию неупорядоченных систем”. Вони значною мірою визначають сучасний вигляд цього розділу теоретичної фізики. За цю книгу автори отримали в 1985 році Державну премію України. Пізніше математичні аспекти цього кола проблем було викладено в широко відомій монографії Л.А.Пастура та А.Фіготіна “Spectra of Random and Almost Periodic Operators”. Іншим розділом математичної фізики, де результати Л.А.Пастура мають величезне значення, є теорія випадкових матриць. В його роботах було не тільки отримано класичні результати про розподіл власних значень ансамблів випадкових матриць Вішарду та Вігнеру, але й запропоновано методи, що дозволяють вивчити багато інших ансамблів випадкових матриць. Дослідження Л.А.Пастура в теорії випадкових матриць тривають і зараз. Результати цих досліджень стали основою монографії Л.А.Пастура та М.В.Щербини “Eigenvalue Distribution of Large Random Matrices”, що нещодавно опубліковано видавництвом Американського математичного суспільства. Широкий клас досліджень Л.А.Пастура належить також до спектральної теорії випадкових диференціальних та скінченно-різницевого операторів. Одним з найбільш відомих результатів у цьому напрямку є робота про чисто точковий спектр диференціальних операторів другого порядку з випадковими коефіцієнтами.

Л.А.Пастур веде велику організаційну роботу. Довгі роки він був заступником директору ФТІНТ ім.Б.І.Веркіна НАН України та головою математичного відділення цього інституту. Він є головним редактором журналу „Математична фізика, аналіз, геометрія”, членом редакційної колегії „Українського математичного журналу” та ще декількох наукових видань, членом декількох спеціалізованих Учених рад з захисту дисертацій.

Величезна ерудиція в математиці і теоретичній фізиці та талант педагога привертають до Л.А.Пастура численних учнів, багато з яких успішно працюють зараз не тільки в Україні, але й в інших країнах.

Визначні наукові заслуги Л.А.Пастура принесли йому великий авторитет та повагу в науковому суспільстві. В 1990 р. його обрано академіком НАН України. Він є лауреатом Премії НАН України ім. М.В.Остроградського та державної премії України.

Идждад Хакович Сабитов

(к 75-летию юбилею)

E-mail: isabitov@mail.ru



Идждад Хакович Сабитов родился 15 декабря 1937 года в г. Воскресенске Московской области. Его родители приехали туда с Урала для культурно-просветительской и преподавательской работы в большом татарском землячестве города. С началом войны отец ушел на фронт, а мать с тремя малолетними детьми эвакуировалась в Оренбургскую область. Здесь она нашла работу учителя в маленькой башкирской деревне Канчирово, где Идждад и начал свою учебу. Закончил он среднюю школу в 1954 г. уже в районном центре и в том же году поступил без экзаменов, как серебряный медалист, в Таджикский Государственный Университет в г. Сталинабаде (ныне г. Душанбе) на отделение математики физико-математического факультета. После окончания университета с отличием он был оставлен там же на работу ассистентом кафедры математического анализа. Через два года, в 1961 г., он поступил в аспирантуру механко-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова к выдающемуся геометру Николаю Владимировичу Ефимову. Его кандидатская диссертация "Поверхности Дарбу в теории бесконечно малых изгибаний", защищенная им в 1965 г., была оценена Ученым Советом факультета как выдающаяся работа.

Оставленный после аспирантуры по распределению в университете, И.Х.Сабитов с 1964 г. работает на кафедре математического анализа механико-математического факультета МГУ, сначала ассистентом, затем с 1968 г. - доцентом, а с 2001 г. - профессором. За эти годы он прочитал практически все курсы по высшей математике, преподавая, кроме мехмата, еще и на естественных факультетах МГУ. Читаемые им курсы математики на географическом и химическом факультетах обеспечены соответствующими методическими пособиями. В 2013 г. под совместным авторством А.А.Михалева и И.Х.Сабитова в ИЦ "Академия" в серии "Университетский учебник" вышло их учебное пособие "Линейная алгебра и аналитическая геометрия".

Научная работа И.Х. Сабитова началась еще в его студенческие годы. В начале своей научной деятельности в ТГУ он занимался под руководством Л.Г. Михайлова (ныне академик АН Республики Таджикистан) краевыми задачами теории функций по тематике школы Мухелишвили-Векуа и Гахова. Первые же его публикации по этой теме (1961 г. и 1964г.) привлекли внимание специалистов и предложенные там методы исследования впоследствии были использованы при написании нескольких кандидатских диссертаций. Сам И.Х. не раз возвращался к этой тематике, тем более, что он нашел для нее приложения в геометрии (1962 г., 1968 г. и 2009 г.). Последняя большая его статья на эту тему опубликована в декабре 2012 г. в Известиях РАН.

Основной же областью научных исследований И.Х. Сабитова является метрическая геометрия поверхностей и многогранников. Здесь он получил ряд выдающихся результатов. Отметим только некоторые из них.

1) В работе, представленной им как научный реферат, необходимый при подаче документов в аспирантуру, он предложил широкое обобщение задачи и метода Б.В. Боярского для исследования жесткости поверхностей вращения, составленных из выпуклых кусков. Эта

работа была опубликована в Математическом сборнике в 1963 г. и послужила источником для работ других геометров, в том числе болгарских, среди которых была и Иванка Иванова-Каратопраклиева, стажировавшаяся в МГУ под руководством И.Х. Сабитова и впоследствии защитившая докторскую диссертацию по этой тематик.

2) И.Х. Сабитов довел до не улучшаемого вида результаты А.В. Погорелова о гладкости выпуклых поверхностей с метрикой данной гладкости, а именно, он показал, что если метрика положительной кривизны и гладкости $C^{k,\alpha}$, $k \geq 2, 0 < \alpha < 1$ погружена в \mathbb{R}^3 (т.е. поверхность не может иметь бóльшую гладкость), так как известна теорема Сабитова-Шефеля, утверждающая, что в гильдеровых классах гладкости метрика поверхности имеет ту же гладкость, что и сама поверхность.

3) И.Х. Сабитовым доведено до конца и решение давно поставленной задачи о гладкости изометрий между двумя изометричными римановыми пространствами известной гладкости. Из работ Калаби-Хартмана и Ю.Г. Решетняка с дополнением И.Х. Сабитова следует, что если два римановых пространства гладкости $C^{n,\alpha}$, $n \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 1, n + \alpha > 0$ изометричны, то изометрия между ними будет гладкости $C^{n+1,\alpha}$ (априори она только непрерывна).

4) Несколько работ И.Х. Сабитова посвящено вопросам локальной и глобальной жесткости поверхностей. Здесь он тоже стремится получить не улучшаемый результат при минимально возможных исходных условиях гладкости. В 1969 г. он указал класс поверхностей любой гладкости C^n , $1 \leq n \leq \infty$. которые локально жестки даже в классе деформаций гладкости C^1 (ранее был известен результат Н.В. Ефимова о существовании аналитических поверхностей, локально жестких в классе аналитических деформаций). В серии работ, включая и 2013 г., он дополнил классические результаты о бесконечно малых изгибаниях и жесткости поверхностей вращения в двух крайних классах гладкости - в классе C^1 и аналитическом классе. Многие его результаты по этой теме вошли в его монографическую статью в томе 48 "Геометрия-3" в известной серии ВИНТИ "Современные проблемы математики" и в написанные по его инициативе совместно с И.Ивановой-Каратопраклиевой и (в третье части) П.Е. Марковым обзоры "Изгибания поверхностей. I, II, III".

5) Среди работ И.Х. Сабитова об изометрических погружения данных метрик выделяются работы об изометрических погружениях локально-евклидовых метрик и о поверхностях с локально-евклидовой метрикой. Эти и другие результаты составили содержание его изданной в 2009 г. в Англии монографии "Isometric Immersions and Embeddings of Locally Euclidean Metrics".

6) Вершиной его достижений доказанное им обобщение формулы Герона на объемы многогранников, которое .

Теорема 1. *Для всех изометричных между собой симплицальных многогранников в \mathbb{R}^3 с одинаковым комбинаторным строением и с данными значениями длин ребер существует многочлен*

$$Q(V) = V^{2N} + a_1 V^{2N-2} + \dots + a_{N-1} V^2 + a_N, \quad (1)$$

такой, что квадрат обобщенного объема V любого многогранника из этого семейства является корнем многочлена $Q(V)$, коэффициенты которого в свою очередь являются многочленами от квадратов длин ребер с рациональными коэффициентами, зависящими от общего комбинаторного строения многогранников.

Эта теорема принесла И.Х. Сабитову международное признание в математическом мире. Изложению его результатов в этом направлении был посвящен доклад по приглашению профессора Тулузского университета Ж.-М. Шленкера на семинаре Бурбаки в 2002 г.

За время более чем полувекового математического творчества И.Х. Сабитов опубликовал в престижных российских и зарубежных математических журналах более 100 статей, написал несколько научно-популярных работ, издал в Англии упомянутую выше монографию, перевел или был редактором перевода многих книг и статей по геометрии. Он был одним из ведущих организаторов традиционных конференций по геометрии и анализу памяти Н.В. Ефимова и членом Оргкомитетов многих других конференций. И.Х. Сабитов является членом

редакционной коллегии трех журналов, активно сотрудничает как рецензент со многими отечественными и иностранными журналами. В 1997 и 2002 годах он был лауреатом Международного конкурса на медаль Лобачевского и получил Почетный Диплом Совета Казанского Университета "За выдающиеся достижения в геометрии" , а в 2009 он был избран Почетным членом Геометрического общества им. Бояна Петканчина Союза болгарских математиков. Под его руководством защищены три кандидатские диссертации; для одной докторской диссертации он был научным консультантом.

Идждад Хакович известен своим внимательным и доброжелательным отношением к коллегам, он готов помочь и помогал многим геометрам, особенно из провинции, своим советом и делом.

Международный геометрический центр.

ИТТБ ОНАХТ

А-деформації та безмоментний напружений стан рівноваги циліндричної оболонки

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Н. В. Вашпанова

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

При оцінюванні технічного стану трубопроводів важливе місце займає достовірне визначення напружено-деформованого стану його лінійної частини як одного з основних факторів, від якого залежить рівень експлуатаційної надійності споруди.

У зв'язку з цим будемо розглядати А-деформації кругового циліндра зі стаціонарним першим інваріантом K_h сітки ліній геодезичного скруту (LGT-сітки), який для будь-якої регулярної поверхні S можна представити у вигляді ([1]): $K_h = -4E$, де $E = H^2 - K$ - ейлерова різниця, H і K - середня та повна кривини поверхні S відповідно.

Відомо [1], якщо S - немінімальна поверхня ($2H \neq 0$), то задача про існування зазначеної деформації зводиться до розгляду одного диференціального рівняння з частинними похідними третього порядку

$$\left(Hg^{ij} - b^{ij} \right) \left(\frac{u_{,\alpha}^\alpha}{2H} \right)_{i,j} - 2Eu_{,\alpha}^\alpha - E_\alpha u^\alpha = 0 \quad (1)$$

відносно двох невідомих функцій $u^1(x, y), u^2(x, y)$.

Для кругового циліндра, заданого рівнянням $\mathbf{r} = \{R \cos y, R \sin y, x\}$, рівняння (1) набуде вигляду:

$$\mu_{11} - \frac{1}{R^2} (\mu_{22} + \mu) = 0. \quad (2)$$

Тут $\mu_{11} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial x^2}, \mu_{22} = \frac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}, \mu = u_{,\alpha}^\alpha, R$ - радіус основи циліндра.

Припустимо, що прямолінійні волокна, які були перпендикулярними до недеформованої серединної поверхні, залишаються прямолінійними до zdeформованої серединної поверхні, не змінюючи при цьому своєї довжини. Аналітично ця умова запишеться так:

$$\begin{cases} R^2(u^2)_{1,1} - (u^1)_{1,1} = 0, \\ (u^1)_{2,2} = -\sigma R^2(u^2)_{2,1}, \end{cases} \quad (3)$$

де σ - число Пуассона.

Із (2), (3) знайдемо функцію $\mu = x(-c_2 \sin y + c_3 \cos y)$ і компоненти вектора зсуву:

$$u^1 = \sigma (c_1 y + c_2 \sin y - c_3 \cos y), u^2 = x (c_1 + c_2 \cos y + c_3 \sin y), \dot{u} = R\mu,$$

де c_1, c_2, c_3 - довільні сталі. Отже, справедлива наступна

Теорема 1 *Круговий циліндр допускає нетривіальну А-деформацію зі стаціонарним першим інваріантом тензора LGТ-сітки, яку можна тлумачити як безмоментний напружений стан рівноваги циліндричної оболонки з поверхневим навантаженням:*

$$\mathbf{X} = -x (c_2 \cos y + c_3 \sin y) \mathbf{r}_1 - (c_1 + c_2 \cos y + c_3 \sin y) \mathbf{n}$$

Список літератури

- [1] Т. Ю. Вашпанова *Про властивості інваріантів тензора LGТ-сітки і деформації поверхні.*, Праці міжнародного геометричного центру. Том.3, No.3, 2010. Одеса-2010, с.15-22

Топологічна еквівалентність гладких функцій на колі

Б. І. Івануса

(КНУ ім. Т.Г. Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: bogdana1992ivanusa@mail.ru

Нехай $F(S^1)$ - простір гладких функцій на одиничному колі $S^1 = x^2 + y^2 = 1$. Будемо називати функцію f з простору $F(S^1)$ функцією загального положення, якщо в довільних двох екстремальних точках вона приймає різні значення.

Кажуть, що дві функції f і g з простору $F(S^1)$ є топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : S^1 \rightarrow S^1$ і $k : R^1 \rightarrow R^1$ такі, що має місце рівність $kf = gh$.

Відомо [1], що існує топологічний інваріант, який дає змогу визначати, коли дві функції загального положення з простору $F(S^1)$ у яких скінчене число екстремумів є топологічно нееквівалентними.

Розглянемо на одиничному колі клас гладких функцій $\Gamma(S^1)$, у яких не більш ніж злічена кількість критичних точок і таких, що в екстремальних функції з класу $\Gamma(S^1)$ приймають різні значення.

Кожній функції f з класу $\Gamma(S^1)$ можна поставити у відповідність деякий граф $\Omega(f)$ (граф типу Кронрода-Ріба).

Теорема. Дві функції f і g з класу $\Gamma(S^1)$ топологічно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли відповідні їм графи $\Omega(f)$ і $\Omega(g)$ ізоморфні.

Список літератури

- [1] І.А. Юрчук, *Комбінаторні аспекти топологічної класифікації функцій на колі*, Укр. матем. журнал 60 (2008), по 6, 829-836.

Про конформні відображення на простори Ейнштейна

М. Л. Гаврильченко

(Одеський національний університет імені І.І. Мечнікова, Україна)

В. А. Кіосак

(Кримський гуманітарний університет, Україна)

E-mail address: vkiosak@ukr.net

Питання про те, чи допускає V_n ($n > 2$) конформне відображення [1] на деякий простір Ейнштейна було зведено Г. Брінкманом [3] до проблеми існування розв'язків деякої нелінійної системи диференціальних рівнянь типу Коші відносно $(n + 1)$ невідомої функції. Ця задача детально викладена в монографії А.З.Петрова [2]. В роботі [4] основна система зведена до лінійної системи, за допомогою якої вдалось оцінити степінь параметричної довільності r в розв'язку вказаної задачі, в нашій термінології степінь мобільності ріманового простору відносно конформних відображень на простори Ейнштейна. В статті [5] була оцінена лакуна в розподілі степенів мобільності та знайдена тензорна ознака просторів другої лакунарності. “В цілому“, для повних просторів, задача розв'язана в роботі [6]. Аналіз основних рівнянь дозволив довести слідуючі результати:

1. Якщо степінь мобільності більше одиниці, то простір Ейнштейна допускає конциркулярне векторне поле.
2. Степінь мобільності на одиницю більша від кількості лінійно незалежних конциркулярних векторних полів, що їх допускає простір Ейнштейна.
3. Серед просторів другої лакунарності не може бути просторів Ейнштейна.

Це, в свою чергу, дозволило побудувати повну картину розподілу вказаних степенів та класифікувати ріманові простори, що допускають конформні відображення на простори Ейнштейна.

Список літератури

- [1] Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. — М.:Инд. лит. — 1948
- [2] Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. — М.:Наука. — 1966. — 495с.
- [3] Brinkmann H.W. Riemann spaces conformal to Einstein's spaces // Math. Ann. — V.94 — 1925. — P. 119-145.
- [4] Микеш Й., Гаврильченко М.Л., Гладышева Е.И. О конформных отображениях на пространства Эйнштейна // Вестн. Моск. ун-та. — №3. — 1994. — P. 13-17
- [5] Евтушик Л.Е., Кіосак В.А., Микеш Й. О мобільности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна // Известия вузов. Математика. — №8. — 2010. — С. 36-41
- [6] Kiosak V.A., Matveev V.S. There are no conformal Einstein rescalings of complete pseudo-Riemannian Einstein metrics // C. R. Acad. Sci. Paris. — Ser. I — 347 — 2009. — P. 1067-1069

Особливості геометричної складової зовнішнього незалежного тестування абітурієнтів з математики

Я. П. Кривко

(ЛНУ ім. Тараса Шевченка, Луганськ, Україна)

E-mail address: yakrivko@yandex.ru

Зовнішнє незалежне тестування на сьогоднішній день є єдиною формою оцінювання навчальних досягнень абітурієнтів під час проведення вступної кампанії. Аналізуючи ситуацію навколо ЗНО [1],[2],[3] ми можемо констатувати, що, по-перше, тестування взагалі є найбільш поширеною формою контролю навчальних досягнень у сучасній школі; по-друге, над створенням тестів з математики працюють провідні фахівці в галузі математичної освіти; по-третє, підготовка до ЗНО змушує вчителів постійно оновлювати зміст освіти та форми контролю. Тобто наявність ЗНО не тільки спонукає учнів готуватися до тестів, а й стимулює вчителів оновлювати підходи до викладання математики. Але на цьому шляху виникає багато труднощів, пов'язаних, перш за все, з необхідністю самостійно аналізувати вчителем питання ЗНО для подальшого пошуку аналогічних завдань, які можна було б використовувати на уроках математики. Тому, на нашу думку, доцільно узагальнити питання ЗНО з математики, у тому числі, виокремити питання, пов'язані з геометрією.

Слід зазначити, що питома вага питань з планіметрії зростає від 8,3% у 2008 році до 19,4% у 2010 році, зі стереометрії цей показник теж варіювався від 7,9% у 2007 році до 22,9% в 2011 році, тобто вони складають значну частину питань всього тестування. В цілому на завдання з геометрії припадає понад 30% від загальної кількості завдань, що неодмінно впливає на загальний результат ЗНО. Це добре співвідноситься з тим фактом, що предмет "геометрія" займає близько 35% від загальної кількості часу рівня стандарту. У більшості випадків це завдання на елементарне знання формул, зокрема, це формули площ та об'ємів. Примітно, що завдання без вибору правильної відповіді складають задачі зі стереометрії як найбільш складні задачі.

Грунтовний аналіз завдань з геометрії ЗНО з математики буде представлений у наступних публікаціях.

Список літератури

[1] <http://testportal.gov.ua/>

[2] <http://zno.org.ua/>

[3] <http://znotest.com/>

Прості атоми степені 4 і 5.

К. О. Легка, І. В. Лазутіна

(КНУ ім. Т.Г. Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: katelyogkaya@gmail.com, innalazutina@ukr.net

У роботі узагальнено поняття атомів та молекул функції на тривимірному тілі, розглянуті функції степені 4 і 5. Наша мета - описати всі прості атоми степені 4 і 5.

В [2] Пришляк О. О. довів, що в околі ізольованої критичної точки на поверхні функція топологічно еквівалентна функції $f(x, y) = Re(x + iy)^k$, де k - деяке натуральне число, що називається степенем точки. Функції Морса мають степінь 2. В [1] для дослідження функцій Морса були уведені поняття атомів та молекул. Наша мета - описати всі прості атоми степені 4 і 5.

Атом - це топологічний тип зв'язної компоненти околу особливого слою функції Морса на поверхні. Атом називається простим, якщо він містить одну критичну точку. Ми розглянули функції степені 4 і 5 і відповідні їм прості атоми.

Маємо компактну поверхню з краєм, що не змінюється при малих змінах регулярного значення. Проходження додатної критичної точки змінює цю поверхню на поверхню з приклеєним до неї $2n$ -кутником. Де $2n$ -кутник приклеюється за n сторонами, що не є сусідніми. Це приклеювання повністю задає функцію в околі регулярного рівня, з точністю до топологічної еквівалентності, а отже і атом з точністю до еквівалентності атомів.

Задамо орієнтацію на атомі степеня 4 буквами a, b, c, d . Тоді вона індукує орієнтацію на границі $2n$ -кутника. Позначимо сторони, що приклеюються згідно цієї орієнтації таким же чином: a, b, c, d . Отже, всього можливо 9 різних варіацій, що відрізняються циклічною перестановкою.

Їх коди:

1)[(a, b, c, d)]; 2)[(a, b, d, c)]; 3)[(a, d, c, b)]; 4)[(a, b, c)], [(d)]; 5)[(a, c, b)], [(d)];
6)[(a, b)], [(c)], [(d)]; 7)[(a, c)], [(b)], [(d)]; 8)[(a)], [(b)], [(c)], [(d)]; 9)[(a, b)], [(c, d)].

Аналогічними маніпуляціями, отримуємо результат для атома степеня 5, позначивши сторони, що приклеюються згідно цієї орієнтації a, b, c, d, e . Можливо 15 підстановок.

Їх коди:

1)[(a, b, c, d, e)]; 2)[(b, a, c, d, e)]; 3)[(b, c, a, d, e)]; 4)[(d, c, b, a, e)]; 5)[(a)], [(b, c, d, e)];
6)[(a)], [(c, b, d, e)]; 7)[(a)], [(c, d, b, e)]; 8)[(a, b)], [(c, d, e)]; 9)[(a, b)], [(d, c, e)]; 10)[(a, b)], [(d, e, c)];
11)[(a)], [(b, c)], [(d, e)]; 12)[(a)], [(b)], [(c, d, e)]; 13)[(a)], [(b)], [(d, c, e)]; 14)[(a)], [(b)], [(c)], [(d, e)];
15)[(a)], [(b)], [(c)], [(d, e)].

Список літератури

- [1] Болсинов, Фоменко *Интегрируемые гамильтоновы системы . Геометрия, топология , классификация,-* Ижевск, 1999 г. Том 1 (стр. 66-89)
- [2] Prishlyak A.O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface // Topology and its application,-* Vol.119, №3. -P. 257-267, 2002

Топологічна еквівалентність функцій на прямій

А. В. Лобчук

(КНУ ім. Т.Г. Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: zabavna1991@rambler.ru

В роботі ([1]) була отримана класифікація гладких функцій з скінченим числом екстремумів з точністю до топологічної еквівалентності на відрізку. В даній роботі ці результати ми узагальнюємо для функцій з зліченим числом екстремумів на прямій.

Змією типу A_n називається послідовність додатніх цілих чисел x_i , які задовільняють умовам: $x_0 < x_1 > x_2 < x_3 \dots x_n$, $x_i \neq x_j$, де $0 \leq x_i \leq n$.

Довільній функції зі скінченим числом екстремумів на відрізку можна поставити у відповідність змію.

Дві функції $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ та $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ називаються топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ такі, що $h \circ f = g \circ k$.

Дві неперервні функції зі скінченим числом екстремумів будуть топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли відповідні їм змії співпадають.

Можна ввести поняття нескінченної змії. Нескінченною змією типу A_n називається послідовність цілих чисел x_i , які задовільняють умовам $\dots < x_{i_1} > x_{i_2} < x_{i_3} > \dots > x_i < \dots$.

Неперервна функція на \mathbb{R} належить класу (*), якщо у неї є тільки ізольовані екстремуми, які не утворюють збіжних послідовностей. Кожній функції з класу можна поставити у відповідність нескінченну змію.

Теорема. Дві функції f та g з класу (*) є топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли відповідні змії еквівалентні.

Список літератури

- [1] И. В. Арнольд *Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера.*,- Успехи мат. наук, (1992), № 1, С. 3-45.

Про перший чебишевський вектор LGT-сітки

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Л. Л. Безкоровайна

(Одеський національний університет ім. І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

В роботі [1] доведено, що на будь-якій регулярній C^3 -поверхні без омбілічних точок існує два різних дійсних сімейства ліній геодезичного скруту, що утворюють ортогональну сітку ліній геодезичного скруту (LGT-сітку), диференціальне рівняння якої має вигляд

$$h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0,$$

де $h_{\alpha\beta} = 2(Hg_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta})$, H - середня кривина поверхні, $g_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ - коефіцієнти першої та другої основних квадратичних форм поверхні відповідно.

Згідно з [2], для LGT-сітки перший чебишевський вектор запишеться так:

$$\tau_i = \tilde{h}^{\alpha\beta} \left(h_{i\alpha,\beta} - \frac{1}{2} h_{\alpha\beta,i} \right),$$

де $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ - тензор, обернений для тензора $h_{\alpha\beta}$.

Мають місце наступні

Теорема 1. *На регулярній поверхні ненульової гаусової кривини ($K \neq 0$) без омбілічних точок перший чебишевський вектор LGT-сітки має вигляд*

$$\tau_i = \frac{1}{2E} \left(K_i - 2KH_\beta d_i^\beta \right),$$

де E -ейлерова різниця ($E = H^2 - K$), $K_i = \frac{\partial K}{\partial x^i}$, $H_\beta = \frac{\partial H}{\partial x^\beta}$, $d_i^\beta = d^{\beta\alpha} g_{\alpha i}$, $d^{\beta\alpha}$ - тензор, обернений для тензора $b_{\beta\alpha}$.

Наслідок 1. *На будь-якій регулярній поверхні перший чебишевський вектор LGT-сітки збігається з першим чебишевським вектором сітки ліній кривини.*

Наслідок 2. *Перший чебишевський вектор LGT-сітки співпадає з першим чебишевським вектором сітки асимптотичних ліній лише для мінімальних поверхонь.*

Обчислена варіація тензора τ_i та розглянуті деякі задачі деформування поверхні.

Список літератури

- [1] Л. Л. Безкоровайна, Т. Ю. Вашпанова *LGT-сітка поверхні та її властивості.*- Вісник Київського національного університету. Серія: фіз.-мат. науки, (2010), № 2, С. 7-12.
- [2] В. Ф. Каган *Основы теории поверхностей.*- М.-Л.: Гостехиздат. -т. I.- 1947. -512 с; т. II. - 1948. - 407 с.

Характеристика деформуючого поля при інфінітезимальних деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду

І. В. Потапенко

(ОНУ ім. І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: igopotapenko@yandex.ru

Узагальнюється результат отриманий академіком І.Н. Векуа в роботах ([1], [2]) для випадку інфінітезимальних деформацій поверхонь без омбілічних точок з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду

Варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми δb_{ij} поверхні віднесеної до ліній кривини при деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду мають вигляд

$$\begin{aligned}\delta b_{11} &= b_{11}p - \frac{\delta K g_{11}}{2\sqrt{E}} + \frac{b_{11}\delta g_{11}}{g_{11}}, \\ \delta b_{22} &= -b_{22}p + \frac{\delta K g_{22}}{2\sqrt{E}} + \frac{b_{22}\delta g_{22}}{g_{22}}, \\ \delta b_{12} &= \sqrt{g}q, \\ p &= \frac{\delta H}{\sqrt{E}},\end{aligned}$$

де δH -варіація середньої кривини, δK - варіація гауссової кривини, E - ейлерова різниця, δg_{ij} - варіація коефіцієнтів першої квадратичної форми, q - варіація геодезичного скруту вздовж головних напрямів

Список літератури

- [1] И. Н. Векуа *Некоторые вопросы бесконечно малых изгибаний поверхностей* .,- Доклады АН СССР, – 1957. –Т. 112, №3. – С.377 – 380
- [2] И. Н. Векуа *Обобщенные аналитические функции* , - // М. : Наука, 1988. – 509 с.

В. М. Прокіп

(ІППММ НАН України, Львів, Україна)

E-mail address: v.prokip@gmail.com

Нехай $M_{m,n}(\mathbb{R})$ – множина $(m \times n)$ -матриць над комутативною областю головних ідеалів \mathbb{R} з одиницею $e \neq 0$; I_n – одинична матриця вимірності n ; $0_{m,k}$ – нульова $(m \times k)$ -матриця. В області головних ідеалів \mathbb{R} зафіксуємо множину неасоційованих елементів $\tilde{\mathbb{R}}$. Кожному неасоційованому елементу $a \in \tilde{\mathbb{R}}$ поставимо у відповідність повну систему лишків за модулем ідеалу (a) . Надалі через $d_k(B)$ позначимо ідеал області \mathbb{R} , який породжений мінорами k -го порядку матриці $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $k = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$.

Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ – матриця рангу $\text{rank } A = r$ над областю головних ідеалів \mathbb{R} . Для A існує матриця $W \in GL(n, \mathbb{R})$ така, що

$$AW_1 = H_A = \begin{bmatrix} 0_{k,n} \\ H_1 & 0_{m_1, n-1} \\ H_2 & 0_{m_2, n-2} \\ \dots & \dots \\ H_r & 0_{m_r, n-r} \end{bmatrix}, \quad k + m_1 + m_2 + \dots + m_r = m;$$

де k – кількість перших нульових рядків матриці A , ($k \geq 0$), а $k+1$ рядок матриці A відмінний від нульового. Якщо ж перший рядок матриці A є ненульовим, то нульовий блок $0_{k,n}$ в матриці H_A відсутній.

Матриці H_i в нижній блочно-трикутній матриці H_A визначені наступним чином:

$$H_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ * \end{bmatrix} \in M_{m_1,1}(\mathbb{R}), \quad H_2 = \begin{bmatrix} h_{21} & a_2 \\ * & * \end{bmatrix} \in M_{m_2,2}(\mathbb{R}), \quad \dots, \quad H_r = \begin{bmatrix} h_{r1} & \dots & h_{r,r-1} & a_r \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \in$$

$M_{m_r,r}(\mathbb{R})$, де a_i належать множині неасоційованих елементів $\tilde{\mathbb{R}}$ для всіх $i = 1, 2, \dots, r$. Крім цього, в перших рядках $[h_{i1} \dots h_{i,i-1} \ a_i]$ матриць H_i , $i \geq 2$, елементи h_{ij} належать повній системі лишків за модулем ідеалу (a_i) для всіх $j = 1, 2, \dots, r-1$. Матриця H_A називається (правою) *формою Ерміта матриці A* і вона для матриці A визначена однозначно. Надалі під терміном “*форма Ерміта матриці A* ” будемо розуміти, що матриця A елементарними перетвореннями стовпчиків приводиться до матриці H_A , яка визначена вище.

Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$, $A_0 = [A \ 0_{m,k}]$ і $\bar{A} = [A \ B]$. Відомо ([1, 2]), що матричне рівняння $AX = B$, (X – невідома матриця із $M_{n,k}(\mathbb{R})$), над областю головних ідеалів \mathbb{R} розв'язне тоді і тільки тоді, коли $\text{rank } A = \text{rank } \bar{A}$ і $d_k(A) = d_k(\bar{A})$ для всіх $k = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$, тобто коли форми Сміта матриць A_0 і \bar{A} співпадають. Нижче вкажемо умови розв'язності рівняння $AX = B$ в термінах форм Ерміта матриць A_0 і \bar{A} .

Теорема 1. *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ і $B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$. Матричне рівняння $AX = B$ розв'язне тоді і тільки тоді, коли форми Ерміта матриць $[A \ 0_{m,k}]$ і $[A \ B]$ співпадають.*

Наслідок 1. *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m,k}(\mathbb{R})$ і $C \in M_{m,l}(\mathbb{R})$. Наступні твердження еквівалентні:*

1. *Матричне діофантове рівняння $AX + BY = C$ розв'язне;*
2. *Форми Ерміта матриць $[A \ B \ 0_{m,l}]$ і $[A \ B \ C]$ співпадають;*
3. *Найбільший спільний лівий дільник матриць A і B є лівим дільником матриці C .*

Список літератури

1. J. A. Hermida-Alonso *On linear algebra over commutative rings* // Handbook of Algebra. – 2003. – Vol.3. – P. 3–61.
2. S. Friedland *Matrices* – Chicago.: University of Illinois at Chicago, 2010. – 437 p.

Ідемпотентні міри на K -ультраметричних просторах

О. Г. Савченко

(Херсонський аграрний університет, Херсон, Україна)

E-mail address: savchenko1960@rambler.ru

Нехай X — множина і $K \in [0, \infty]$. Метрику d на множині X будемо називати K -ультраметрикою, якщо $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$ для кожних $x, y, z \in X$ таких, що $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \leq K$. Відображення простору (X, d) у простір (Y, ρ) назвемо K -нерозтягуючим відображенням, якщо $f: X \rightarrow Y$ — неперервне відображення таке, що $\rho(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ для кожних $x, y \in X$ таких, що $d(x, y) \leq K$. Метрику d на множині X будемо називати рівномірною K -ультраметрикою, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що кожна куля радіуса K є також кулею радіуса $K + \varepsilon$.

Автор довів, що категорія K -ультраметричних просторів і K -нерозтягуючих відображень ізоморфна категорії стаціонарних розмитих метричних просторів та нерозтягуючих відображень для t -норми $*$, заданої формулою $a * b = \frac{ab}{\max\{a, b, \alpha\}}$, для фіксованого $\alpha \in (0, 1)$.

Аналог конструкції K -ультраметризації простору ймовірнісних мір з компактними носіями можна також знайти і для ідемпотентних мір. Нагадаємо, що якщо d — деяка метрика на просторі X , то на множині $I(X)$ ідемпотентних мір на X з компактними носіями метрику можна означити такою конструкцією (див. [1]).

Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Через n -LIP = n -LIP(X, d) позначаємо множину всіх ліпшицевих функцій з ліпшицевою константою $\leq n$ з множини $C(X)$. Для кожних $\mu, \nu \in I(X)$ нехай $\hat{d}_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(\varphi) - \nu(\varphi)| \mid \varphi \in n\text{-LIP}\}$. У статті [1] показано, що функція $\hat{d}: I(X) \times I(X) \rightarrow \mathbb{R}$, означена формулою $\hat{d}(\mu, \nu) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\hat{d}_n(\mu, \nu)}{2^i}$, є метрикою на множині $I(X)$.

Нехай тепер d є рівномірною K -ультраметрикою на множині X . Вважаємо, що ε взяте з означення рівномірної K -ультраметрики, $q_K: X \rightarrow X / \sim_K$ — факторвідображення, породжене розбиттям на кулі радіуса K . Через d_{HZ} позначаємо метрику на множині ідемпотентних мір з компактними носіями на ультраметричних просторах, означену у статті [2].

Прийmemo:

$$d_K(\mu, \nu) = \begin{cases} d_{HZ}(\mu, \nu), & \text{якщо} \\ I(q_K)(\mu) = I(q_K)(\nu), & \\ \max\{\hat{d}(I(q_K)(\mu), I(q_K)(\nu)), K + \varepsilon\}, & \text{у протилежному} \\ & \text{випадку.} \end{cases}$$

Доведено, що одержана метрика є рівномірною K -ультраметрикою на множині $I(X)$. Доповідь присвячена функторіальним властивостям одержаної K -ультраметризації.

Список літератури

- [1] L. Bazylevych, D. Repovš, M. Zarichnyi *Spaces of idempotent measures of compact metric spaces.*, // Topology and its Applications 157 (2010) 136—144.
- [2] O. Hubal, M. Zarichnyi *Idempotent probability measures on ultrametric spaces.*, // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 2008. — v.343, №2. — P.1052—1060.

Топологічна еквівалентність морсівських відображень кола в коло

С. В. Федорук

(КНУ ім. Т.Г. Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: svitlanaf3@mail.ru

В роботі ([1]) була отримана топологічна класифікація гладких відображень відрізка в відрізок. В даній роботі ми узагальнюємо ці результати на морсівські відображення кола в коло.

Позначимо через S^1 -одиничне коло. Гладке відображення $f : S^1 \rightarrow S^1$ називається морсівським, якщо всі його критичні точки є невинудженими.

Два гладких відображення f і $g : S^1 \rightarrow S^1$ є топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : S^1 \rightarrow S^1$ і $k : S^1 \rightarrow S^1$ такі, що $f \circ h = g \circ k$.

Морсівське відображення $f : S^1 \rightarrow S^1$ можна інтерпретувати, як гладку замкнену криву на двовимірному торі. Це дає можливість ввести поняття циклічної змї $\Gamma(f)$ по аналогії, як ввів поняття змї І. В. Арнольд для функцій на відрізку..

Теорема. Два морсівські відображення f та g з одиничного кола в одиничне коло є топологічно еквівалентними тоді і тільки тоді, коли відповідні їм циклічні змї $\Gamma(f)$ та $\Gamma(g)$ є еквівалентними.

Список літератури

- [1] И. В. Арнольд *Исчисление змей и комбинаторика чисел Бернулли, Эйлера и Спрингера групп Кокстера* . Успехи мат. наук, (1992), № 1, С. 3-45.

Про нескінченно малі конформні деформації поверхонь обертання

Ю.С. Федченко

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

E-mail address: Fedchenko_Julia@ukr.net

Вивчаємо нескінченно малі конформні деформації [1], [2] поверхні S класу C^3 в евклідовому просторі E_3 .

Теорема 1. Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S ($K \neq 0$) класу C^3 була конформною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції t , φ , які задовольняють рівняння

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) - \nabla_s(\varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d_\beta^s) + 2Ht = 0.$$

Тоді тензорні поля похідної вектора зміщення $\bar{U}_i = c_{i\alpha} \left(T^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta} \right) \bar{r}_\beta + c_{i\alpha} T^{\alpha\bar{n}}$ мають вигляд

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= t g^{\alpha\beta}, \\ T^s &= t_\alpha d^{s\alpha} - \varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d_\beta^s. \end{aligned}$$

Тут $T^{\alpha\beta} = T^{0\beta\alpha}$, $c^{\alpha\beta}$ -дискримінантний тензор, $c_{\alpha\beta}$ -коваріантні компоненти дискримінантного тензора, $d_\beta^s = d^{s\alpha} g_{\alpha\beta}$, $d^{s\alpha} = \frac{1}{K} c^{si} c^{\alpha j} b_{ij}$.

Досліджено нескінченно малі конформні деформації поверхонь обертання.

Теорема 2. Поверхня обертання $\bar{r} = (u \cos v, u \sin v, f(u))$ ($K \neq 0$, $d_1^1 - d_2^2 \neq 0$) допускає нетривіальну нескінченно малу конформну деформацію при $t = 0$. Тензори деформації $T^{\alpha\beta}$, T^s та функція φ виражаються в явному вигляді за формулами

$$\begin{aligned} T^{11} &= T^{12} = T^{22} = 0, \\ T^1 &= K'(v) \frac{1 + f'^2}{u f''} e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f' f''' - f'^3 f'''}{(f' + f'^3 - u f'') f''} du}, \\ T^2 &= -K(v) \frac{(3f' f''^2 - f''' - f'^2 f''')}{(f' + f'^3 - u f'') f''} e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f' f''' - f'^3 f'''}{(f' + f'^3 - u f'') f''} du}, \\ \varphi &= K(v) e^{-\int \frac{3f'^2 f''^2 - f' f''' - f'^3 f'''}{(f' + f'^3 - u f'') f''} du}, \end{aligned}$$

де $K(v)$ - деяка функція.

Список літератури

- [1] Е.Д. Фесенко. Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны // Изв. вузов Матем. **3** (1969) 72–77.
- [2] Ю.С. Федченко. Про нескінченно малі конформні деформації мінімальних поверхонь зі збереженням середньої кривини // Proc. Intern. Geom. Center **5** (3) (2012) 6-14.

Использование эвристических приемов в процессе формирования геометрических понятий

О. В. Амброзьяк

(Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого, Черкассы, Украина)

E-mail address: 01ga27_1989@ukr.net

Как известно, система понятий является одним из ключевых элементов для построения научной теории. Понятия геометрии имеют особую специфику, так как абстрактно описывают объекты окружающего мира и в то же время обладают особой функцией - развивают мышление человека до его наивысшей ступени. Эвристические приемы, по нашему мнению, должны активно применяться в процессе формирования геометрических понятий, так как они дают возможность не только овладеть понятием, то есть определением, набором свойств и признаков, но и познать способы деятельности, дающие возможность открывать новые знания, как в геометрии, так и в других дисциплинах, и как результат - в обыденной жизни. По классификации Е. И. Скафы ([1]) эвристические приемы включают в себя общие и специальные эвристики. Использование общих эвристик в процессе формирования геометрических понятий обусловлено природой самих понятий, так как анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, абстрагирование, систематизация и другие являются основными умственными действиями, что лежат в основе мышления, а значит и понятий. Не вызывает сомнения необходимость таких эвристических приемов как подведение под понятие и выведение следствий как необходимой составляющей их усвоения. Помимо вышеназванных, особую роль следует отводить специфическим эвристическим ориентирам, таким как: исследуй по частям, выбери эквивалентную систему обозначений, рассуждай от противного, ищи контрпример, выделяй главное, обобщи, ищи аналогию, рассмотри несколько моделей объектов. Их использование сопутствует пониманию учащимися понятия на каждом из четырех этапов его формирования, предотвращает навязывание алгоритмов. Еще одним преимуществом эвристических ориентиров является предоставление возможности на более глубоком уровне осуществить анализ фактов, явлений, объектов, понять модель формируемого понятия, подготовить к использованию общих эвристических приемов. Среди базовых эвристик решения эвристических задач в процессе формирования геометрических понятий особенное внимание следует уделить таким приемам как: рассмотрение предельного случая, метод малых изменений, введение дополнительного элемента, модификация, метод обобщения и индукции. Особое место при формировании понятий занимают эвристические предписания (эвристические вопросы и указания советы), целью которых является формирование активной стратегии наиболее рационального поиска исследование объекта. Речь идет о том, что для поиска и углубления знаний о понятии учитель подбирает ключевые вопросы таким образом, чтобы ответы учеников на них порождали новые вопросы, гипотезы. В результате, использование эвристик в форме вопросов, указаний-советов полностью не детерминирует действия учеников и ход их мыслей, но подводит к исследовательской деятельности, решению поставленной проблемы. Система эвристических приемов в условиях целенаправленного и постоянного использования в процессе формирования геометрических понятий позволяет формировать прочные знания учеников по предмету и развивает личность, которая способна жить в современном мире.

Список литературы

- [1] Скафа Е. И. *Теоретико-методические основы формирования приемов эвристической деятельности при изучении математики в условиях внедрения современных технологий обучения*: дис. ... докт.пед. наук: 13.00.02 / Елена Ивановна Скафа. - К., 2004. - 479 с.

О вычислении кривизны сферически симметричного суперпространства в системе maple 16.00

А. В. Аминова

Кафедра теории относительности и гравитации,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: asya.aminova@kpfu.ru, avaminova@gmail.com

М. Х. Люлинский

Кафедра теории относительности и гравитации,
Казанский (Приволжский) федеральный университет
E-mail: miklul@rambler.ru

The curvature of supermetric of spherically symmetric superspace is calculated. For this purpose, a program for the system Maple 16.00 has been developed. It implements algorithms to work correctly with the (super) tensor indices; the modified procedures of differentiation of the homogeneous components of (super)tensors were written.

Keywords: spherically symmetric superspace, curvature, program, Maple 16.

Данная работа посвящена построению суперсимметричных космологических моделей в рамках последовательного суперсимметричного подхода, развитого в работах А. В. Аминовой и С. В. Мочалова. Мы рассматриваем суперсимметрию как автоморфизм супергеометрической структуры, в частности, как инфинитезимальное суперпреобразование, оставляющее неизменной метрику суперпространства. Метрика определяется как инвариант супергруппы преобразований в духе Эрлангенской программы Ф. Клейна.

Мы наделяем пространство суперсимметричными свойствами, вводя переменные грассмановой алгебры, называемые также суперчислами. Два суперчисла антикоммутируют, и квадрат каждого из них равен нулю. Мы рассматриваем кольцеванное пространство грассмановых алгебр над сферически симметричным пространством – сферически симметричное суперпространство. В докладе рассказывается о программе вычисления компонент тензора кривизны суперпространства, с помощью которой получены тензор Римана и тензор Риччи сферического суперпространства, определенного ранее в работах А. В. Аминовой, С. В. Мочалова и М. Х. Люлинского.

Список литературы

- [1] Д. А. Лейтес. *Введение в теорию супермногообразий*, УМН, 1980, т. 35, вып. 1(211).
- [2] Ф. А. Березин. *Метод вторичного квантования*, М.: Наука, 1965.
- [3] А. В. Аминова, С. В. Мочалов. *Метрика суперпространства Минковского как инвариант супергруппы Пуанкаре*, Изв. Высш. Учеб. Завед. Мат., 1994, no. 3, 10–16.

Примеры эластичных восьмимерных тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга

М. В. Антипова

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: khnmar@rambler.ru

В работах [1], [2] была получена классификация восьмимерных тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга, т.е. с таким тензором, который в подходящем базисе имеет всего две ненулевые компоненты. В [1] ткани этого типа были разбиты на 2 типа. С тканями первого типа связано некоторое характеристическое уравнение. Если его корни вещественные и различные, то соответствующую ткань мы называем гиперболической тканью SB_m^8 первого типа; если его корни вещественные и совпадают, то соответствующую ткань мы называем параболической тканью SB_m^8 первого типа.

В [3] доказаны

Теорема. *Существует двупараметрическое семейство гиперболических тканей B_m^8 первого типа. В некоторых локальных координатах их уравнения имеют вид:*

$$\begin{aligned}z^1 &= x^1 + e^{-k(\lambda_1)x^2} [y^1 + m(\lambda_1) \cdot (x^2y^3 - x^3y^2)], \\z^2 &= x^2 + y^2, \\z^3 &= x^3 + y^3, \\z^4 &= x^4 + e^{-k(\lambda_2)x^2} [y^4 + m(\lambda_2) \cdot (x^2y^3 - x^3y^2)],\end{aligned}$$

где обозначено $m(\lambda_1) = k_1^{-1}b\lambda_1$, $m(\lambda_2) = k_2^{-1}b\lambda_2$.

Теорема. *Существует однопараметрическое семейство параболических тканей SB_m^8 первого основного типа. В некоторых локальных координатах их уравнения имеют вид:*

$$\begin{aligned}z^1 &= x^1 + e^{x^2} (y^1 + x^2y^3 - x^3y^2), \\z^2 &= x^2 + y^2, \\z^3 &= x^3 + y^3, \\z^4 &= x^4 + e^{x^2} [y^4 - Cx^2y^1 + C(x^2y^3 - x^3y^2)(1 - x^2)],\end{aligned}$$

где обозначено $C = 2\lambda a_{24}^1 k^{-1}$

В настоящей работе доказывается следующая

Теорема. *Гиперболическая и параболическая ткани SB_m^8 первого типа являются эластичными, т.е. в координатных муках этих тканей выполняется тождество $x(xy) = (xy)x$, и на тканях выполняется условие замыкания E [3].*

Список литературы

- [1] М. В. Антипова, А. М. Шелехов *Восьмимерные ткани Бола с почти нулевым тензором кривизны.* Известия вузов. Математика, 2013, №2, с. 3–15.
- [2] М. В. Антипова *Об одном приложении теории многомерных три-тканей.* Вестник Тверского государственного университета. Серия: прикладная математика, (2012), №32, С. 81-90.
- [3] М. А. Акивис, А. М. Шелехов. *Многомерные три-ткани и их приложения.* Тверь, Твер. гос. ун-т, 2010, 307 с.

Геометрия псевдо-конформно-плоских почти контактных метрических многообразий

А. В. Аристархова

(Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК), Москва, Россия)

E-mail address: aristarhowa@gmail.com

Контактно-конформно-полуплоские, то есть контактно-автодуальные или контактно-антиавтодуальные, 5-мерные многообразия [1], снабженные почти контактной метрической структурой, оказались богатыми геометрическим содержанием. В теории конформно-полуплоских 4-мерных многообразий [2], известно, что 4-мерное риманово многообразие конформно плоско тогда и только тогда, когда оно одновременно автодуально и антиавтодуально. В связи с этим, интересно выяснить связь между конформно-плоскими многообразиями и многообразиями, которые являются одновременно контактно-автодуальными и контактно-антиавтодуальными, такие многообразия в данной работе были названы *псевдо-конформно-плоскими*.

В рамках работы для квази-сасакиевых многообразий доказано:

Теорема 1. *5-мерное квази-сасакиево многообразие класса CR_1 псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

В силу же того, что косимплектические и сасакиевы многообразия являются квази-сасакиевыми многообразиями класса CR_1 , были получены следующие следствия.

Теорема 2. *5-мерное косимплектическое многообразие псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

Теорема 3. *5-мерное сасакиево многообразие псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

Кроме того, доказано:

Теорема 4. *5-мерное многообразие Кенмоцу псевдо-конформно-плоско тогда и только тогда, когда оно конформно плоско.*

И все же, не смотря на тенденциозность полученных результатов, мы смеем предположить, что в общем случае псевдо-конформная плоскость 5-мерного почти контактного метрического многообразия не будет равносильна его конформной плоскости.

Список литературы

- [1] А. В. Аристархова, В. Ф. Кириченко *Контактно-автодуальная геометрия 5-мерных квази-сасакиевых многообразий.* - Матем. заметки. 90: 5, (2011), С. 643-658.
- [2] А. Бессе *Многообразия Эйнштейна.* - М.: Мир, (1990), Т. 1-2, 704 с.

Каноническая в пространстве аффинной связности группа

Е. Б. Балакирева

(ДГТУ, Днепродзержинск, Украина)

E-mail address: elanagutta@gmail.com

Обобщим понятие каноничности, введенное в работе [1] для групп $T_M^{gH} = \{t^m(x)\}$ [2], на случай бесконечных деформированных групп DA с параметрами $g^a(x) = \{t^m(x), L(x)_n^m\}$, которые построены из специальных нелокальных автоморфизмов группы T_M^{gH} и описывают пространства аффинной связности (без кручения). Их закон умножения имеет вид:

$$(g * g')^m(x) := \bar{\varphi}^m(x, t(x), t'(x')), \quad (1)$$

$$(g * g')_n^m(x) := L(x)_p^m \bar{\pi}(x, t(x))_r^p L'(x')_k^r \bar{\pi}(x', t'(x'))_l^k \bar{\pi}^{-1}(x, \bar{\varphi}(x, t(x), t'(x')))_n^l, \quad (2)$$

где $x'^\mu := x^\mu + \bar{H}_x^{-1\mu}(t(x))$, \bar{H}_x — функции деформации группы $T_M^{gH} \subset DA$, $L(x)$ — линейные превращения, а функции $\bar{\varphi}_x$ и $\bar{\pi}_x$ определяют законы умножения групп T_M^{gH} и DA .

Рассмотрим специальные параметры $g^a = (s\tau, 1)^a$ группы DA (τ — вектор, касательный в точке x к параметрической кривой с параметром s).

Определение 1. Если для произвольных двух точек x и x' многообразия M существует кривая, вдоль которой

$$(s\tau, 1) * (s'\tau', 1) = ((s + s')\tau, 1) \quad (3)$$

(τ' — касательный в x' вектор), то группа DA с таким законом умножения — каноническая.

Из условия каноничности $(s + s')\tau^m = \varphi_x^m(s\tau, s'\tau')$ группы T_M^{gH} , которое следует из (3), выясняется, что эта кривая — геодезическая: $\dot{\tau}^m + \gamma_{x\ kn}^m \tau^n \tau^k = 0$.

В то же время закон умножения (2) при $g^a = (s\tau, 1)^a$ принимает вид:

$$\pi_x((s + s')\tau)_n^m = \pi_x(s\tau)_k^m \pi_{x'}(s'\tau')_n^k. \quad (4)$$

Утверждение 1. Условие каноничности групп DA объединяет в себе условие каноничности группы T_M^{gH} и условие композиции (4). Тогда, в случае канонической группы DA , последовательность инфинитезимальных переносов векторов вдоль геодезических даёт тот же результат, что и конечные параллельные переносы в пространствах аффинной связности, не только для касательных векторов τ , но и для произвольных векторов θ .

Определение 2. Группу, которая является канонической на множестве групп DA , будем называть группой параллельных переносов векторов в пространстве аффинной связности и обозначать DP .

Отметим что здесь получен более общий, чем в [3], вариант группы DP , без привязки к метрике искривлённого пространства. И поскольку существует и единственно решение уравнения $(\partial_k \pi_x(s\tau)_n^m - \pi_x(s\tau)_p^m \gamma_{x' kn}^p) \tau'^k \theta'^n = 0$, полученного из (4), с граничными условиями на функции $\pi_x(s\tau)$, справедливо следующее:

Утверждение 2. Группа DP однозначно определена по коэффициентам связности $\gamma_{x kn}^m$.

Список литературы

- [1] С.Є. Самохвалов Канонічні деформовані групи дифеоморфізмів та скінченні паралельні перенесення в ріманових просторах // Мат. Мод. — 2007 — № 1(16) — с. 22–27.
- [2] С.Є. Самохвалов Теоретико-груповий опис ріманових просторів // Укр. мат. журн. — 2003. — Т.55, №9. — С. 1238–1248.
- [3] Е. Балакирева Сравнение двух видов переносов векторов риманова пространства // Труды международного геометрического центра. — 2011. — Т.4, №2. — с. 6–11.

О свойствах пятерки замечательных сетей

Л. Л. Безкоровайная

(Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: mazur_elena@mail.ru

Пусть $Q = (g, b, \rho, h, l)$ - конечное множество, элементами которого являются пять определенных сетей, расположенных на поверхности трехмерного евклидова пространства. Первые три из них - широко известные сети, а именно: g - изотропная сеть, b - асимптотическая, ρ - сеть линий кривизны. В пятерку замечательных включена также сеть линий кручения (LGT-сеть), введенная в [1] и обозначенная через h . Сеть линий кручения, как и сеть линий кривизны, является действительной, ортогональной и регулярной в области поверхности без омбилических точек. Она является бисекторной для сети линий кривизны.

Через l обозначена т.н. характеристическая сеть, которая в числе других является объектом исследования в ранних работах Н.В.Ефимова [2]. Эта вещественная сеть не является ортогональной.

В работе проводятся исследования пар, троек и четверок сетей из множества Q в отношении их взаимной аполярности, комполярности и др. Отметим следующие выводы, полученные с привлечением [3]:

- Сеть линий кривизны ρ является аполярной сетью для четверки сетей (g, b, h, l) .
- Тройки сетей (g, ρ, h) и (b, ρ, l) являются некомполярными.
- Тройки сетей (g, b, h) , (g, b, l) , (b, h, l) и (g, h, l) являются комполярными.

Найдены разложения сетей из множества Q по тройкам некомполярных сетей.

Список литературы

- [1] Л. Л. Безкоровайная, Т. Ю. Вашпанова *LGT-сітка поверхні та її властивості.*- Вісник Київського національного університету. Серія: фіз.-мат. науки, (2010), № 2, С. 7-12.
- [2] Н. В. Ефимов *Инвариантные характеристики некоторых сетей и поверхностей.* Труды семинара по вектор. и тензор. анализу, вып. V, 1941, стр.148-172.
- [3] В. И. Шуликовский *Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении.* М., Физматгиз, 1963, 540 с.

О частном случае канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана

В. Березовский

(Уманский национальный университет садоводства, Умань, Украина)

E-mail address: berez.volod@rambler.ru

Й. Микеш

(Университет Палацкого, Оломоуц, Чешская Республика)

E-mail address: josef.mikes@upol.cz

ABSTRACT. We continue the investigation of special canonical almost geodesic mappings of first type which preserved Riemann tensor.

Рассматриваются канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности A_n на \bar{A}_n (см. [1]), характеризующиеся следующими уравнениями (см. [2]):

$$P_{ij,k}^h = -P_{ij}^\alpha P_{k\alpha}^h + \delta_{(k}^h a_{ij)}, \quad (1)$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор и P_{ij}^h – тензор деформации связностей.

Изучая условия интегрируемости системы (1) получены формулы

$$(n-1)(n+2)a_{ik,j} = n(P_{ik}^\alpha R_{\alpha j} - P_{\alpha(k}^\beta R_{i)j\beta}^\alpha) + R_{\alpha(k} P_{i)j}^\alpha - P_{\alpha j}^\beta R_{(ik)\beta}^\alpha - \\ - P_{\alpha(i}^\beta R_{j|k)\beta}^\alpha + (n+1) \cdot (a_{j(i} P_{k)\alpha}^\alpha - a_{\alpha(i} P_{k)j}^\alpha) + 2 \cdot (a_{ik} P_{j\alpha}^\alpha - a_{j\alpha} P_{ik}^\alpha). \quad (2)$$

Имеют место

Теорема 1 Для того чтобы пространство аффинной связности A_n допускало почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями (1), на пространство аффинной связности \bar{A}_n , необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение замкнутой системы уравнений (1) и (2) в ковариантных производных относительно неизвестных функций P_{ij}^h и a_{ij} , которые, естественно, должны удовлетворять еще некоторым условиям алгебраического характера.

Теорема 2 Тензор Римана R_{ijk}^h является инвариантным относительно почти геодезических отображений, определяемых уравнениями (1), геометрическим объектом пространств аффинной связности.

Теорема 3 Если аффинное пространство допускает почти геодезическое отображение, определяемое уравнениями (1), на \bar{A}_n , то \bar{A}_n является аффинным.

Список литературы

- [1] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств*, М.: Наука, (1979).
- [2] V. E. Berezovski, J. Mikeš, A. Vanžurová, *On a class of curvature preserving almost geodesic mappings of manifolds with affine connection*, Proc. Int. Conf. APLIMAT 2011, Bratislava, (2011), 623–628.

Структурно устойчивые внутренние отображения

И. Ю. Власенко

(Институт Математики, Киев, Украина)

E-mail address: vlasenko@imath.kiev.ua

Показано, что множество структурно устойчивых внутренних отображений двумерных многообразий, не являющихся гомеоморфизмами, т. е. являющихся разветвленными накрытиями, не пусто.

Выделен простой класс структурно устойчивых внутренних отображений двумерных многообразий, для которого проведена топологическая классификация.

Список литературы

- [1] С. Стоилов *О топологических принципах теории аналитических функций.* - М., Мир. - 1964.
- [2] Ю. Ю. Трохимчук *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности.* - Институт математики НАН Украины. Киев. - 2008.
- [3] И. Ю. Власенко *Динамика внутренних отображений.* - Нелінійні Коливання. 2011. Т.14 № 2. -С. 181-186.

Обобщенные почти эрмитовы структуры на однородных многообразиях

Д. В. Вылегжанин

(БГУ, Минск, Беларусь)

E-mail address: vyldev@tut.by

Изучение многообразий со структурами является одним из актуальных направлений современной дифференциальной геометрии. Среди наиболее исследуемых структур отметим следующие: почти эрмитова структура, метрическая структура почти произведения, метрическая почти контактная и метрическая f -структура. В работах В.Ф. Кириченко (например, [1]) описана новая конструкция являющаяся обобщением многих классических структур. Основным объектом предложенного подхода является понятие обобщенной почти эрмитовой структуры (GAN -структуры). К особенностям конструкции предложенной В.Ф. Кириченко можно отнести то, что многообразие обладающее GAN -структурой можно изучать не только по одной классической структуре, а также и по совокупности структур, количество которых отражается рангом соответствующей обобщенной почти эрмитовой структуры [1]. Однако, способы построения обобщенных почти эрмитовых структур ранга большего 1 не были описаны и такие многообразия оставались в стороне от основных исследований.

В 90-х гг. в работах В.В. Балащенко и Н.А. Степанова [2] были описаны канонические структуры классических типов, а также предьявлены алгоритмы построения таких структур на однородных Φ -пространствах. В следствии чего для исследований стал доступен обширный класс пространств обладающих несколькими классическими структурами.

В результате изучения гладких многообразий с перестановочными f -структурами удалось разработать методы построения на таких многообразиях обобщенных почти эрмитовых структур рангов 1 и выше [3]. Непосредственное приложение полученных результатов к однородным многообразиям с каноническими структурами позволило задать на таких многообразиях обобщенные почти эрмитовы структуры различных рангов (см., например, [4]).

В результате исследований была установлена взаимосвязь свойств GAN -структур ранга 1 со свойствами структурами больших рангов. В частности, для однородных Φ -пространств конечного порядка было доказано:

Теорема 1. Пусть G/H — естественно редуktивное однородное Φ пространство порядка k , тогда любая GAN -структура ранга r , построенная на базовых f -структурах и не содержащая f -структуру с индексом i таким, что $3i = k$, является GH -структурой ранга r .

Список литературы

- [1] Кириченко В.Ф. *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий*, мтоги науки и техники. Проблемы геометрии. ВмНмТм АН СССР. Т.18, (1986), 25-71.
- [2] Балащенко В.В., Степанов Н.А. *Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Φ -пространствах*, Матем. сборник. Т.186, №11, (1995), 3-34.
- [3] Вылегжанин Д.В. *Обобщенная эрмитова геометрия на многообразии с f -структурами*, мзвестия вузов. Математика. №6, (2003), 28-36.
- [4] Балащенко В.В., Вылегжанин Д.В., *Обобщенная эрмитова геометрия на однородных Φ -пространствах конечного порядка*, мзвестия ВУЗов. Математика. № 10, (2004), 33-44.

О вложении шестимерной групповой три-ткани с тривиальной сердцевинной в три-ткань Муфанг

Г. Д. Гегамян

(Тверской госуниверситет, Тверь, Россия)

E-mail address: geg_geghamyan@yahoo.com

В работе [2] найдены структурные уравнения левой три-ткани Бола $B_l \equiv B_l(r, r, r)$, сердцевина которой является тривиальной, то есть изотопна абелевой группе. Такая ткань обозначена B_l^0 . Доказано, что локально симметрическая связность, порождаемая сердцевинной тканью B_l^0 на базе ее первого слоения, является локально плоской. Полученные результаты применены для групповых три-тканей, которые, как известно [1], являются тканями Бола. Групповые ткани с тривиальной сердцевинной характеризуются условиями $a_{jp}^i a_{km}^p = 0$, которые равносильны равенству $[[\xi\eta]\zeta] = 0$ в локальной W -алгебре групповой ткани, (здесь a_{jk}^i – тензор кручения ткани). Напомним [1], что W -алгебра групповой ткани является алгеброй Ли. Указанные условия означают, что алгебра Ли будет нильпотентной. Рассмотрены четырехмерные ($r = 2$) и шестимерные ($r = 3$) групповые три-ткани с тривиальной сердцевинной. Оказалось, что при $r = 2$ тривиальную сердцевину имеет только параллелизуемая три-ткань, то есть групповая три-ткань, определяемая абелевой группой. В случае $r = 3$, кроме параллелизуемой, существует еще только одна групповая три-ткань с тривиальной сердцевинной (ее локальная W -алгебра – единственная трехмерная неабелева нильпотентная алгебра Ли [3]). Эта групповая ткань задается уравнениями

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = x^2 + y^2, \quad z^3 = x^3 + y^3 - x^1 y^2 + x^2 y^1. \quad (1)$$

В настоящей работе построено вложение указанной три-ткани в некоторую десятимерную три-ткань Муфанг, уравнения которой в некоторых локальных координатах приведены к виду

$$\begin{cases} z^i = x^i + y^i, \quad (i = 1, 2, 4), & z^3 = x^3 + y^3 - x^1 y^2 + x^2 y^1, \\ z^5 = x^5 + y^5 + x^3 y^4 - x^4 y^3 + x^1 x^2 y^4 + 2x^1 x^4 y^2 + x^4 y^1 y^2 + 2x^2 y^1 y^4. \end{cases} \quad (2)$$

Оказалось, что локальная W -алгебра этой ткани Муфанг (алгебра Мальцева) является разрешимой нильпотентной алгеброй – единственной пятимерной нелинейной алгеброй Мальцева с указанными свойствами. Справедлива

Теорема. *Шестимерная групповая три-ткань (1) с тривиальной сердцевинной может быть реализована как фактор-ткань десятимерной три-ткани Муфанг (2) по ее четырехмерной параллелизуемой подткани.*

Показано, что сердцевина три-ткани Муфанг (2) задается уравнениями

$$\begin{cases} c^i = 2a^i - b^i, \quad (i = \overline{1, 4}), \\ c^5 = 2a^5 - b^5 + 2a^1(a^2 - b^2)(a^4 - b^4) + 2a^2(a^4 - b^4)(a^1 - b^1) + 2a^4(a^1 - b^1)(a^2 - b^2). \end{cases}$$

Список литературы

- [1] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*// монография/ Тверь, ТвГУ. 2010. 308 с.
- [2] Гегамян Г. Д., Толстихина Г. А. *О левых тканях Бола с тривиальной сердцевинной*// Вестник Тверского государственного университета. Серия: прикладная математика. Выпуск 2(25), №17. 2012. С. 99–114.
- [3] Кузьмин Е. Н. *Алгебры Мальцева размерности пять над полем характеристики нуль*// Алгебра и логика. Том 9, №5. 1970. С. 691–700.

Полусвободное S^1 -действие и отображения Ботта в окрестности

Д. Гольцов

(Институт математики НАН України, Київ)

E-mail address: golts@ukr.net

В работе ([1]) для гладких многообразий с полусвободным действием окружности были исследованы S^1 -инвариантные отображения Ботта в окрестности .

Отображение $f : M^n \rightarrow S^1$ называется S^1 -отображением Ботта, если все его критические точки образуют невырожденные критические окружности.

Известно, что существование S^1 -отображения Ботта на гладком многообразии M^n эквивалентно тому, что M^n допускает разложение на круглые ручки. По теореме Гайдука-Шарко гладкое замкнутое многообразие M^n допускает разложение на круглые ручки тогда и только тогда, когда $H^1(M^n, R) \neq 0$ и его эйлерова характеристика $\chi(M^n) = 0$.

Пусть M^{2n} - гладкое многообразие с полусвободным S^1 -действием, у которого есть только изолированные критические точки p_1, \dots, p_k . Рассмотрим на нем такое гладкое S^1 -инвариантное отображение в окружность, что каждая компонента его сингулярного множества будет или невырожденной точкой, или невырожденной окружностью. Для такого отображения, доказаны следующие утверждения:

1) Если $H^1(M^{2n}, R) \neq 0$, то на существует S^1 -инвариантное S^1_* -отображение Ботта из M^{2n} в S^1 .

2) Пусть $H^1(M^{2n}, R) \neq 0$. Для каждой точки p_j рассмотрим стандартную карту (U_j, h_j) и функцию

$$f_j = f_j(p_j) - |z_1|^2 - \dots - |z_\lambda|^2 + |z_\lambda|^2 + \dots + |z_n|^2$$

на (U_j) , где λ - произвольное целое число от 0 до n .

Тогда на M^{2n} существует S^1 -инвариантное S^1_* -отображение Ботта из M^{2n} в S^1 такое, что $f = f_j$ на (U_j)

Список литературы

- [1] D. Gol'tsov, V. Sharko *Semi-free S^1 action and Bott map into the circle.*- Збірник праць Інституту Математики Національної академії наук України, Т.9 №2, (2012), Р. 95-104.

Связности тангенциально-вырожденной поверхности

М. Ф. Гребенюк

(Национальный авиационный университет, г. Киев, Украина)

E-mail address: ahha@i.com.ua

В данной работе при построении двойственных пространств аффинной связности тангенциально-вырожденной поверхности неевклидового пространства используются результаты, полученные в работе [1].

Аффинную связность присоединяем к тангенциально-вырожденной поверхности, индуцированной гиперполосой SH_r , внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента.

Рассматриваем систему форм ω_i^n, θ_i^j , полученную преобразованием [2], [3]:

$$\theta_i^j = \omega_i^j - \delta_i^j \omega_n^n - \Gamma_i^{j\ell} \omega_\ell^n$$

Эта система удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева и определяет первое пространство аффинной связности ∇ . Охват объекта этой связности ∇ осуществляем с помощью компонент фундаментального объекта третьего порядка по формуле:

$$\Gamma_i^{j\ell} = L^{j\ell} d_i.$$

Второе пространство аффинной связности $\bar{\nabla}$ определяем системой форм:

$$\omega_i^n, \quad \bar{\theta}_i^j = \theta_i^j - \bar{\Gamma}_i^{j\ell} \omega_\ell^n.$$

Охват объекта аффинной связности $\bar{\nabla}$ получаем следующим образом:

$$\bar{\Gamma}_i^{j\ell} \omega_i^n = a^{j\ell k} a_{ki}.$$

В работе показано, что формы аффинных связностей ∇ и $\bar{\nabla}$ преобразуются друг в друга по инволютивному закону.

Полученные результаты дополняют общую теорию многообразий многомерных пространств и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории многомерных аффинных и проективных пространств.

Список литературы

- [1] М. Ф. Гребенюк. *Двоїсті афінні зв'язності на регулярній гіперполосі*. Вісник Київського університету, Серія: Фізико-мат. науки (2001), в. 4, с. 27–32.
- [2] Г. Ф. Лаптев. *Многообразия, погруженные в обобщенные пространства*. Тр. 4-го Всес. матем. съезда. Л.: Наука, (1961, 1964), т. 2, с. 226-233.
- [3] Г. Ф. Лаптев, Н.М. Остиану. *О распределениях m -мерных линейных элементов в n -мерном проективном пространстве*. Ин-т научн. информ. АН СССР, (1971), 16с., Деп. № 3683-71.

Эластичные три-ткани

К.Р.Джукашев

(Тверской государственной университет, Тверь, Россия)

E-mail address: dzhukashev@gmail.com

Многомерная три-ткань называется эластичной или тканью E , если в любой ее координатной лупе выполняется тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. В [1] найдены соотношения, связывающие тензоры кривизны и кручения ткани E :

$$b(x, y, z) = -b(x, z, y), \quad b(x, y, a(x, y)) = 0, \quad (1)$$

и доказано, что эластичные три-ткани образуют собственный подкласс средних тканей Бола.

Соотношения (1) получены из тождества эластичности при сравнении членов третьего и четвертого порядков в произведениях $x(yx)$ и $(xy)x$.

При дифференцировании соотношений (1) получится еще ряд тензорных равенств, найденных в [2]:

$$c_1(x, y, z, t) = -c_2(x, y, z, t) = -b(x, [zt], y) + b(x, [yz], t) + b(x, [yt], z), \quad (1)$$

$$c_1 = -c_2, \quad c_{11} = -c_{12} = -c_{21} = c_{22}, \quad (2)$$

$$b(x, y, [x[xy]]) = 0, \quad b(x, x, [xy]) = 0, \quad b([xy], y, [xy]) = 0, \quad (3)$$

$$b(x, y, [y[xy]]) = 0, \quad b(x, x, [y[xy]]) = 0, \quad (4)$$

$$b(x, y, b(x, x, y)) = 0, \quad b(x, x, b(y, y, x)) = 0. \quad (5)$$

Обозначим совокупность всех полученных таким образом соотношений через S .

В [2] сформулировано предположение, что сравнение членов пятого порядка в тождестве эластичности не дает новых тензорных соотношений, помимо S , однако полностью доказательство не проведено.

Мы приводим полное доказательство данного утверждения.

Список литературы

[1] Шелехов, А.М.: *Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$* . Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140 (РЖМат, 1992, 5А550).

[2] G.A. Balandina, A.M. Shelekhov. On general theory of elastic webs // Межвузовский тематический сборник научных трудов. Тверь: ТГУ, 1995. с. 62-74

Билинейные системы оптимального управления ¹

В. В. Дикусар, Н. Н. Оленев

(ВЦ РАН, Москва, Россия)

E-mail address: dikussar@yandex.ru

В настоящей работе исследованы билинейные системы оптимального управления (ОУ). Для квадратичного терминального функционала были получены следующие результаты:

(1) Необходимое и достаточное условия оптимальности для задачи общего вида и ряда частных случаев.

(2) Исследована выпуклость функционала задачи для коммутативных билинейных систем.

(3) Исследована структура множеств достижимости, обнаружена важная связь граничных точек множества достижимости и допустимых управлений.

(4) Получены условия выпуклости множества достижимости для частных случаев билинейных систем ОУ.

Вопросы, связанные с нелинейными системами оптимального управления, на текущий момент проработаны не в достаточной мере. Это связано со сложностью изучения данных систем классическими методами вариационного исчисления. По моему мнению можно отметить два наиболее перспективных подхода к исследованию данных систем: геометрический подход на основе хронологического исчисления и исследование алгебр Ли соответствующих билинейных и аффинных систем ОУ. Необходимы исследования в отношении синтеза оптимального управления для билинейных и аффинных систем, рассмотрение билинейных систем с функционалами общего вида, рассмотрение вопросов выпуклости множества достижимости для аффинных задач в общем виде.

Результаты теории иллюстрируются на модели "хищник-жертва".

Список литературы

- [1] А. А. Аграчёв, Р. В. Гамкрелидзе *Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление*. Матем. сб., 1978, 107(149):4(12), 104-144.
- [2] Д. И. Бобровский *Исследование ранговых свойств билинейных систем и структуры множества достижимости. Динамика неоднородных систем* Под. Ред. Ю.С. Попкова. Т.32(3). М.: Изд. ЛКИ, 2008, С. 8-14.
- [3] Д. И. Бобровский *Задача билинейного оптимального управления*. Сборник трудов XII Всероссийской школы-семинара. Ростов-на-Дону: изд. Южного федерального университета, 2007.
- [4] С. А. Вахрамеев, А. В. Сарычев *Геометрическая теория управления*. Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 1985, 23, 197-280.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №№ 11-07-00201, 12-01-00916, 13-07-1020), ПФИ Президиума РАН № 14, ПФИ ОМН РАН №3.

Г-планарные отображения римановых пространств с квази-симплектической структурой

М. В. Добик

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: Masika0001@mail.ru

Рассматривались Г-планарные отображения римановых пространств с квази-симплектическими структурами.

Исследование ведется в тензорной форме, локально, в классе вещественных достаточно гладких функций.

Г-планарные отображения были введены проф. Синюковым Н.С. и Микешем Й. в ([1]).

Пусть римановы пространства $V_n(g_{ij}, F_i^h)$ и $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ находятся в Г-планарном отображении. Тогда их основные уравнения в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x),$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_n и V_n с метрическими тензорами \bar{g}_{ij} и g_{ij} , соответственно; ψ_i, φ_i - векторы; F_i^h - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование. В работе ([2]) доказано, что Г-планарное отображение сохраняет аффинорную структуру:

$$\bar{F}(x) = aF(x) + b\delta, \text{ где } a, b = \text{const.}$$

Риманово пространство наделено симплектической структурой, если на нём задано поле тензора F_{ij} :

$$F_{(ij,k)} = 0, F_{(ij)} = 0, F_{(ij)} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, |F_i^h| \neq 0.$$

Мы рассматриваем структуру более общего типа, не требующую невырожденности аффинора.

В предположении, что аффинор F определяет квази-симплектическую структуру на V_n и \bar{V}_n т.е.

$$F_{(ij)} = \bar{F}_{(ij)} = 0, F_{(ij)} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \bar{F}_{(ij)} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i}, F_{(ij,k)} = \bar{F}_{(ij/k)} = 0,$$

где "," и "|" знаки ковариантной производной по связностям Γ и $\bar{\Gamma}$, соответственно, строится новая форма основных уравнений рассматриваемых отображений по методу профессора Синюкова Н.С. ([3]), допускающая эффективное исследование. Найдено инвариантное преобразование квази-симплектических пространств, находящихся в Г-планарном отображении, благодаря чему появилась возможность строить бесконечное множество пар пространств с квази-симплектической структурой, допускающих Г-планарное отображение друг на друга.

Список литературы

- [1] Микеш Й., Синюков Н.С. *О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности* .- Известия ВУЗов, Математика, (1983), №1(248),56-61.
- [2] Фоменко А.Т. *Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.*- М.: изво Моск. ун-та, (1983).
- [3] Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств* .- Москва "Наука", (1979).

Топологические свойства семейства периодических краевых задач

Я. М. Дымарский, Ю. Евтушенко

(ЛГУВД, г. Луганск; ИХТ, г. Рубежное, Украина)

E-mail address: dymarskii@mail.ru, julia.evtushenko@crambler.ru

Мы рассмотрим семейство

$$-y'' + p(x)y = \lambda y, \quad y(0) - y(2\pi) = y'(0) - y'(2\pi) = 0$$

периодических краевых задач на собственные значения с 2π -периодическим вещественным потенциалом $p \in C^0$ в качестве функционального параметра. Для фиксированного потенциала p спектр задачи состоит из изолированных, не более, чем двукратных, вещественных собственных значений и имеет вид

$$\lambda_0(p) < \lambda_1^-(p) \leq \lambda_1^+(p) < \dots < \lambda_k^-(p) \leq \lambda_k^+(p) < \dots \rightarrow \infty.$$

Нас интересует подмножество

$$P_k := \{p \mid \lambda_k^-(p) = \lambda_k^+(p)\} \subset C^0$$

тех потенциалов, для которых k -е собственное значение является двукратным. Будет дано новое полное описание топологической структуры подмножества P_k (другой подход к проблеме изложен в [1]). В частности, мы докажем "гипотезу трансверсальности" В.И. Арнольда ("Моды и квазимоды", Функ. анал. и его прил., **6**, No. 2, 1972) о том, что P_k является гладким подмногообразием коразмерности два.

Список литературы

- [1] Дымарский Я.М. *Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов* // Современная матем. Фундаментальные направления — 2007. — 24. — С. 3-159.

О некоторых псевдоримановых пространствах, допускающих проективные движения

З. Х. Закирова

(КГЭУ, Казань, Россия)

E-mail address: zolya_zakirova@mail.ru

В работе ведется исследование n -мерных псевдоримановых пространств $V^n(g_{ij})$ с сигнатурой $[+ + - - \dots - -]$, которые допускают проективные движения, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Проблема определения $2D$ римановых многообразий, которые допускают проективные движения или инфинитезимальные проективные преобразования, т.е. непрерывные группы преобразований, сохраняющих геодезические, рассматривались С. Ли и М. Кенигсом (см. [1]). Другие важные результаты были получены А.З. Петровым в работе [2], который классифицировал геодезически эквивалентные псевдоримановы пространства V^3 . Для риманова многообразия с размерностью > 2 похожая проблема была решена Г. Фубини в [3] и А.С. Солодовниковым в [4], в их трудах содержится классификация римановых пространств с размерностью > 2 по локальным группам проективных преобразований, более широким, чем группы гомотетий. В работе [5] А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3 , допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. Данная проблема не решена для псевдориманова пространства с произвольной сигнатурой.

Для того, чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (см. [6])

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \quad (1)$$

Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc\dots]$, то мы будем называть соответствующее пространство — h -пространством типа $[abc\dots]$. Эти идеи впервые были высказаны П.А. Широковым (см. [7]). Основной метод определения псевдоримановых многообразий, допускающих негомотетическую проективную группу G_r , был развит А.В.Аминовой (см. [5]).

Список литературы

- [1] Konigs M. G. *Lecons sur la theorie generale des surfaces* .-, Appl. II to G. Darboux. IV. (1896), P. 368.
- [2] Петров А.З. *О геодезическом отображении римановых пространств неопределенной метрики* .-, Уч. зап. Казан. ун-та. 1949. Т. 109, N3, с. 7-36.
- [3] Fubini G. *Sui gruppi trasformazioni geodetiche* .-, Mem. Acc. Torino. Cl. Fif. Mat. Nat. 1903, Vol. 53, N2, P. 261-313.
- [4] Солодовников А.С. *Проективные преобразования римановых пространств* .-, Успехи Мат.Наук, 1956, N11, P. 45-116.
- [5] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* .-, Успехи Мат.Наук **50** (1995), 1(301), 69-142.
- [6] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия* .-, М.:ИЛ, 1948, 316 с.
- [7] Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров 2-го порядка в римановых пространствах* .-, Изв. Казанск. физ.-мат. общ., 1925 (25), № 2, с. 86-114.

Изгибания плоских многоугольников с сохранением индекса

Е. С. Запутряева

(МПУ, Москва, Россия)

E-mail address: katezap@yandex.ru

В 1970-х годах сразу в нескольких областях математики (геометрии, теории шарнирных механизмов, теории распознавания образов, моделировании) появилась «задача плотника», или задача об изгибании ломаных и многоугольников с сохранением длин сторон. Одна из ее формулировок гласит: всегда ли два изометричных жордановых (т.е. не имеющих самопересечений) многоугольника можно соединить изгибанием, не допуская в ходе деформации появления самопересечений? Положительный ответ на этот вопрос был получен примерно через 30 лет: в ([2]) предъявлен алгоритм, который приводит многоугольник к выпуклому, и композицией двух таких изгибаний можно соединить два любых данных изометричных жордановых многоугольника (о других результатах этой теории можно посмотреть работы [3], [4],[5]).

Для случая многоугольников с возможными самопересечениями И.Х. Сабитовым был поставлен вопрос о возможности их изгибания друг в друга с сохранением такой важной их топологической характеристики, как индекс (об определении и вычислении индекса многоугольника см. [1]). Так как имеются примеры изометричных многоугольников одинакового индекса, не соединимых сохраняющим индекс изгибанием, то появляется задача нахождения условия такой соединимости многоугольников или хотя бы алгоритма, в ходе выполнения которого должен появиться ответ на этот вопрос.

Эта задача оказалась весьма непростой, и нам удалось получить ее полное решение пока только для четырехугольников. Пусть даны два изометричных четырехугольника P_1 и P_2 с одинаковым индексом. Тогда в зависимости от возможных значений их индексов (0, 1 или -1) имеет место один из следующих вариантов. 1) Если эти многоугольники оба имеют одинаковый индекс ± 1 , то они соединимы сохраняющим индекс изгибанием. 2) Если индексы четырехугольников равны 0, то соединимости этих 4-х угольников может не быть, но у них среди четырех пар соответствующих углов найдется пара (приводится способ определения номера этой пары в зависимости от длин сторон), по значениям углов в которой можно выяснить соединимость 4-х угольников: если у обоих четырехугольников P_1 и P_2 этот угол превосходит π , либо у обоих он не превосходит π , то четырехугольники соединимы; если же у одного из четырехугольников этот угол превосходит π , а у второго – нет, то они не соединимы. Таким образом, если нам даны два изометричных четырехугольника одного индекса, то в соответствии с одним из перечисленных выше вариантов мы можем утверждать, соединимы ли они сохраняющим индекс изгибанием, или нет.

Список литературы

- [1] И.Х. Сабитов. Чему равна сумма углов многоугольника?// Квант, 2001, № 3, с. 6-12.
- [2] R. Connelly, E. Demaine, and G. Rote. Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles // Discrete and Computational Geometry, (2003), 30(5), p. 205-239.
- [3] W. J. Lenhart and S. Whitesides. Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidian d-space // Discrete and Computational Geometry, (1995), 13, p. 123–140.
- [4] I. Streinu. A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning // In ACM/IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, (2000), p. 443–453.
- [5] Zvonkine D. Configuration spaces of hinge constructions. Russian J. of Math. Phys., (1997), 5, № 20, p. 247–266.

Уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального проективного преобразования, относительно горизонтального лифта аффинной связности

К. М. Зубрилин

(Феодосийский политех. ин-т нац. ун-та кораблестроения им. адм. Макарова, Украина)

E-mail address: zubrilin@rambler.ru

This work is devoted to studying of the flattening properties of the complete lift of the infinitesimal projective transformation. The tangent bundle is considered as the affinely connected space with the connection of the horizontal lift.

Изучение лифтов инфинитезимальных преобразований восходит к работам К. Яно и S. Ishihara ([1]). С. Г. Лейко получено полное описание уплощающих свойств полного лифта инфинитезимального проективного преобразования, относительно связности полного лифта, для касательного расслоения первого и второго порядков ([2]). В работе ([3]) рассматриваются уплощенные инфинитезимальные преобразования касательного расслоения первого порядка (относительно связности полного лифта), порожденные лифтами инфинитезимального конциркулярного преобразования. Случай касательного расслоения второго порядка рассмотрен в работе [4].

Теорема 1. Пусть X – инфинитезимальное проективное преобразование, описываемое уравнением $\mathcal{L}_X \nabla = \beta \otimes \delta + \delta \otimes \beta$. Тогда полный лифт X^C , относительно связности горизонтального лифта ∇^H , обладает следующими уплощающими свойствами

1. X^C является 1-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\beta = 0$, то есть когда X является инфинитезимальным аффинным преобразованием. При этом X^C так же является инфинитезимальным аффинным преобразованием.
2. X^C является 2-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\beta \neq 0$ и $S(\nabla\beta) = 0$.
3. X^C является 3-г.и.п. тогда и только тогда, когда $\beta \neq 0$, $S(\nabla\beta) \neq 0$ и

$$S \left(\begin{pmatrix} 2\beta^H + \gamma(\nabla\beta) & (\nabla\beta)^V & 0 \\ 3(\nabla\beta)^E + \gamma(\nabla^2\beta) & (\nabla^2\beta)^V & (\nabla\beta)^V \\ 4(\nabla^2\beta)^E + \gamma(\nabla^3\beta) & (\nabla^3\beta)^V & 2(\nabla^2\beta)^V \end{pmatrix} \right) = 0.$$

4. В общем случае, X^C является 4-г.и.п.

Список литературы

- [1] К. Яно, S. Ishihara *Tangent and cotangent bundles. Differential geometry*, - New York: Marcel Dekker, (1973), 434p.
- [2] С. Г. Лейко *P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия* // Математика (Известия вузов), - (1992), № 2, С. 62-71.
- [3] С. Г. Лейко *P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия* // Математика (Известия вузов), - (1998), № 6, С. 35-45.
- [4] К. М. Зубрилин *P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях второго порядка, индуцированные конциркулярными преобразованиями базисного многообразия* // Український математичний журнал, - (2009), Т.61, №3, С.346-364.

Канонические уравнения неголономной $(n + 1)$ -ткани

М. И. Кабанова

(МПУ, Москва, Россия)

E-mail address: luinel@list.ru

Рассматривается понятие неголономной $(n + 1)$ -ткани NW , образованной $n + 1$ распределениями коразмерности 1 на гладком многообразии M размерности n , а также понятие λE -структуры и ее взаимосвязь с неголономной тканью NW .

Доказывается

Теорема 1. Структурные уравнения неголономной $(n + 1)$ -ткани могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} d\omega^i &= \omega^i \wedge d\varphi + c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \\ \nabla c_{jk}^i &= \lambda_{jkm}^i \omega^m, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c_{ik}^i = 0$ и выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_{[klm]}^i &= -2c_{j[k}^i c_{lm]}^j \\ \lambda_{ikm}^i &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

При помощи преобразований вида $\tilde{\omega}^i = u\omega^i$ структурные уравнения неголономной ткани NW можно привести к виду

$$\begin{aligned} d\omega^i &= c_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \\ dc_{jk}^i &= \lambda_{jkm}^i \omega^m, \end{aligned} \quad (3)$$

где также выполняются соотношения (2). Эти уравнения мы называем *каноническими структурными уравнениями* неголономной ткани NW .

В случае, когда все $n + 1$ распределений интегрируемы, найденные структурные уравнения ткани NW совпадают со структурными уравнениями $(n + 1)$ -ткани, полученными В. В. Гольдбергом [1].

Список литературы

- [1] Goldberg V.V. *Theory of Multicodimensional $(n+1)$ -Webs.*, - Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1988), 466p.

Эрмитовы аспекты геометрии пространств постоянной кривизны

О. Е. Арсеньева

(МПГУ, Москва, Россия)

В. Ф. Кириченко

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: highgeom@yandex.ru

Определение. Эрмитова структура, заданная на многообразии M^{2n} , называется локально конформно-келеровой (короче, ЛКК-) структурой, если существуют открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия M и система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ гладких функций такие, что $\{J|_{U_\alpha}, \tilde{g}_\alpha = e^{2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ – келерова структура для любого $\alpha \in A$. Гладкое многообразие, на котором фиксирована ЛКК-структура, называется ЛКК-многообразием.

Теорема 1. Конформно-плоское ЛКК-многообразие M является ЛКК-многообразием постоянной кривизны тогда и только тогда, когда

$$\nabla \xi = -\frac{1}{2}\omega \otimes \xi + \frac{1}{4n}\{|\xi|^2 + 2\operatorname{div}(\xi)\}id.$$

т.е. когда вектор Ли ξ является торсообразующим векторным полем с определяющими элементами $a = -\frac{1}{2}\omega$ и $\rho = \frac{1}{4n}\{|\xi|^2 + 2\operatorname{div}(\xi)\}$. При этом кривизна с многообразия M равна

$$c = \frac{1}{2n}((n-1)|\xi|^2 - 2\operatorname{div}(\xi)).$$

Здесь ω – форма Ли, дуальная вектору Ли ξ ;

$$\xi = \frac{1}{n-1}(\delta\Omega \circ J)^\sharp; \quad \omega = \frac{1}{n-1}\delta\Omega \circ J.$$

Теорема 2. Конформно-плоское ЛКК-многообразие размерности свыше четырех является многообразием постоянной кривизны тогда и только тогда, когда оно является многообразием точечно постоянной голоморфной секционной кривизны, тензор римановой кривизны которого инвариантен относительно действия структурного эндоморфизма эрмитовой структуры.

Список литературы

- [1] В. Ф. Кириченко Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия // Матем. заметки, 51:5 (1992), 57–66.

О проективно инвариантных вариационных задачах

Н. Г. Коновенко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: konovenko@ukr.net

Мы рассматриваем вариационные задачи для кривых на проективной плоскости, которые инвариантны относительно группы проективных преобразований.

Примером такой задачи (см. [1],[4]) является нахождение экстремалей функционала Штуди (функционала проективной длины), который в аффинных координатах имеет вид:

$$y(x) \mapsto \int_a^b \frac{\sqrt[3]{9y^{(5)}(y^{(2)})^2 + 40(y^{(3)})^3 - 45y^{(2)}y^{(3)}y^{(4)}}}{y^{(2)}} dx.$$

Мы показываем, что Лагранжианы проективно инвариантных функционалов являются произведениями функционала Штуди и проективных дифференциальных инвариантов.

В свою очередь, проективные дифференциальные инварианты (см. [1],[2],[3]) являются функциями от проективной кривизны Q_7 и ее производных Штуди: $Q_8, Q_9 \dots$

Уравнение Эйлера для экстремалей функционала Штуди является дифференциальным уравнением 10-го порядка, которое в проективных дифференциальных инвариантах имеет следующий вид:

$$Q_{10} - 24Q_7Q_8 = 0.$$

Проективная классификация экстремалей функционала Штуди дается следующей теоремой:

Теорема 1. *Проективные классы экстремалей функционала Штуди определяются двумя параметрами c_1, c_2 и следующим соотношением между проективными кривизнами:*

$$Q_8^2 - 8Q_7^3 - c_1Q_7 + c_2 = 0.$$

Список литературы

- [1] N. G. Konovenko, V. V. Lychagin. On projective classification of algebraic curves // *Matematychnyj Visnyk NTSU*, Vol. 10, (2013).
- [2] N. G. Konovenko, V. V. Lychagin. On projective classification of plane curves // *Global and Stochastic Analysis*, Vol. 1, No. 2, (2011), P. 241–264.
- [3] N. Konovenko. Projective structures and algebras of their differential invariants // *Acta Applicandae Mathematicae*, 109, 1, (2010), P. 87–99.
- [4] E. J. Wilczynski. Interpretation of the symplectic integral invariant of projective geometry // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol. 2, No. 4, (1916), P. 248–252.

Обобщенные римановы метрические структуры

Е. С. Корнев

(КемГУ, Кемерово, Россия)

E-mail address: q148@mail.ru

Пусть M – вещественное многообразие класса C^∞ и E – вещественное векторное расслоение над M . Будем обозначать внутреннее произведение сечения σ векторного расслоения E на линейную p -форму T через $I_\sigma T$. Римановой p -структурой на векторном расслоении E называется симметрическая невырожденная p -форма g на E , обладающая свойством:

$$I_\sigma^p g > 0,$$

Две римановы p -структуры g_1 и g_2 на векторном расслоении E называются эквивалентными, если существует автоморфизм A векторного расслоения $E : g_2 = g_1 \circ A$. Множество всех римановых p -структур на векторном расслоении E является объединением не пересекающихся классов эквивалентности. Группа всех автоморфизмов векторного расслоения E ранга r , сохраняющих фиксированную риманову p -структуру, будем обозначать через $O(g)$. Таким образом, риманова p -структура на векторном расслоении задает $O(g)$ -структуру на этом векторном расслоении.

Теорема 1. Если римановы p -структуры g_1 и g_2 на векторном расслоении E эквивалентны, то группы $O(g_1)$ и $O(g_2)$ изоморфны.

Пример 1. (Евклидова p -структура) Векторное пространство \mathbb{R}^n состоит из упорядоченных наборов вещественных чисел (x_1, \dots, x_n) . Обозначим через h симметрическую $2p$ -форму, значение которой на наборе векторов X_1, \dots, X_{2p} задается как:

$$h(X_1, \dots, X_{2p}) = \sum_{k=1}^n x_k^1 \dots x_k^{2p},$$

где x_k^j обозначает k -тую координату вектора X_j . Линейная форма h является невырожденной и для любого ненулевого вектора X , $I_X^{2p} h > 0$. Таким образом, линейная форма h является римановой $2p$ -структурой на \mathbb{R}^n . Такую структуру назовем евклидовой p -структурой. При $p = 1$ получаем классическую евклидову метрику в \mathbb{R}^n .

Пример 2. (Риманова 4-структура) Пусть M – риманово многообразие размерности n и E – расслоение симметрических эндоморфизмов касательных пространств на M . Зададим на каждом слое E_x симметрическую 2-форму s со значениями в E_x , следующим образом: если $A, B \in E_x$, то $s(A, B) = AB + BA$. Эта форма невырождена в каждой точке из M , поскольку условие $s(A, B) = 0$ для любого B влечет, что при $B = \text{id}$, $A = -A = 0$.

На расслоении симметрических эндоморфизмов E определена симметрическая невырожденная 2-форма $h : h(A, B) = \text{tr}(Ab)$. Зададим линейную 4-форму g на E следующим образом:

$$g(A, B, C, D) = \frac{1}{8} (h(s(A, B), s(C, D)) + h(s(A, C), s(B, D)))$$

для любых сечений A, B, C, D . g является симметрической невырожденной 4-формой на E , и для любого сечения $A \neq 0$,

$$g(A, A, A, A) = \text{tr} A^4 > 0,$$

То есть, g является римановой 4-структурой на расслоении симметрических эндоморфизмов.

Множество $K(s) = \{A \in E : s \circ A = A \circ s\}$ образует группу симметрий формы s . Тогда:

$$O(g) = O\left(\frac{n^2 + n}{2}\right) \cap K(s).$$

Обобщенные структуры

В. М. Кузаконь

(Одесская национальная академия пищевых технологий, Одесса, Украина)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

В [1] было введено понятие обобщенного расслоенного пространства. Этим термином обозначалась структура, аналогичная главному расслоению, в которой группа, действующая в слое, зависела от слоя. Напомним [2], что главное расслоенное пространство (главное расслоение) есть четверка (P, M, π, G) , где P и M — гладкие многообразия, $\dim P = n + r$, $\dim M = n$, $\pi : P \rightarrow M$ — проекция, G — группа Ли, действующая справа на P , $\dim G = r$, причем 1) G действует на P свободно; 2) $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ тогда и только тогда, когда существует элемент g в G такой, что $g(p_1) = p_2$ ($p_1, p_2 \in P$); 3) P локально тривиально.

Обобщение этой конструкции получается следующим образом. Пусть G — группа Ли размерности r , допускающая гладкую n -параметрическую деформацию $G(x)$, где $x = (x^i)$ — параметры деформации. Будем далее предполагать, что пространство параметров деформации является гладким многообразием, обозначим его M , $\dim M = n$. Пусть $\pi : P \rightarrow M$ — субмерсия, и в слое $\pi^{-1}(x)$, $x \in M$, свободно и транзитивно действует группа $G(x)$. Многообразие M с такой структурой будем называть обобщенным главным расслоенным пространством.

Мы развиваем эту идею и применительно к G -структурам. Пусть $G(x)$ — гладкая деформация в $GL(n)$, то есть n -параметрическое семейство подгрупп группы $GL(n)$, гладко зависящее от параметров $x = (x^i)$, $i = 1, \dots, n$. Обозначим пространство параметров деформации через M , $\dim M = n$, и будем считать, что M — гладкое многообразие. K -обобщенной G -структурой $B_G(x)$ на многообразии M назовем подмногообразие в расслоении $\mathcal{F}(M)$ реперов многообразия M такое, что для любой точки p из $B_G(x)$ и для любого g из $GL(n)$ точка $p \cdot g$ принадлежит $B_G(x)$ тогда и только тогда, когда $g \in G(x)$, где $x = \pi(p)$. При этом, как и выше, $p \cdot g(v) = p(gv)$, $v \in V$, и считается, что все $G(x)$ действуют в некотором фиксированном n -мерном векторном пространстве V со стандартным базисом.

Мы находим структурные уравнения обобщенного главного расслоения и K -обобщенной G -структуры, используя идеи Г.Ф. Лаптева.

Список литературы

- [1] Кузаконь В.М. *Generalized fiber bundles with connections*// Ukr. J. Phys. 1998, v. **43**, n. 7, pp. 14-16.
- [2] Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. Мир., Москва 1970.

ОБ ОДНОМ ПРОЕКТИВНОМ ИНВАРИАНТЕ СЕМЕЙСТВА ГИПЕРПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ С ОГИБАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ЦЕНТРОВ

А. В. Кулешов

(БФУ им. И.Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: arturkuleshov@yandex.ru

Пусть P_n — N -мерное проективное пространство ($N \geq 4$). Гиперплоским элементом пространства P_n будем называть пару $L_{N-1}^* = (L_{N-1}, C)$, где L_{N-1} — гиперплоскость, — точка, лежащая в L_{N-1} (она называется центром элемента L_{N-1}^*).

Семейством B_{p+q} гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров будем называть гладкое семейство гиперплоских элементов, удовлетворяющие следующим двум условиям: 1) центр элемента L_{N-1}^* описывает p -мерную поверхность S_p ($p < N - 2$), и касательная плоскость $T_p(C)$ к поверхности в точке лежит в плоскости L_{N-1} каждого элемента L_{N-1}^* , имеющего точку своим центром; 2) каждая точка поверхности S_p является центром гладкой q -параметрической связки $B_q(C)$ элементов семейства, где $1 \leq q < N - p - 1$.

С каждым элементом $L_{N-1}^* \in B_{p+q}$ инвариантно связана его характеристическая r -плоскость F_r ($r = N - p - q - 2$), лежащая в нем вместе со своей первой дифференциальной окрестностью. При этом F_r пересекается с касательной плоскостью $T_p(C)$ по центру этого элемента.

Над семейством B_{p+q} как над базой возникает расслоение проективных реперов, адаптированных семейству таким образом, что каждый репер $\{A, A_i, A_u, A_y, A_N\}$, принадлежащий слою над элементом $L_{N-1}^* = (L_{N-1}, C)$, удовлетворяет условиям $A = C$, $A_i \in T_p(C)$, $A_u \in L_{N-1}$, $A_y \in F_r(L_{N-1}^*)$, где $i, j, \dots = \overline{1, p}$; $u, v, \dots = \overline{p+1, p+q}$; $y, z, \dots = \overline{p+q+1, N-1}$. Уравнения семейства B_{p+q} в адаптированном репере имеют вид

$$\begin{aligned} \omega^u &= 0, \quad \omega^y = 0, \quad \omega^N = 0, \quad \omega_y^N = 0, \\ \omega_i^u &= \Lambda_{ij}^u \theta^j, \quad \omega_i^y = \Lambda_{ij}^y \theta^j, \quad \omega_i^N = \Lambda_{ij}^N \theta^j, \\ \omega_y^u &= \Lambda_{yi}^u \theta^i + \Lambda_{yN}^{uv} \theta_v^N, \quad \omega_y^i = \Lambda_{yj}^i \theta^j + \Lambda_{yN}^{iu} \theta_u^N, \end{aligned}$$

где θ^i, θ_u^N — базисные формы семейства, определяющие смещение текущего элемента $L_{N-1}^* \in B_{p+q}$, а совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_{ij}^u, \Lambda_{ij}^y, \Lambda_{ij}^N, \Lambda_{yi}^u, \Lambda_{yN}^{uv}, \Lambda_{yj}^i, \Lambda_{yN}^{iu}\}$ образует фундаментальный объект 1-го порядка многообразия B_{p+q} , содержащий тензор Λ_{ij}^N , уравнения которого имеют вид

$$\Delta \Lambda_{ij}^N = \Lambda_{ijk}^N \theta^k - \Lambda_{ij}^u \theta_u^N.$$

В общем случае, когда $\Lambda = \det \|\Lambda_{ij}^N\| \neq 0$, можно ввести в рассмотрение обращенный тензор V_N^{ij} , а также объекты

$$\Lambda_N^u = \frac{1}{p} \Lambda_{jk}^u V_N^{jk}, \quad \Lambda_N^y = \frac{1}{p} \Lambda_{jk}^y V_N^{jk}, \quad \Lambda_k = \frac{1}{p+2} \Lambda_{ijk}^N V_N^{ij},$$

$$D_{ijk}^N = \Lambda_{ijk}^N - 3\Lambda_{(ij}^N \Lambda_{k)}, \quad D_k = D_{ijk}^N V_N^{ij}, \quad D_N = V_N^{ij} D_i D_j.$$

Из сравнений на них по модулю базисных форм вытекает, что объект D_N является относительным инвариантом, присоединенным к дифференциальной окрестности второго порядка семейства B_{p+q} , отнесенного к адаптированному реперу.

Данный инвариант используется при построении внутренних оснащений семейства B_{p+q} .

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. Н. Курбатова

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: k_ irina@te.net.ua

В теории моделирования физических полей решается задача о возможности моделирования движения пробной частицы в одном поле ее движением в другом поле, причем траектории частицы в различных полях определяются их энергетическими режимами. Поэтому изучение диффеоморфизмов многообразий, при которых заданные кривые переходят в кривые того или иного типа, представляет интерес не только для геометрии многообразий, но и с прикладной точки зрения.

Пусть (V_n, g) - n -мерное риманово пространство, отнесенное к системе координат x^1, x^2, \dots, x^n ; $P = (x_1^1, \dots, x_1^n)$, $Q = (x_2^1, \dots, x_2^n)$ - фиксированная пара точек; $\gamma : x^h = x^h(1), a \leq t \leq b$ (с фиксированными a, b) - множество кривых, содержащих эти точки: $P = (x^i(a)) = (x_1^i)$, $Q = (x^i(b)) = (x_2^i)$.

Рассмотрим функционал вида

$$S[\gamma] = \int_P^Q \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \rho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha \right) dt, \quad (1)$$

где лагранжиан $L = \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta + \rho(t) A_\alpha \dot{x}^\alpha$ мы выбрали по аналогии с известным в электродинамике классическим действием для зарядов, движущихся в электромагнитном поле (в этом случае A_α -вектор-потенциал электромагнитного поля, а фигурирующий далее в уравнениях Эйлера-Лагранжа объект $\frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i} = F_{ij}$ -тензор электромагнитного поля; функция $\rho(t)$ выражает плотность распределения заряда в пространстве; второе слагаемое под интегралом характеризует взаимодействие между частицами и полем). Справедлива следующая

Теорема 1. Уравнения Эйлера-Лагранжа для экстремалей функционала (1) имеют вид:

$$\ddot{x}^j + \Gamma_{\alpha\beta}^j \dot{x}^\alpha \dot{x}^\beta = -\rho(t) F_\alpha^j \dot{x}^\alpha - \dot{\rho}(t) A^j, \quad (2)$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^j$ -симметрическая связность, согласованная с метрикой g_{ij} ,

$$A^j = A_\alpha g^{\alpha j}, \quad F_i^j = g^{j\alpha} F_{\alpha i}, \quad F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^i}. \quad (3)$$

Итак, наше V_n наделено аффинорной структурой F_i^j , порожденной ковекторным полем A_i (вектором-потенциалом), причем соответствующая 2-форма F_{ij} замкнута в силу (3).

Уравнения (2) определяют при $\rho(t) \equiv 0$ (взаимодействия нет, т.е. частица не заряжена)-геодезические линии, при $\rho(t) \equiv const$ (плотность распределения заряда в пространстве постоянна)-особый класс F -планарных кривых, в частности, в случае, когда F_i^j -почти комплексная структура,-аналитически-планарные кривые.

Мы вводим отображение римановых пространств, при котором каждая геодезическая линия одного пространства переходит в кривую вида (2) другого. Обнаружены некоторые закономерности и особенности рассматриваемого отображения.

Поисковые геометрические задачи в развитии самостоятельного аналитического и творческого мышления студентов

Маматов М.Ш., Махмудова Д.М., Темуров С.Ю.

(Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан)

В настоящее время формирование исследовательских умений студентов является обязательным составным элементом профессиональной подготовки будущих специалистов, так как основная задача высшей школы состоит в подготовке специалистов, способных самостоятельно ориентироваться в потоке меняющейся информации, способных сравнивать, анализировать, находить лучшие варианты решений [1].

Хорошо известно, что как одно из эффективных средств воспитания, выявления и оценки этих качеств, это решение задач при обучении молодежи. Психологи под термином «задача» подразумевают ситуацию, требующую от человека некоторого действия, направленного на нахождение неизвестного на основе использования его связей с известным, и показывают, что в зависимости от условий, в которых находится субъект, возможны следующие случаи. Субъект обладает способом этого действия, т. е. способ решения задачи известен решающему. Такие задачи получили название стандартных. Есть такие задачи, для которых алгоритм этого действия в принципе существует, но субъект ими не обладает. Другими словами, способ решения, вообще говоря, имеется, но он неизвестен решающему. Решающий должен найти этот способ сам. Такого рода задачи обычно называют нестандартными, поисковыми, творческими, проблемными. Алгоритм этого действия неизвестен не только субъекту, но и науке. Это так называемые оригинальные творческие задачи.

Таковыми качествами, которые мы упомянули, обладают поисковые геометрические задачи. Например: в работе [2] рассматривалась задача уклонения управляемой точки E , скорость которой ограничена по величине $k > 1$, от встречи с P_1, P_2, \dots, P_m преследующих точек, скорости которых ограничены по величине 1. Был построен способ управления, который обеспечивает уклонение от преследователей, причем движение уклоняющейся точки остается в фиксированной окрестности заданного движения. Построит стратегии убегающего игрока в виде ломаной $E_0E_1E_2 \dots$ для решения выше поставленной задачи [2]. Нами изучены выявления творческих мышлений студентов при помощи решения поисковых геометрических задач с применением информационно - коммуникационных технологий.

Список литературы

- [1] Брушлинский А.В. Избранные психологические труды. – М.: Издательство «Институт психологии РАН», 2006. – 623 с.
- [2] Черноусько Ф.Л. Одна задача уклонения от многих преследователей // Прикладная математика и механика. Т.40, Вып.1, 1976. С14-24.

Дифференциальные игры преследования многих лиц с распределенными параметрами и геометрическими ограничениями

Маматов М.Ш., Ташманов Е.Б., Алимов Х.К.

(Национальный университет Узбекистана имени М.Улугбека, Ташкент, Узбекистан)

В данной заметке рассматривается управляемая распределенная система, описываемая уравнениями [1],

$$\frac{\partial z_i}{\partial t} - A_i z_i = -u_i + v, i = 1, 2, \dots, m, , z_i|_{t=0} = f_i(x), z_i|_{S_T} = 0, \quad (1)$$

где $z_i = z_i(x, t) = (z_i^{(1)}(x, t), z_i^{(2)}(x, t), \dots, z_i^{(s)}(x, t))$ – неизвестная вектор-функция; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subset R^n, n \geq 1, \Omega = \{x \in R^n : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1\}, t \in [0, T], T$ – произвольная положительная константа;

$$A_i z_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(A_i^{(\alpha)}(x, t) \frac{\partial z_i}{\partial x_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^s B_i^{(\alpha)}(x, t) \frac{\partial z_i}{\partial x_\alpha} - C_i(x, t) z_i,$$

$$A_i^{(\alpha)}(x, t) = \begin{pmatrix} a_{i\alpha}^{(1)}(x, t) & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & a_{i\alpha}^{(s)}(x, t) \end{pmatrix}, B_i^{(\alpha)}(x, t) = \begin{pmatrix} b_{i\alpha}^{(1)}(x, t) & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & b_{i\alpha}^{(s)}(x, t) \end{pmatrix},$$

$$C_i(x, t) = \begin{pmatrix} c_i^{(11)}(x, t) & \dots & c_i^{(1s)}(x, t) \\ \dots & \dots & \dots \\ c_i^{(s1)}(x, t) & \dots & c_i^{(ss)}(x, t) \end{pmatrix}.$$

Элементы матриц $A_i^{(\alpha)}(x, t), B_i^{(\alpha)}(x, t)$ и $C_i(x, t)$ – непрерывные функции в Q_T , где $Q_T = \{(x, t) | x \in \Omega, t \in (0, T)\}$ – открытый цилиндр в R^{n+1} . Предполагается, что существует положительная константа ν , такая, что для произвольных $(x, t) \in Q_T$ выполнено неравенство $a_\alpha^{(p)}(x, t) \geq \nu, p = 1, 2, \dots, n, \alpha = 1, 2, \dots, s, u_i = u_i(x, t) = (u_i^{(1)}(x, t), u_i^{(2)}(x, t), \dots, u_i^{(s)}(x, t)), v = v(x, t) = (v^{(1)}(x, t), v^{(2)}(x, t), \dots, v^{(s)}(x, t))$ – управляющие вектора - функции из класса $L_2(Q_T), f_i(x) = (f_i^{(1)}(x), f_i^{(2)}(x), \dots, f_i^{(s)}(x)), f_i^{(p)}(x) \in L_2(\Omega), S_T = \{(x, t) | x \in \partial\Omega, t \in (0, T)\}$ – боковая поверхность цилиндра $Q_T, \partial\Omega$ – граница области $\Omega. u_i^s \in P_i, v^s \in Q, P_i$ и Q компакты из R . Пусть, далее, в R заданы терминальные множества $M_1^1, M_2^1, \dots, M_m^1$.

В задаче 1 возможно ε – завершение ($\varepsilon > 0$) преследования из начального положения $f_i(\cdot)$, если существуют число $T = T(f(\cdot))$ и функция $u_i(v, x, t) \in \bar{P}, v \in \bar{Q}, x \in \Omega, t \in [0, T]$, такие, что для произвольной функции $v_0(x, t) \in \bar{Q}, x \in \Omega, t \in [0, T]$ решение $z_i(x, t)$ для некоторого $i, 1 \leq i \leq m$ задачи 1, где $u_i = u_i(v_0(x, t), x, t), v = v_0(x, t)$, попадает на множество $\varepsilon I + M_i^1$, при некотором $(\tilde{x}, \tilde{t}), \tilde{x} \in \Omega, \tilde{t} \in [0, T]: z_0^i(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \varepsilon I + M_i^1$, где $I = (-1, 1)$.

Получены с помощью метода конечных разностей достаточные условия для возможности ε – завершения преследования из заданного начального положения в игре 1.

Список литературы

- [1] Маматов М.Ш. О применении метода конечных разностей к решению задачи преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. – Москва. 2009. – № 8. – С. 123-132.

Проблемы жесткости выпуклых полиэдров

А. Д. Милка

(GST Joint Stock Company, ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАНУ, Харьков, Украина)

E-mail address: milka@ilt.kharkov.ua

Предельно общим результатом о жесткости замкнутых выпуклых полиэдров, включающим также фундаментальный результат Лежандра и Коши, является

Теорема. *Комбинаторно эквивалентные евклидовы, сферические, гиперболические, пространственноподобные деситтеровы замкнутые выпуклые полиэдры конгруэнтны, если у их соответствующих граней соответствующие углы равны u , в евклидовом случае, соответствующие грани имеют равные площади.*

Исходный евклидов вариант Теоремы был открыт профессиональными математиками задолго до времени Александрии и Афин [1]. Этот вариант содержится в Определении 10 в кн. XI "Начал" (в издании Гейберга); Лежандр и Коши пользовались изданием "исправленных" "Начал". Представляем актуальную проблематику, связанную с Теоремой.

Жесткость полиэдров при минимальных данных.

Проблема 1. *Доказать, что комбинаторно эквивалентные замкнутые выпуклые полиэдры в \mathbb{R}^n конгруэнтны, если (a) площади сферических изображений их соответствующих вершин равны, (b) средние кривизны их соответствующих ребер всех размерностей равны, (c) площади их соответствующих гиперграней равны.*

Эта проблема формулировалась автором в the workshop "Rigidity and Flexibility" in Vienna, Austria, in 2006 [2, Problem section].

Аналог проблемы Стокера (J.J. Stoker, 1968).

Проблема 2. *Доказать, что комбинаторно эквивалентные неевклидовы замкнутые выпуклые полиэдры конгруэнтны, если их соответствующие ребра или их соответствующие двугранные углы равны.*

В.А. Александровым доказано, что существуют сферические и гиперболические замкнутые невыпуклые полиэдры без самопересечений, допускающие нетривиальные непрерывные деформации с сохранением двугранных углов.

Аналог проблемы Брикара (R. Bricard, 1897).

Проблема 3. *Доказать, что существуют евклидовы, сферические, гиперболические, пространственноподобные деситтеровы замкнутые невыпуклые полиэдры без самопересечений, которые допускают нетривиальные непрерывные деформации с сохранением углов граней u , в евклидовом случае, с сохранением площадей граней.*

Непрерывно изгибаемые по Коши замкнутые невыпуклые полиэдры-флексоры без самопересечений в \mathbb{R}^3 открыты Р. Коннели; инвариантность объемов полиэдров при изгибаниях доказана И.Х. Сабитовым. Решение этой проблемы важно для теории оболочек. Как подчеркивает И.И. Ворович в Послесловии к известной монографии А.В. Погорелова, необходимо исследовать устойчивость оболочек, "имеющих нулевую жесткость на изгиб и конечную жесткость на растяжение", у которых "энергия, накопленная при растяжении, пропорциональна изменению площади". Такое исследование может расширить класс модельных флексоров, открытых автором.

Список литературы

- [1] А. Д. Милка *Жесткость замкнутых выпуклых полиэдров* ., - Proc. Int. Geom. Center (в печати)
- [2] *Special issue on Rigidity and Related Topics in Geometry* ., - Eur. Journ. Combinatorics, 31, (2010)

О сердцевине шестимерной эластичной три-ткани E_2

А. А. Михеева

(Тверской госуниверситет, Тверь, Россия)

E-mail address: heathjensen@yandex.ru

Пусть \mathcal{M} – дифференцируемое многообразие размерности $2r$, на котором задана три-ткань $W(r, r, r)$. Ее уравнение $z = f(x, y)$ связывает параметры слоев ткани, проходящих через одну точку многообразия \mathcal{M} . С другой стороны, это уравнение определяет локальную координатную квазигруппу три-ткани. Напомним [1], что с каждой точкой многообразия \mathcal{M} три-ткани связана координатная луна (квазигруппа с единицей), изотопная координатной квазигруппе. Три-ткань называется эластичной (тканью E), если в ее координатных лунах выполняется тождество эластичности $(x \circ y) \circ x = x \circ (y \circ x)$. Известно [1], что всякая ткань E является средней тканью Бола (тканью B_m) специального вида, то есть ткани E образуют собственный подкласс тканей B_m . Последние характеризуются замыканием соответствующих достаточно малых средних конфигураций Бола (B_m).

Известно [1] (см. также [2]), что ткань B_m (и только такая ткань) определяет на базе третьего слоения X_3 локальную гладкую квазигруппу, называемую сердцевинной тканью Бола. Она задается на X_3 уравнением:

$$z_{22} = C(z_{11}, z_{12}), \quad (1)$$

где C – функция, которая связывает параметры наклонных слоев z_{11} , z_{12} , z_{22} , входящих в произвольную конфигурацию (B_m). Уравнение (1) получается путем исключения переменных x_1 , x_2 , y_1 , y_2 из системы

$$z_{11} = f(x_1, y_1), \quad z_{12} = f(x_1, y_2) = f(x_2, y_1), \quad z_{22} = f(x_2, y_2),$$

соответствующей замыканию на ткани конфигураций B_m . Известно [1], что четырехмерных тканей E , отличных от групповых тканей, не существует. Но шестимерные нетривиальные эластичные три-ткани существуют. Таких тканей всего две, они обозначены E_1 и E_2 . Уравнения этих тканей найдены А.М. Шелеховым, (см. [1]), три-ткань E_2 определяется уравнениями:

$$z^1 = x^1 + y^1, \quad z^2 = x^2 + y^2 e^{-2x^1} + (y^1 x^3 - x^1 y^3) e^{-2x^1}, \quad z^3 = x^3 + y^3.$$

Доказано

Предложение. *Сердцевина шестимерной эластичной три-ткани E_2 задается уравнениями*

$$z_{22}^1 = 2z_{12}^1 - z_{11}^1, \quad z_{22}^2 = z_{12}^2 + z_{12}^2 e^{-2(z_{12}^1 - z_{11}^1)} - z_{11}^2 e^{-2(z_{12}^1 - z_{11}^1)}, \quad z_{22}^3 = 2z_{12}^3 - z_{11}^3. \quad (2)$$

Показано, что левая обратная квазигруппа квазигруппы (2) определяет среднюю ткань Бола (ткань B_m), которая представляет собой прямое произведение двух три-тканей: двумерной параллелизуемой и четырехмерной ткани B_m . Причем последняя является тканью параболического типа класса Π_4 по классификации А.Д. Иванова [2].

Список литературы

- [1] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*// монография/ Тверь, ТвГУ. 2010. 308 с.
- [2] Иванов А. Д. *Об интерпретации четырехмерных тканей Бола в трехмерном проективном пространстве*// Геометрия однородных пространств, М.: Моск. гос. пед. ин-т. 1973. С. 42–57.

Теорема об ареальной бесконечно малой деформации скольжения

Л. Л. Безкоровайная

В. А. Москалик

(Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: moskalik_valentina@mail.ru

Объектом исследования являются ареальные бесконечно малые деформации. Вектор $\bar{u}(x^1, x^2)$ будет вектором смещения для ареальной бесконечно малой деформации тогда и только тогда, когда выполняются условия [1]

$$d\bar{r}d\bar{u} = \varepsilon_{ij}dx^i dx^j,$$

$$\varepsilon_{ij}g^{ij} = 0,$$

где $\bar{r}(x^1, x^2)$ - радиус-вектор точки поверхности, а ε_{ij} - первый тензор деформации, g^{ij} - тензор, обратный к метрическому тензору. В работе доказана

Теорема 1. Пусть $S \subset E^3$ - односвязная поверхность класса $C^{3,\alpha}(\bar{G})$, $0 < \alpha < 1$, положительной гауссовой кривизны, однозначно проектирующаяся на некоторую плоскость E . Поверхность S допускает нетривиальные ареальные бесконечно малые деформации скольжения относительно плоскости E с вектором смещения $\bar{u}(x^1, x^2)$ класса $C^{2,\alpha}(\bar{G})$, который зависит от двух произвольных функций ε_{11} и $\varepsilon_{12} \in C^{2,\alpha}(\bar{G})$; $\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 \neq 0$.

Рассматриваемая задача сводится к решению задачи Дирихле вида:

$$z_{yy}\zeta_{xx} - 2z_{xy}\zeta_{xy} + z_{xx}\zeta_{yy} = f \quad (G) \quad (1)$$

$$\zeta = 0 \quad (\partial G)$$

относительно функции $\zeta = \bar{u}\bar{k}$, $u = \xi\bar{i} + \eta\bar{j} + \zeta\bar{k}$. В (1) $z = z(x, y)$ - уравнение поверхности S в прямоугольных декартовых координатах, а свободный член $f = f(x, y, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) \in C^{0,\alpha}(\bar{G})$. На основании [2] установлено, что для каждой пары наперед заданных функций $\varepsilon_{11}(x, y)$, $\varepsilon_{12}(x, y)$ задача Дирихле имеет единственное решение.

Отметим, что поверхность S при заданных условиях регулярности не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибов скольжения [3].

Список литературы

- [1] Л. Л. Безкоровайная *Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки.* – Одесса: Астропринт, 1999, - 168с.
- [2] И. А. Шишмарев *Введение в теорию эллиптических уравнений.* – М.: Изд-во Моск.ун-та, 1979. - 184с.
- [3] И. Н. Векуа *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Наука, 1988 - 512с.

О поверхностях F^2 из E^n их индикатрисе и принадлежности пространству E^4

Ю. А. Аминов, Я. С. Наседкина

(ФТИНТ НАНУ Харьков)

E-mail address: nasiedkina@ilt.kharkov.ua

В данной работе мы рассматриваем поверхности F^2 в E^n , у которых эллипс нормальной кривизны не вырожден и плоскость этого эллипса для каждой точки x поверхности проходит через эту точку x . Будем говорить, что точка $x \in F^2$ принадлежит к:

1) эллиптическому типу, если точка x лежит внутри эллипса нормальной кривизны, 2) параболическому типу, если x лежит на эллипсе, 3) гиперболическому типу, если x лежит вне эллипса.

1. О поверхностях гиперболического типа в E^n .

Мы строим на поверхности F^2 инвариантно-геометрическим образом некоторую сеть кривых – характеристик, которую назовем *специально гиперболической* [2].

Теорема 1. Пусть поверхность $F^2 \subset E^n$ класса C^4 с невырожденным эллипсом нормальной кривизны принадлежит гиперболическому типу. Пусть D треугольная область на F^2 ограниченная двумя характеристиками – кривыми η_1 и η_2 из разных семейств специально гиперболической сети, выходящих из одной точки, и некоторой кривой γ класса C^2 , пересекающей η_1 и η_2 и не касающейся характеристик. Пусть выполняются краевые условия на γ : существует гиперплоскость E^4 такая, что кривая γ и касательная полоса поверхности вдоль γ лежат в E^4 . Тогда вся область D лежит в E^4 .

2. О поверхностях параболического типа в E^n .

Для поверхностей параболического типа мы доказываем несколько теорем с различными краевыми условиями. Приведем только одну из них

Теорема 2. Пусть поверхность $F^2 \subset E^n$ класса C^5 с невырожденным эллипсом нормальной кривизны, принадлежит к параболическому типу, и пусть некоторая кривая γ , пересекающая трансверсально асимптотические, лежит в некотором пространстве E^4 вместе с касательной полосой поверхности. Пусть геодезическая кривизна асимптотических линий неотрицательна. Пусть область D поверхности F^2 ограничена кривой γ , двумя асимптотическими, проходящими через концы кривой γ , и кривой γ_1 , трансверсально пересекающей асимптотические линии и не имеющей общих точек с γ . Тогда D принадлежит E^4 .

Для доказательства этой теоремы, воспользуемся теоремой Е.М.Ландиса о единственности для дифференциальных уравнений параболического типа из [1].

3. О поверхностях эллиптического типа в E^n .

Теорема 3. Пусть все точки односвязной области D эллиптические и принадлежат классу регулярности $C^{4,\alpha}$. Пусть замкнутая кривая γ класса C^1 , являющаяся границей области $D \subset F^2$, лежит в E^4 . Тогда и вся область D лежит в E^4 .

Заметим, что в отличие от предыдущих теорем здесь мы не требуем, чтобы касательная полоса вдоль γ лежала в E^4 .

Список литературы

- [1] Е. М. Ландис, *Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений*. УМН, т. 14:1 (1959), с.21-85
- [2] Ya. Aminov and Ia. Nasiedkina *Conditions on a Surface $F^2 \in E^n$ to lie in E^4* Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry 2013, vol. 9, No 2, pp 127-149.

О ПУЧКАХ СВЯЗНОСТИ 1-ГО И 2-ГО ТИПА НА СЕМЕЙСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПОВЕРХНОСТЬ

О. М. Омелян

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
Калининград, Россия)

E-mail address: olga_omelyan2002@mail.ru

Продолжим рассмотрение m -мерного семейства B_m^p центрированных m -плоскостей $L_m(L_m \cap T_m = L_p, 0 < p < m)$. Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, \dots = \overline{1, n}; i, \dots = \overline{1, p}; \alpha, \dots = \overline{p+1, m}; a, \dots = \overline{m+1, 2m-p}; u, \dots = \overline{2m-p+1, n}.$$

Уравнения семейства B_m^p имеют вид [1]. С этим семейством ассоциировано главное расслоение $G(B_m^p)$, в котором задана групповая связность с объектом Γ , причем дифференциальные уравнения на компоненты этого объекта найдены в [1].

Произведено композиционное оснащение семейства B_m^p [1], состоящее в присоединении к каждой плоскости L_m семейства четырех проективно-дополнительных плоскостей, определяемых следующими совокупностями точек:

$$B_i = A_i + \lambda_i A, \quad B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A, \quad B_\alpha = A_\alpha + \lambda_\alpha^i A_i + \lambda_\alpha A, \\ B_u = A_u + \lambda_u^i A_i + \lambda_u^a A_a + \lambda_u^\alpha A_\alpha + \lambda_u A.$$

Покажем, что композиционное оснащение индуцирует в расслоении $G(B_m^p)$ пучки связностей 1-го и 2-го типов.

Внесем в выражения для дифференциалов точек B_i, B_a, B_α, B_u ковариантные дифференциалы $\nabla \lambda$ оснащающего квазитензора λ , в частности:

$$dB_i = (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (\dots)_i^\alpha B_\alpha + (\dots)_i^u B_u + (\nabla \lambda_i + M_{ij} \omega^j + M_{i\alpha} \omega^\alpha) A, \dots$$

Полагая полагая компоненты объекта M равными нулю, в результате получим пучок связности 1-го типа

$$\Gamma_{i\alpha}^1 = \lambda_j \Gamma_{i\alpha}^{1j} - (\lambda_a^j \lambda_j - \lambda_a) \Lambda_{i\alpha}^a - (\lambda_\beta^j \lambda_j - \lambda_\beta) \Lambda_{i\alpha}^\beta + \lambda_i \lambda_\alpha - (\lambda_u^j \lambda_j + \lambda_u^a \lambda_a - \lambda_u - \lambda_u^a \lambda_a^j \lambda_j - \lambda_u^\beta \lambda_\beta^j \lambda_j) \Lambda_{i\alpha}^u, \dots \quad (1)$$

Обращая ковариантные производные $\nabla_\xi \lambda$ оснащающего квазитензора λ в нуль, мы получаем выражения охватов для компонент пучка связности 2-го типа, в частности:

$$\Gamma_{i\xi}^2 = \lambda_k \Gamma_{i\xi}^k + \lambda_{i\xi}, \quad \Gamma_{a\xi}^2 = \lambda_b^i \Gamma_{a\xi}^b - \lambda_a^k \Gamma_{k\xi}^i + \lambda_{a\xi}^i, \\ \Gamma_{\alpha\xi}^2 = \lambda_b \Gamma_{\alpha\xi}^b - \lambda_a^j \Gamma_{j\xi}^a + \lambda_{\alpha\xi}, \quad \Gamma_{\alpha\xi}^2 = \lambda_{\beta\alpha\xi}^{\Gamma\beta} - \lambda_{\alpha k\xi}^{\Gamma i} + \lambda_{\alpha\xi}^i, \dots \quad (2)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Семейство B_m^p и его композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G(B_m^p)$ пучки связностей 1-го и 2-го типа с объектами Γ^1, Γ^2 , компоненты которых охвачены по формулам (1,2) и им аналогичным.

Список литературы

[1] Омелян О.М. О связности 1-го типа, индуцированной на семействе центрированных плоскостей, обобщающем поверхность, Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, №40. С. 94 – 103 (2009)

О спектре оператора кривизны конформно (полу)плоских левоинвариантных римановых метрик групп Ли малых размерностей

Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов, В. В. Славский В.В., О. П. Хромова

(АлтГУ, Барнаул, Россия)

(ЮГУ, Ханты-Мансийск, Россия)

E-mail address: oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru, slavsky2004@mail.ru,
khromova.olesya@gmail.com

Исследование римановых многообразий с конформно (полу)плоской римановой метрикой, т.е. таких римановых многообразий, у которых тривиален тензор Вейля или часть его компонент, является актуальной задачей римановой геометрии в целом. Это обусловлено недавними результатами по конформно полуплоским римановым многообразиям с метрикой Эйнштейна [1]. Спектры дифференциальных операторов на римановых многообразиях также интенсивно изучаются в последнее время [2].

В работе исследован спектр оператора секционной кривизны 3 и 4 – мерных групп Ли с левоинвариантной конформно (полу)плоской римановой метрикой. В трехмерном случае получены формулы для нахождения структурных констант метрических алгебр Ли через спектр оператора кривизны. В размерности 4 построены новые нетривиальные примеры конформно (полу)плоских, но не конформно плоских римановых многообразий. Полученные результаты распространяются на случай трехмерных локально однородных римановых многообразий.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–921.2012.1), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт №02.740.11.0457), гранта ФЦПК (соглашение №8206, заявка №2012-1.1-12-000-1003-014), а также программы стратегического развития ФГБОУ ВПО АлтГУ на 2012-2016 годы (мероприятие «Конкурс грантов» №2012.312.2.3).

Список литературы

- [1] А. Бессе *Многообразия Эйнштейна*, - М., Мир, (1990), 704с.
- [2] C. S. Gordon *Survey of isospectral manifolds. Handbook of Diff. Geom.*, - Amsterdam: N.-Holland (2000), Vol. 1, P.747-778.

Финслеровы деформации римановых метрик

В. И. Паньженский, О. П. Сурина

(Пензенский государственный университет, Пенза, Россия)

E-mail address: kaf_geom@mail.ru.

Обсуждая проблемы построения теории поля на основе финслеровой геометрии, Ikeda S. в работе [1] предложил в качестве модельных рассматривать пространства F_n , либо с метрикой

$$g_{ij}(x, y) = e^{2\sigma(x, y)} \gamma_{ij}(x), \quad (1)$$

где $\gamma_{ij}(x)$ - метрический тензор (псевдо)риманова многообразия, а $\sigma(x, y)$ - некоторая функция на его касательном расслоении, либо с метрикой

$$g_{ij}(x, y) = \gamma_{ij}(x) + h_{ij}(x, y), \quad (2)$$

где к риманову метрическому тензору прибавляется некоторый тензор деформации финслерова типа.

Изучаются пространства F_n метрический тензор которых имеет вид

$$g_{ij}(x, y) = \alpha \cdot e^{2\sigma} \gamma_{ij} + \beta \cdot y_i y_j, \quad (3)$$

где α и β - функции точки x базисного многообразия, σ - функция аргумента $z = \frac{1}{2} \gamma_{ps} y^p y^s$ а $y_i = \gamma_{ip} y^p$. Для метрики (3) найдены коэффициенты усеченной связности картановского типа, вычислены компоненты тензора кривизны и доказано, что если базисное (псевдо)риманово многообразие имеет постоянную секционную кривизну, а α, β константы, то F_n является пространством изотропной флаговой кривизны. Если дополнительно еще и $\sigma = 0$, то флаговая кривизна является постоянной.

Список литературы

- [1] Ikeda S. *On the theory of gravitational field in Finsler spaces.*- // Tensor, (1991), 50, N3, p. 256-262.

Бесконечно малые проективные преобразования римановых пространств второго приближения

Покась С. М., Крутоголова А. В.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: pokas@onu.edu.ua, 01link01@rambler.ru

В римановом пространстве 2-ого приближения \tilde{V}_n^2 для риманова пространства ненулевой постоянной кривизны ([3]) изучаются бесконечно малые преобразования:

$$y'^h = y^h + \tilde{\xi}^h(y)\delta t,$$

которые сохраняют геодезические.

Исследуя уравнения ([1], [2])

$$\tilde{\nabla}_k \tilde{h}_{ij} = 2\tilde{\psi}_k \tilde{g}_{ij} + \tilde{\psi}_{(i} \tilde{g}_{j)k},$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{ij} &= \tilde{\nabla}_{(i} \tilde{\xi}_{j)}, \\ \tilde{\psi}_k &= \frac{1}{n+1} \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_{\beta k} \tilde{\xi}_\alpha,\end{aligned}$$

в явном виде найдены представления компонент вектора смещения $\tilde{\xi}^h(y)$ в виде степенных рядов. Исследуется сходимость полученных рядов.

Список литературы

- [1] Н. С. Синюков *Геодезические отображения римановых пространств* Москва, Наука 1979, 255.
- [2] Л. П. Эйзенхарт *Риманова геометрия* Москва, ИЛ., 1948, 316.
- [3] С. М. Покась, Л. Г. Цехмейструк *Приближение второго порядка для риманова пространства ненулевой постоянной кривизны*. Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе-2012», 2012, стр. 60.

Об одном классе полусимметрических римановых пространств

Покась С. М., Цехмейструк Л. Г.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: pokas@onu.edu.ua, lida2007gc@gmail.com

Рассмотрим риманово пространство V_n , отнесенное к произвольной системе координат $\{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ и пространство 2-го приближения \tilde{V}_n^2 , ассоциированное с V_n в окрестности его произвольной точки M_0 [1]:

$$\tilde{g}_{ij}(y) = g_{ij} + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j} y^\alpha y^\beta \quad (1)$$

Здесь $g_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $R_{i\alpha\beta j} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$.

Компоненты объекта связности пространства \tilde{V}_n^2 имеют вид

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h(y) = -\frac{1}{3} R_{i(j)l}^h y^l + \frac{1}{3} \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} R_{i(j)m}^\alpha y^m t_\alpha^{(p)h}, \quad (2)$$

где

$$t_j^h = \frac{1}{3} R_{.l_1 l_2 j}^h y^{l_1} y^{l_2},$$

$$t_\alpha^{(p)h} = t_\alpha^{(p-1)h} t_j^\alpha \quad (p = 2, 3, \dots).$$

Ряды (2) сходятся абсолютно и равномерно на множестве $|t_p^h| < \frac{1}{n}$ [2].

Из (2) следует, что компоненты связности пространства \tilde{V}_n^2 являются совокупностью линейных однородных функций тогда и только тогда, когда тензор кривизны пространства V_n в точке M_0 удовлетворяет условиям

$$R_{.(l_1 l_2) \alpha}^h R_{.(ij) l_3}^\alpha + R_{.(l_2 l_3) \alpha}^h R_{.(ij) l_1}^\alpha + R_{.(l_3 l_1) \alpha}^h R_{.(ij) l_2}^\alpha = 0 \quad (3)$$

Имеют место.

Теорема 1. Риманово пространство V_n , тензоры кривизны которого в каждой его точке удовлетворяют условиям (3), являются полусимметрическим римановым пространством.

Теорема 2. Конформно-плоское риманово пространство V_n ($n > 3$), тензор кривизны которого в каждой его точке удовлетворяет (3), является плоским.

Следствие 1. Риманово пространство квазипостоянной кривизны, тензор кривизны которого в каждой его точке удовлетворяет условиям (3), является плоским.

Следствие 2. Риманово пространство постоянной кривизны, тензор кривизны которого в каждой его точке удовлетворяет условиям (3), является плоским.

Список литературы

- [1] С.М. Покась *Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения* Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского, физико-математические науки, №26, 2011, стр. 173-183.
- [2] С.М. Покась, Цехмейструк Л.Г. *Приближение 2-го порядка для риманово пространства ненулевой постоянной кривизны*. Тезисы докладов Международной конференции «Геометрия в Одессе - 2012», стр. 60.

Топология функций с изолированными критическими точками на границе трехмерного тела

А. О. Пришляк, Е.Н.Вятчанинова

(КНУ, Киев, Украина)

E-mail address: prishlyak@yahoo.com

В работе [1] для топологической классификация функций Морса на поверхности были введены понятия атомов и молекул. В данной работе мы используем эти методы для топологической классификации функций с изолированными критическими точками на границе трехмерного тела.

Пусть $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ – функция без внутренних критических точек на трехмерном теле M и с конечным числом критических точек ограничения $f|_{\partial M}$ функции на край ∂M . Атомом функции называется компоненту окрестности критического уровня $M_{[y-\varepsilon, y+\varepsilon]} = f^{-1}([y-\varepsilon, y+\varepsilon])$ расслоенную на компоненты уровней функции, содержащую критические точки и пересекается лишь с одним критическим уровнем. Критическая точка называется положительной, если поле градиента функции в ней направлено внутрь многообразия и отрицательной, если вне.

Поскольку регулярный уровень L – компактная поверхность с краем, которая не меняется при малых изменениях регулярного значения, то прохождение положительной критической точки меняет эту поверхность на поверхность с приклеенным $2n$ -угольником D к L ітеррв.

Зафиксируем ориентацию на атоме. Занумеруем стороны, которые приклеиваются согласно этой ориентации числами $1, 2, \dots, n$.

На каждой компоненте края ∂L выберем ориентацию, которая совпадает с ориентацией границы ∂D . Начнем обходить ту компоненту края ∂L , которая содержит приклеенную сторону 1 , начиная с нее по ориентации. Выпишем номера всех сторон, которые приклеиваются к этой компоненте. Получили упорядоченный набор чисел, который начинается с 1 . Так же для каждой компоненты запишем упорядоченный набор чисел, так что на первом месте стоит наименьшее число в этом наборе. Эти наборы будем записывать в круглых скобках, например $(1,3,2)$. Для каждой компоненты поверхности L выпишем в квадратных скобках все наборы, которые отвечают компонентам ее края. Эти наборы упорядочим по возрастанию первого числа в наборе. Например, $[(1,3), (2,5), (4)]$. Кроме того для каждой компоненты поверхности L укажем ее род g (верхний индекс возле списка) и число k компонент края, к которым не приклеивается $2n$ -угольник D (нижний индекс). Например, список $[(1,3), (2)]_2^3$ для $g=3, k=2$. Если эти индексы равняются 0 , то мы их не будем писать.

Получили для каждой компоненты поверхности L список наборов. Так построенную последовательность списков будем называть кодом атома.

Теорема. *Каждый атом с точностью до эквивалентности может быть воспроизведен по своему коду. Два кода задают одинаковые атомы, если один из другого может быть получен циклической заменой и перестановкой чисел.*

В докладе будут также описаны простые молекулы, полученные после склейки простых атомов.

Список литературы

- [1] А. В. Болсинов, А.Т. Фоменко. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация.* Ижевск: Изд. Дом «Удмурский университет», **1,2** (1999), 892 с.
- [2] О.О.Пришляк, К.О.Пришляк, О.Н.Вятчанинова. Топологічні властивості функцій на тривимірних тілах // Журнал обчисл. та прикл. матем., **2(101)** (2010), 113-119.

Однородные и неоднородные самоподобные фрактальные множества

Ю. С. Резникова

(Институт математики НАН Украины, Киев, Украина)

E-mail address: yurss@mail.ru

Рассмотрим метрическое пространство $\{M, \rho\}$, где ρ — фиксированная метрика, сохраняющая коэффициент подобия k [2]. Воспользовавшись комбинированными подходами к классификации самоподобных множеств [1, 2], введем следующие определения.

Определение 1. *Непустое компактное множество E метрического пространства $\{M, \rho\}$ называется однородным самоподобным фрактальным множеством, если*

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i=1}^n E_i, & n > 1, \\ E_i \stackrel{k_i}{\sim} E, & 0 < k_i < 1, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Определение 2. *Непустое компактное множество E метрического пространства $\{M, \rho\}$ называется неоднородным самоподобным фрактальным множеством, если*

$$\begin{cases} E = \left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right) \cup Y, & n > 1, \\ E_i \stackrel{k_i}{\sim} E, & 0 < k_i < 1, \quad i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

где Y — фиксированное компактное подмножество в $\{M, \rho\}$.

Аналогично, можно ввести следующую классификацию, отображающую принадлежность фрактальных множеств к определенным классам в зависимости от значений размерности Хаусдорфа-Безиковича [2], применительно к фрактальным множествам в смысле определений (1), (2).

Определение 3. *Однородное или неоднородное фрактальное множество называется:*

- *фракталом в широком смысле, если его размерность Хаусдорфа-Безиковича строго больше топологической размерности;*
- *фракталом в узком смысле, если его размерность Хаусдорфа-Безиковича принимает дробное значение;*
- *целофракталом, если его размерность Хаусдорфа-Безиковича принимает целое значение;*
- *квазифракталом, если его размерность Хаусдорфа-Безиковича совпадает с топологической;*
- *гиперфракталом, если его размерность Хаусдорфа-Безиковича на единицу меньше топологической размерности пространства.*

Предложенный подход позволяет однозначно отнести к фрактальным множествам, например, многомерный пластинчатый симплекс I типа (фрактальная поверхность — неоднородное самоподобное фрактальное множество в смысле определения (2), квазигиперфрактал) [3].

Список литературы

- [1] А. А. Кириллов *Повесть о двух фракталах.* - М., МЦНМО, 2010, 179с.
- [2] М. В. Працьовитий *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* - К., НПУ ім. М.П.Драгоманова, 1998, 298с.
- [3] Ю. С. Резникова *Два многомерных аналога треугольной салфетки Серпинского I типа.* - Труды международного геометрического центра, (2011), Том 4, No 4, С. 32-43.

Кривизна некоторых моделей информационной геометрии

Рылов А.А.

(Финансовый университет при Правительстве РФ, Москва, Россия)

E-mail address: alexander_rylov@mail.ru

В рамках информационной геометрии статистической модели [1] исследуется семейство S распределений вероятностей $\{P_\theta : \theta = (\theta^i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n\}$, гладко параметризованное параметрами θ . На такой модели естественным образом определяется геометрическая структура (g, K) , названная в [2] статистической. Роль координат на многообразии S играют параметры θ^i , метрика g структуры задается информационной матрицей Фишера $I_{ij}(\theta) = \int \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot p dP$, где $p = p(x|\theta)$ - плотность вероятности случайной величины относительно некоторой общей доминирующей меры P на выборочном пространстве, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}$. Ковариантные компоненты тензорного поля K структуры имеют вид $K_{ijk}(\theta) = \int \partial_i \ln p \cdot \partial_j \ln p \cdot \partial_k \ln p \cdot p dP$.

По заданной статистической структуре (g, K) на модели S инвариантно определяется однопараметрическое семейство α - связностей Ченцова-Амари [1] $\nabla^\alpha = D + \alpha \cdot K$, где D - связность Леви-Чивита метрики g , α - параметр. Если связность ∇^α имеет постоянную кривизну, то получаем статистическую структуру постоянной α - кривизны [3].

В докладе сопоставляются значения кривизн α - связностей Ченцова-Амари трех важных статистических моделей: нормальной \mathcal{N} [1], логистической \mathcal{L} [3], [4] и модели Парето \mathcal{P} [5]. Для связности Леви-Чивита, т.е. при $\alpha = 0$, и для $\alpha = 2$ их кривизны имеют постоянные значения, указанные в таблице:

∇^α	\mathcal{N}	\mathcal{L}	\mathcal{P}
$\alpha = 0$	$-\frac{1}{2}$	$\approx -1,4$	-2
$\alpha = 2$	$-\frac{3}{2}$	$\approx -0,98$	-6

Список литературы

- [1] S.-i. Amari *Information geometry* - Contemporary Math. 203 (1997), P. 81-95.
- [2] Рылов А.А. *Связности, совместимые с метрикой, и статистические многообразия* - Известия вузов. Мат., 12 (1992), С. 46-56.
- [3] Рылов А.А. *Связности Амари-Ченцова на логистической модели* - Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского, 26 (2011), С. 195-206.
- [4] R. Ivanova *A geometric observation on four statistical parameter spaces* - Tensor. N.S. 72 (2010), P. 188-195.
- [5] Рылов А.А. *Связности постоянной кривизны на статистической модели Парето* - Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского, 30 (2012), С. 155-163.

Нежесткие поверхности вращения с уплощениями в полюсах

И. Х. Сабитов¹

(МГУ, Москва и ЯрГУ, Ярославль; Россия)

E-mail address: isabitov@mail.ru

Мы рассматриваем поверхности вращения, гомеоморфные сфере, и используя метод работы [1] доказываем следующую теорему.

Теорема 1. Для любого данного натурального числа $t \geq 2$ и любой пары чисел (не обязательно целых) $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$, существует поверхность вращения S , имеющая в полюсах уплощения порядка $p = 2n_1 - 2 \geq 0$ и $q = 2n_2 - 2 \geq 0$ и допускающая б.м. изгибания с нетривиальной гармоникой с номером t , причем возможно любое сочетание уплощений: 1) в обоих полюсах уплощения имеют порядок $p = q = 0$ (т.е. $n_1 = n_2 = 1$ и уплощения фактически нет); 2) в одном полюсе уплощение есть, а в другом его нет; 3) или, наконец, оба полюса имеют уплощения. Во всех случаях можно гарантировать, что и поверхность, и поле б.м. изгибания аналитичны вне полюсов, а в полюсах гладкость следующая: 1) и поверхность, и б.м. изгибание аналитичны, если оба полюса без уплощений (т.е. $n_1 = n_2 = 1$); 2) и поверхность, и б.м. изгибание аналитичны всюду, если в обоих полюсах уплощения четного порядка и согласованы между собой при данном номере гармоники t ; 3) в остальных случаях гладкость поверхности и поля б.м. изгибания зависит от гладкости поверхности и порядка уплощения в полюсах (дополнительно можно утверждать, что если поверхность аналитична, но порядки уплощений в полюсах не согласованы, б.м. изгибания будут класса конечной гладкости).

О согласованности и несогласованности порядков уплощения в полюсах поверхности вращения см. работу [2].

Список литературы

- [1] Милка А.Д. О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения // Украинский геометрический сборник. – 1965.– 1. – с. 65 – 74.
- [2] САБИТОВ И.Х. Исследование жесткости и неизгибаемости аналитических поверхностей вращения с уплощением в полюсе // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика.– 1986.– 5.– с. 29 – 35.

¹Работа автора поддержана грантом РФФИ № 12-01-90415-УКР

Новые интегральные формулы для кривых и многоугольников на плоскости

И. Х. Сабитов¹

(МГУ, Москва и ЯрГУ, Ярославль; Россия)

E-mail address: isabitov@mail.ru

Известна роль, какую играют разные интегральные формулы в геометрии кривых и поверхностей. Для замкнутой плоской кривой основной топологической характеристикой является ее индекс Ind , равный числу поворотов касательной к ней при полном обходе кривой. Пусть C^2 -гладкая кривая L задана уравнением

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(s), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(s)$$

в функции длины дуги s , а $k(s)$ является ее кривизной. Известно равенство

$$\int_L k(s) ds = \kappa(L) = 2\pi Ind(L).$$

Мы доказываем следующее обобщение этой классической формулы.

Теорема 1. *Интеграл*

$$\int_L k(s)(x'(s))^p(y'(s))^q ds$$

равен 0, если хотя бы одно из неотрицательных целых чисел p или q является нечетным. Если же оба этих числа являются четными, тогда

$$\int_L k(s)(x'(s))^{2n}(y'(s))^{2m} ds = \frac{(2n)!(2m)!}{4^{n+m}n!m!(n+m)!} \kappa(L), \quad (n \geq 0, m \geq 0).$$

Гладко аппроксимируя многоугольники около их вершин малыми дугами вписанных окружностей, можно получить аналогичные формулы и для плоских многоугольников, обобщающие предложенную в [1] формулу для суммы углов многоугольника

Список литературы

- [1] И.Х. Сабитов. Чему равна сумма углов многоугольника? // Квант, 2001, № 3, с. 6-12.

¹Работа автора поддержана грантом Правительства РФ, №11.G34.31.0053

Квадратичное представление плоских кривых

В. М. Савельев

(ЛНУ, Луганск, Украина)

E-mail address: svm59@mail.ru

Пусть α — плоская кривая заданная явным уравнением $y = f(x)$. Пусть также эта кривая не проходит через начало координат. Тогда ее квадратичное представление [2] $\gamma = \alpha \otimes \alpha$ задается следующим радиус-вектором

$$\mathbf{r}(t) = (x^2, xf(x), xf(x), f^2(x)).$$

Из вида радиус-вектора имеем $\gamma \subset E^3 \subset E^4$. Кроме того, понятно, что кривая γ лежит на конусе.

Вычисляя вторую кривизну [1] k_2 кривой γ и приравнивая ее нулю получим следующее дифференциальное уравнение

$$8xy'y''' + 12x^2y'y''^2 - 12xyy''^2 - 4x^2y'^2y''' - 4y^2y''' = 0.$$

Это уравнение допускает следующие решения

$$y = ax + b, \quad y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}.$$

Имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Квадратичное представление эллипса и гиперболы есть соответственно эллипс и гипербола.*

Список литературы

- [1] Ю. А. Аминов *Геометрия подмногообразий.*, — К.: Наукова думка., 2002.
- [2] В. Y. Chen *Diferential Geometry of semiring of immersions, I: General theory.*, - Bull. Ins. Math. Acad. Sinica **21** (1993), 1-34.

РЕАЛИЗАЦИЯ ЭРЛАНГЕНСКОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

С. Самохвалов

(Государственный технический университет, Днепродзержинск, Украина)

E-mail address: serg_samokhval@ukr.net

Пусть задана **деформированная группа диффеоморфизмов** $T_X^{gH} = \{t_x\}$ аффинного пространства $X = \{x\}$ с законом умножения $(t \times t')_x = \varphi_x(t_x, t'_{x'}) := H_x(K_x(t_x) + K_{x'}(t'_{x'}))$, $x' = x + K_x(t_x)$, где H_x - **отображение деформации**, $K_x := H_x^{-1}$ [1]. Этим на X задана структура аффинной связности (без кручения) с коэффициентами связности $\gamma_x = \partial \lambda_x(0)$ в базисе $e_x = k_x \cdot \partial_x$, где $\lambda_x(t) := \partial' \varphi_x(t, 0)$ и $k_x := \partial K_x(0)$ (здесь $\partial := \partial/\partial t$, $\partial' := \partial/\partial t'$, $\partial_x := \partial/\partial x$). Для **канонической деформации**, вдоль геодезической, соединяющей произвольные две точки $x' = x(s)$ и $x = x(0)$, все касательные к ней векторы $\tau_{x'} = h_{x'} \circ \dot{x}(s)$, где $h_x := k_x^{-1}$, связаны λ -переносом: $\tau_x = \lambda_x(s\tau_x) \circ \tau_{x'}$. Задавая квадрат длины вектора $\tau_x^2 := \eta\langle \tau_x, \tau_x \rangle$, на X задается **структура риманова пространства** с метрикой $g_x := h_x^c \circ \eta \circ h_x$ (c - транспонирование). Связность с метрикой согласуются условием неизменности длины вектора τ_x при λ -переносе: $\eta\langle \tau_x, \tau_x \rangle = G_x(s\tau_x)\langle \tau_x, \tau_x \rangle$, где $G_x(s\tau_x) := \lambda_x^c(s\tau_x) \circ \eta \circ \lambda_x(s\tau_x)$. Структуру произвольного риманова пространства можно задать на X таким образом, и в этом смысле группа T_X^{gH} осуществляет её теоретико-групповое описание [1]. Группа T_X^{gH} не оставляет инвариантов на X , поэтому не может рассматриваться как главная группа риманова пространства (по Ф.Клейну [2]).

С целью реализации эрлангенской программы для римановых пространств рассмотрим группу $G_X^g = T_X^g \times \Lambda^g$ нелокальных автоморфизмов группы T_X^{gH} , оставляющих метрику g_x неизменной: $x' = x + \tilde{\theta}_x$, $\tau'_{x'} = \tilde{\Lambda}_x \circ \tau_{x'}$, где $\tau_x \in T_X^{gH}$, $G_X^g \supset T_X^g = \{\tilde{\theta}_x\}$, а $G_X^g \supset \Lambda^g = \{\tilde{\Lambda}_x\}$ - калибровочная группа вращений. Группа G_X^g параметризуется парами $(\tilde{\theta}_x, \tilde{\Lambda}_x)$ и описывает движение репера (по Э.Картану): $e'_{x'} = \tilde{\Lambda}_x^{-1} \cdot e_{x'}$. Деформируем группу $G_X^g \Rightarrow G_X^{gH} = \{(\theta_x, \Lambda_x)\}$, полагая: $\tilde{\theta}_x = K_x(\theta_x)$, $\tilde{\Lambda}_x = \Lambda_x \circ \pi_x(\theta_x)$ с соблюдением условий согласования: $\pi_x(0) = 1$, $\partial \pi_x(0) = \gamma_x$, а также выполнения композиционного закона $\pi_x(s\tau_x) \circ \pi_{x'}(s'\tau_{x'}) = \pi_x((s+s')\tau_x)$ для π -переносов $\xi'_x = \pi_x(s\tau_x) \circ \xi_{x'}$ произвольных векторов ξ_x вдоль геодезических. В этом случае группу G_X^{gH} будем называть **группой параллельных переносов риманова пространства** и обозначать DP .

Теорема. Трансляционные генераторы действия группы DP в расслоении TX являются ковариантными производными $\nabla_x = e_x + \gamma_x$ векторных полей, а условие их коммутации $[\nabla_x, \nabla_x] = R_x + C_x \cdot \nabla_x$, где R_x - тензор кривизны риманова пространства и C_x - коэффициенты неголономности реперного поля e_x (структурное уравнение риманова пространства) - необходимым условием существования группы DP , задающей своим действием в TX данную структуру на X .

Преобразования из группы DP сохраняют длины векторов и углы между ними, поэтому группа DP является **главной группой риманова пространства** [2].

Список литературы

- [1] С. Самохвалов. Теоретико-групповой опис риманових просторів // Укр. мат. журн., **55** (2003) 1238–1248, arXiv:math.DG/0704.2967.
- [2] Ф. Клейн. Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований ("Эрлангенская программа") // Об основаниях геометрии. - М.: Гостехтеоретиздат (1956) 399–434.

О построении 4-мерных нелоренцевых h -пространств.

Г. А. Серякин

(КФУ, Казань, Россия)

E-mail address: George.Seryakin@kpfu.ru

Работа посвящена исследованию 4-мерных нелоренцевых многообразий нулевой сигнатуры, обладающих симметриями в форме проективных движений. С каждым проективным движением связана сохраняющаяся величина, которая остается постоянной вдоль каждой 4-геодезической и определяет закон сохранения.

Для того, чтобы векторное поле X было проективным движением, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(L_X G_{AB})_{;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}, \quad (1)$$

здесь $A, B = [1, \dots, 4]$, $L_X G_{AB}$ — производная Ли метрики G_{AB} в направлении проективного движения X , φ есть 1-форма, и точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно метрики G_{AB} . Уравнения (1) разбиваются на две группы: уравнения Эйзенхарта

$$h_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A} \quad (2)$$

и обобщенные уравнения Киллинга

$$(L_X G_{AB})_{;C} = h_{AB} \quad (3)$$

Метрики, допускающие нетривиальные решения $h_{AB} \neq cG_{AB}$ уравнений Эйзенхарта, называются h -метриками, а соответствующие пространства — h -пространствами.

В работе 4-мерные h -пространства нелоренцевой сигнатуры. При помощи метода косономального репера А. В. Аминовой [1] были получены h -метрики указанного типа и исследована их структура.

Список литературы

- [1] А. В. Аминова, *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*, М.: “Янус-К”, 2003.

О голоморфно-проективных отображениях в целом некоторых специальных классов келеровых пространств

Е. Н. Синюкова

(Южноукраинский национальный педагогический университет имени К. Д. Ушинского,
Одесса, Украина)

E-mail address: Marbel@ukr.net

Выделены некоторые новые классы в целом голоморфно-проективно однозначно определенных келеровых пространств. В частности доказана

Теорема 1. Компактные келеровы S^r пространства $K^n (n > 2, r > 4)$, в которых при некоторых вещественных значениях $\alpha_i, i = \overline{1, s}$ на множестве симметричных дважды контравариантных тензоров b^{ij}

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} P_{\alpha\gamma\sigma\beta} \geq 0 \quad (\leq 0), \quad (1)$$

причем равенство нулю может достигаться лишь при $b^{ij} = \rho(x)g^{ij}$, в целом не допускают нетривиальных голоморфно-проективных отображений.

Тензор $P_{\alpha\gamma\sigma\beta}$ в (1) специальным образом выражается через ковариантные производные второго порядка тензоров Римана, Риччи и скалярной кривизны рассматриваемого келерова пространства K^n . Числа $\alpha_i, i = \overline{1, 8}$, содержатся в этом выражении.

Частным случаем теоремы 1 при $\alpha_3 = 1, \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \dots = \alpha_8 = 0$ является

Теорема 2. Компактные келеровы S^r пространства $K^n (n > 2, r > 4)$, в которых на множестве симметричных дважды контравариантных тензоров b^{ij}

$$b^{\alpha\beta} b^{\gamma\sigma} (R_{\alpha(\gamma,\sigma)\beta} - R_{\alpha\beta,\gamma\sigma}) \geq 0 \quad (\leq 0),$$

причем равенство нулю может достигаться лишь при $b^{ij} = \rho(x)g^{ij}$, в целом не допускают нетривиальных голоморфно-проективных отображений.

Исследования базируются на основных уравнениях голоморфно-проективных отображений келеровых пространств, заданных в виде линейной системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных, первого порядка, типа Коши ([1,2]) и известной теореме Грина ([3,4]).

Приведены примеры келеровых пространств, удовлетворяющих условиям сформулированных теорем.

Список литературы

- [1] Mikes J., Vanžurová A., Hinterleitner I *Geodesic Mappings and Some Generalizations*, Olomouc, 2009.
- [2] Синюков Е. С. *Геодезические отображения римановых пространств*, Москва, Наука, 1979
- [3] Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии*, т. 1, Москва, Наука, 1981
- [4] Яно К., Бохнер С., *Кривизна и числа Бетти*, - М., И.Л., 1957.

Геометрические объекты, инвариантные относительно квази-геодезических отображений римановых пространств с симплектической структурой

О. Т. Сисюк

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: olia-sisiuk@list.ru

Рассматривались квази-геодезические отображения римановых пространств с симплектическими структурами.

Исследование ведется в тензорной форме, локально, в классе вещественных достаточно гладких функций.

Квази-геодезические отображения были введены академиком А.З.Петровым в ([1]) при исследовании проблемы моделирования (в смысле поведения пробных частиц) физических полей. В результате А.З.Петров пришел к задаче квази-геодезических отображений римановых пространств V_4 сигнатуры Минковского. В ([2]) эти отображения были обобщены на случай произвольной размерности и сигнатуры.

Пусть римановы пространства $V_n(g_{ij}, F_i^h)$ и $\bar{V}_n(\bar{g}_{ij}, \bar{F}_i^h)$ находятся в квази-геодезическом отображении. Тогда их основные уравнения в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид:

$$\bar{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h(x) + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

$$F_{(ij)} = \bar{F}_{(ij)} = 0,$$

$$F_{(ij)} = F_j^\alpha g_{\alpha i}, \bar{F}_{(ij)} = F_j^\alpha \bar{g}_{\alpha i},$$

где $\bar{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ компоненты объектов связности пространств \bar{V}_n и V_n с метрическими тензорами $\bar{g}_{(ij)}$ и $g_{(ij)}$, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование. В предположении, что аффинор F определяет симплектическую структуру на V_n и \bar{V}_n , т.е.:

$$|F_i^h| \neq 0,$$

$$F_{(ij,k)} = \bar{F}_{(ij|k)} = 0,$$

где " , " и " | " знаки ковариантной производной по связностям Γ и $\bar{\Gamma}$, соответственно, строятся и исследуются ряд геометрических объектов как неоднородных (типа параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), так и тензорного характера, инвариантных относительно рассматриваемых отображений. Выделяются классы пространств, однозначно определенных относительно квази-геодезических отображений симплектических римановых пространств.

Список литературы

- [1] Петров А.З. *О геодезических отображениях римановых пространств неопределенной метрики* .- Изв. Казанск. физ. о-ва. при КГУ, (1949), 14, сер. 3, С. 3-36.
- [2] Курбатова И.Н. *Квази-геодезические отображения римановых пространств.*- Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, (1979), 99с.

Выпуклые многогранники с изолированными симметричными гранями

В. И. Субботин

(ЮРГТУ(НПИ), Новочеркасск, Россия)

E-mail address: geometry@mail.ru

Замкнутый выпуклый многогранник в трёхмерном евклидовом пространстве называется симметричным, если он имеет хотя бы одну нетривиальную ось симметрии. Будем говорить, что ось симметрии замкнутого выпуклого многогранника в трёхмерном евклидовом пространстве *проходит через грань* многогранника, если она перпендикулярна этой грани и пересекает относительную внутренность этой грани.

Грань, через которую проходит ось симметрии многогранника будем называть симметричной; в противном случае – несимметричной.

Симметричную грань F многогранника будем называть *изолированной*, если все грани, входящие в звезду F , т.е. соседние с F по ребру, несимметричны. Если в многограннике каждая симметричная грань изолирована, то будем говорить, что замкнутый выпуклый многогранник в трёхмерном евклидовом пространстве является *многогранником с изолированными симметричными гранями*

Ранее автором ([1]) были рассмотрены многогранники с изолированными *несимметричными* гранями. В настоящей работе найдена точная верхняя оценка числа граней многогранников с изолированными симметричными гранями при некотором естественном условии. Без этого условия многогранник с изолированными симметричными гранями может иметь как угодно большое число граней.

Теорема 1. *Пусть каждая несимметричная грань многогранника с изолированными симметричными гранями входит в звезду только одной симметричной грани и пусть в звезде каждой несимметричной грани найдётся ещё только одна несимметричная грань звезды другой симметричной грани. Тогда максимально возможное число граней такого многогранника равно 422.*

Заметим, что многогранники с изолированными симметричными гранями не являются метрически двойственными к многогранникам с изолированными несимметричными гранями.

Список литературы

- [1] Субботин В.И. *Симметричные многогранники с изолированными несимметричными гранями.* // Труды участников международной школы-семинара по геометрии и анализу памяти Н.В.Ефимова. - Ростов-на-Дону, 2008. С. 74-75.

О сердцевине некоторой четырехмерной три-ткани Бола параболического типа

Г. А. Толстихина

(Тверской госуниверситет, Тверь, Россия)

E-mail address: tga_56@mail.ru

Известно [1], [2], что всякая четырехмерная средняя ткань Бола (ткань B_m) грассманизуема, то есть эквивалентна грассмановой ткани, порождаемой на грассмановом многообразии прямых $G(1, 4)$ проективного пространства P^3 тремя гиперповерхностями, одна из которых является плоскостью (обозначим ее π), а две другие принадлежат одной и той же квадрике (обозначим ее Q). Такие ткани классифицированы по виду квадрики Q и ее взаимному расположению с плоскостью π . При этом различают ткани трех типов: эллиптического (квадрика Q овальная), гиперболического (квадрика Q кольцевидная) и параболического (квадрика Q является конусом). В [3] найдены уравнения четырехмерных три-тканей B_m параболического типа, в том числе уравнения ткани Π^* :

$$z^1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 y^2}} \frac{x^2 - y^2}{x^1 - y^1}, \quad z^2 = z^1 x^1 - \sqrt{\frac{x^2}{y^2}},$$

где $x^2 \neq 0$, $y^2 \neq 0$, $x^1 - y^1 \neq 0$. Для ткани Π^* гиперплоскость π пересекает конус Q по невырожденной действительной кривой второго порядка. Пусть B_l^* – четырехмерная левая три-ткань Бола, связанная с тканью Π^* преобразованием парастрофии: координатная квазигруппа ткани B_l^* суть левая обратная квазигруппа ${}^{-1}f$ координатной квазигруппы f ткани B_m . Известно [1], [4], что любая ткань B_l индуцирует на базе X первого слоения локальную квазигруппу $(*) : X \times X \rightarrow X$, называемую сердцевинной. Уравнение последней $c = a * b$ связывает параметры слоев первого слоения ткани, входящих в произвольную конфигурацию (B_l) , замыкание которых характеризует левые ткани Бола [1]. Известно [4], что сердцевина левой ткани Бола изотопна левой лупе Бола, а потому определяет некоторую левую три-ткань Бола, не эквивалентную, вообще говоря, исходной ткани. Оказалось, что сердцевина ткани B_l^* , связанной с тканью Π^* , не изотопна локальной координатной квазигруппе ткани, а определяемая ею четырехмерная левая ткань Бола связана преобразованием парастрофии с четырехмерной тканью B_m гиперболического типа. Справедлива

Теорема. Пусть B_l^* – четырехмерная левая три-ткань Бола, связанная преобразованием парастрофии с четырехмерной средней три-тканью Бола Π^* параболического типа. Левая обратная квазигруппа сердцевины три-ткани B_l^* определяет среднюю три-ткань Бола гиперболического типа.

При доказательстве существенно используются аналитические характеристики тканей Бола различных типов и условия изотопности сердцевины и координатной квазигруппы ткани.

Список литературы

- [1] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*// монография/ Тверь, ТвГУ. 2010. 308 с.
- [2] Иванов А. Д. *Об интерпретации четырехмерных тканей Бола в трехмерном проективном пространстве*// Геометрия однородных пространств, М.: Моск. гос. пед. ин-т. 1973. С. 42–57.
- [3] Иванов А. Д. *О четырехмерных тканях Бола параболического типа*// Изв. Вузов. Мат. 1976. №1. С. 42–47.
- [4] Толстихина Г. А., Шелехов А. М. *О три-тканях Бола с IC-свойством*// Изв. Вузов. Мат. 2013. №5. С. 25–35.

Совершенный мегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли

А.Ф. Турбин

(Институт математики НАН Украины, НПУ им. М. Драгоманова, г.Киев, Украина)

E-mail address: turbin@imath.kiev.ua

Выпуклый многогранник в афинно евклидовом пространстве $E^n, n \geq 4$, я называю совершенным, если он правильный, самодвойственный (правильные самодвойственные многогранники – гипертетраэдры Л.Шлефли), заполняет пространство (–многогранник Г.Вороного автодуальной решетки в $E^n, n \geq 4$), на вершинах многогранника, вписанного в гиперсферу $S_{n-1}(R)$ радиуса R размещаются, касаясь друг друга, гиперсферы того же радиуса (решение обобщённой проблемы И.Ньютона-Дж.Грегори).

Совершенные многогранники есть во всех пространствах $E^n, n \geq 4$. Возглавляет парад совершенных многогранников мегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли (24, 96, 96, 24).

Увидеть совершенные многогранники в $E^n, n \geq 4$, геометрам на более чем полтора столетия запретила не (как оказалось, неверная) теорема отважного швейцарского школьного учителя Л.Шлефли о правильных многогранниках, у которого нет ограничений на число правильных многогранников, а попытки её доказать (Г.Кокстер и др.).

Два несовместимых многогранника, у которых, тем не менее, совпадает число k -мерных граней, $0 \leq k \leq n - 1$, назовём структурными близнецами.

Структурный близнец совершенного мегаоктаэдра И.Ньютона-Л.Шлефли (24, 96, 96, 24) – гиперкубооктаэдр (24, 96, 96, 24 = 8 + 16), у которого 3-грани – кубы и октаэдры.

У полуправильного архимедова тела (12, 24, 14), громко называемого кубооктаэдром, не увидеть ни куба, ни октаэдра. Только их "улыбки"!

Пусть $RP_n(m, k)$ – регулярный выпуклый многогранник, m – число вершин, k – число рёбер.

Гранью Да Винчи многогранника $RP_n(m, k)$ я называю регулярный m -вершинник $RP_n(m, r)$ в $E^p, 4 \leq p < n, n + 1 \leq r < k$.

Гранью Да Винчи совершенного мегаоктаэдра И.Ньютона-Л.Шлефли является усечённый октаэдр Архимеда (24, 36, 14), заполняющий E^3 как куб (8, 12, 6) и ромбододекаэдр И.Кеплера (14, 24, 12).

Супергранью Да Винчи многогранника $RP_n(m, k)$ я называю регулярный m -вершинник $RP_p(m, q), q < k$.

Совершенный мегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли (24, 96, 96, 24) является супергранью Да Винчи простого самодвойственного икосианоэдра Дж.Грегори-А.Погорелова (24, 144, 144, 24), трёхмерные грани которого – икосаэдры (12, 30, 20).

Многогранник $RP_p(m - 2r, s), 4 \leq p, 4 \leq r < \frac{1}{2}m$, не являющийся p -мерной гранью многогранника $RP_n(m, k)$, я называю гранью-призраком совершенного мегаоктаэдра.

Совершенный полумегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли (12, 48, 48, 12) является гранью-призраком совершенного мегаоктаэдра И.Ньютона-Л.Шлефли (24, 96, 96, 24).

Видеосопровождение доклада: совершенный мегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли, грани, грани-призраки.

Геометрический синтез в действии

А.Ф. Турбин

(Институт математики НАН Украины, НПУ им. М. Драгоманова, г.Киев, Украина)

E-mail address: turbin@imath.kiev.ua

Ю.Д. Жданова

(Государственный университет информационно-коммуникационных технологий, г.Киев)

E-mail address: yuzhdanova@yandex.ru

Великий И. Кеплер называл ромбододекаэдр $(14, 24, 12)$ "наиболее правильной фигурой, которая подобно треугольникам, квадратам и шестиугольникам заполняет все пространство".

Ромбододекаэдр И. Кеплера $(14 = 8 + 6, 24 = 12 + 12, 12 = 6 + 8 - 2)$ – результат геометрического синтеза двух правильных двойственных друг другу многогранников: куба $(8 = 14 - 6, 12, 6)$ и октаэдра $(6 = 14 - 8, 12, 8)$.

В пространстве E^3 геометрический синтез несамодвойственных выпуклых многогранников $P_3(B, P, \Gamma)$, у которых длины рёбер одинаковы и среди двумерных граней есть треугольники, даёт суперромбоэдр Ю.А. Митропольского $P_3(B + \Gamma, 2R, 2 - B + \Gamma + 2R)$, 2-границы которых ромбы. Результат геометрического синтеза ромбододекаэдра и двойственного ему усеченного октаэдра Архимеда $(12, 24, 14)$ – суперромбоэдр Ю.А. Митропольского $(32 = 12 + 20, 60 = 30 + 30, 30 = 12 + 12 - 2)$.

В пространстве E^4 совершенный мегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли $(24, 96, 96, 24)$ – результат геометрического синтеза двух совершенных полумегаоктаэдров И.Ньютона-Л.Шлефли $(12, 48, 48, 12)$.

Результат геометрического синтеза гиперкуба $(16, 32, 24, 8)$ и двойственного ему мегатетраэдра Л.Шлефли $(8, 24, 32, 16)$ – суперромбоэдр Ю.А. Митропольского $(24 = 16 + 8, 48, 36, 12)$. Суперромбоэдр Ю.А. Митропольского заполняет пространство E^4 и является многогранником Г.Вороного решётки в E^4 .

В $E^n, n \geq 4$, геометрический синтез несамодвойственных выпуклых многогранников $P_n(\Gamma_n^0, \Gamma_n^1, \dots, \Gamma_n^k, \dots, \Gamma_n^{n-1})$, где Γ_n^k – число k -мерных граней, у которых длины рёбер одинаковы и среди двумерных граней есть треугольники, даёт суперромбоэдр Ю.А. Митропольского $P_n(\Gamma_n^0 + \Gamma_n^{n-1}, 2\Gamma_n^1, \dots, 2\Gamma_n^k, \dots, \Gamma_n^0 + \Gamma_n^{n-1} - 2)$, у которых 3-границы – аффинные кубы $(8, 12, 6)$, 2-границы которых ромбы.

Геометрический синтез трёх правильных шестимерных контактных мегакубоэдров И.Ньютона-Н.Кузеного $(60, 480, 720, 720, 480, 60)$ даёт десятимерный суперструнный правильный контактный мегакубоэдр И. Ньютона-Н. Кузеного $(180, 2880, \dots, 2880, 180)$.

Видеосопровождение доклада: фантастические по красоте образы синтезированных многогранников.

Непрерывные изгибания овалоида с дыркой при условии обобщенной втулочной связи

В. Т. Фоменко

(Таганрог, ТГПИ им. А.П. Чехова)

E-mail address: vtfomenko@rambler.ru

The author proves that the ovaloid with a hole admits nontrivial bendings provided that the ovaloid along the boundary subject to a hub.

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве овалоид S положительной гауссовой кривизны и некоторую точку O на нем. Будем считать, что точка O является началом координат и текущая точка M овалоида S имеет радиус-вектор \bar{r} . Пусть, далее, L – замкнутая гладкая кривая на овалоиде S , не проходящая через точку O . Обозначим через $S(L)$ кусок овалоида S , ограниченный кривой L и не содержащий точку O . Известно, что поверхность $S(L)$ допускает непрерывные изгибания. Однако, если на край поверхности $S(L)$ при ее изгибании наложить внешнюю связь, то поверхность $S(L)$ может стать неизгибаемой и даже однозначно определенной. Так, А.Д. Александров и Е.П. Сенькин доказали, что поверхность $S(L)$ не допускает нетривиальных изометрических преобразований при условии сохранения расстояний точек края L до точки O .

В случае, когда край L поверхности $S(L)$ лежит на фиксированной сфере $S^2(R, O)$ радиуса R с центром в точке O , то указанная внешняя связь является по терминологии И.Н. Векуа втулочной связью.

Аналитически внешняя связь закрепления края поверхности $S(L)$ относительно точки O записывается в виде

$$(\bar{r}, \bar{U}) + \frac{1}{2}(\bar{U}, \bar{U}) = 0, \quad (\text{вдоль } L) \quad (1)$$

где \bar{U} - поле смещений точек края поверхности $S(L)$ при ее изометрическом преобразовании. В связи с этим будем говорить далее, что поверхность $S(L)$ при изгибании подчинена условию обобщенной втулочной связи, если изгибающее поле \bar{U}^* поверхности $S(L)$ вдоль L удовлетворяет условию

$$(\bar{\ell}, \bar{U}) + \Phi(\bar{U}) = \sigma, \quad (2)$$

где $\bar{\ell}$ - заданное вдоль L векторное поле, $|\bar{\ell}| \neq 0$; Φ - заданный нелинейный оператор, σ - заданная на L функция.

Условие (1) получается из (2) при $\bar{\ell} = \bar{r}$, $\Phi(\bar{U}) = \frac{1}{2}(\bar{U}, \bar{U})$, $\sigma \equiv 0$.

Настоящее сообщение посвящено непрерывным изгибаниям поверхностей $S(L)$ при условии обобщенной втулочной связи (2).

Единственность регулярных замкнутых выпуклых поверхностей

Ю. С. Хомич, Л. А. Гармашова

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: Yli4ka_h@mail.ru

В работе [1] рассматривается вопрос о единственности регулярной замкнутой выпуклой поверхности S , главные радиусы кривизны которой R_1, R_2 в точке с внешней нормалью \bar{n} удовлетворяют уравнению

$$f(R_1 R_2, R_1 + R_2, \bar{n}) + \bar{c} \cdot \bar{n} = \varphi(\bar{n}) \quad (1)$$

где c – постоянный вектор, соответствующий поверхности S , а функция f – положительно однородная первой степени относительно компонент x_1, x_2, x_3 единичного вектора \bar{n} . Результаты этих исследований сформулированы в следующей теореме:

Теорема: Пусть S_1 и S_2 – поверхности класса C^4 , удовлетворяющие уравнению (1) при постоянных векторах \bar{c}_1 и \bar{c}_2 соответственно. Пусть ψ_i – аналогична $\psi(x_1, x_2, x_3)$ функция для поверхности S_i ($i = 1, 2$). Если $f \in C^5$,

$$\frac{\partial F}{\partial R_1} \cdot \frac{\partial F}{\partial R_2} > 0 \quad (2)$$

и $\Delta(\psi_1 - \psi_2) + \lambda(\psi_1 - \psi_2) = 0$, где Δ – оператор Лапласа, $\lambda = const$, то поверхности S_1 и S_2 равны и параллельно расположены.

Применяя эту теорему к конкретным функциям $f = f(R_1 R_2, R_1 + R_2, \bar{n})$, получен следующий результат:

Теорема: Пусть S_1 и S_2 – поверхности класса C^4 , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{(R_1 + R_2)^2}{-4(R_1 R_2)^2} + \bar{c} \cdot \bar{n} = \varphi(\bar{n})$$

при постоянных векторах \bar{c}_1 и \bar{c}_2 соответственно. Пусть ψ_i – аналогична $\psi(x_1, x_2, x_3)$ функция для поверхности S_i ($i = 1, 2$). Если $\Delta(\psi_1 - \psi_2) + \lambda(\psi_1 - \psi_2) = 0$, где Δ – оператор Лапласа, $\lambda = const \neq -10$, то поверхности S_1 и S_2 равны и параллельно расположены.

Если $f(R_1 R_2, R_1 + R_2, \bar{n}) = \frac{(R_1 - R_2)^2}{4(R_1 R_2)^2}$ – Эйлерова разность в уравнении (1), то условие (2) теоремы единственности в работе [1] не выполняется. Следовательно, поверхности с одинаковой Эйлеровой разностью в точках с параллельными и одинаково направленными внешними нормалью \bar{n} не всегда равны и параллельно расположены.

Список литературы

- [1] Медяник А. И. *Теоремы единственности для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей.* // Укр. геом. сб. - 1983. - Вып. 21. - С. 86-88.

Определение области устойчивости ламинарного течения пленки жидкости

В. Х. Кирилов, Н. П. Худенко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: khudenkonn@mail.ru

Исследование безволнового течения на поверхности пленки жидкости проводилось на основании уравнения пограничного слоя [1]: Предполагаем параболическое распределение продольной скорости Волновой характер свободной поверхности определяется из уравнения

$$\frac{\sigma}{\rho} k^3 h^3 h''' + (c\omega h^2 - 2, 4hqck + 1, 2q^2k - gh^3 \cos \beta)h' - 3\nu(ch + q_0 - ch_0) + gh^3 \sin \beta = 0$$

На свободной поверхности безволнового течения рассматриваем малое возмущение в виде бегущей волны

$$h = h_0(1 + \varphi).$$

Для возмущения φ свободной поверхности с точностью до членов второго порядка малости имеем

$$\frac{\sigma}{\rho} k^3 h_0^4 \varphi''' + kh_0(c^2 h_0^2 - 2, 4h_0 q_0 c + 1, 2q_0^2 - gh_0^3 \cos \beta) \varphi' - 3\nu(ch_0(1 + \varphi) + q_0 - ch_0) + gh_0^3(1 + \varphi)^3 \sin \beta = 0.$$

Решение данного уравнения представлено в виде малого по амплитуде длинноволнового возмущения

$$\varphi(t, x) = \alpha \cdot \exp(kc_{im}) \cdot \exp(ik(x - c_{re}t)).$$

Проведенные исследования показали, что условие устойчивости $kc_{im} < 0$ выполняется если $0,3 < c_{re} < 1,2$. Если же $1,2 < c_1 < 3$, то ламинарное безволновое течение неустойчиво ($kc_{im} > 0$), причём данная неустойчивость является не абсолютной, а конвективной, т.е. амплитуда возмущения экспоненциально растёт со временем вниз по потоку.

Список литературы

- [1] В. Е. Накоряков, Б. Г. Покусаев, И. Р. Штейбер. Волновая динамика газо- и парожидкостных сред // М. - Энергоатомиздат, (1990), 248 с.

Инфинитезимальные конформные преобразования, сохраняющие тензор Эйнштейна

Е. Е. Чепурная

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: culeshova@ukr.net

Уравнения инфинитезимальных конформных преобразований имеют вид [1],[2] :

$$\begin{cases} \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ \varphi_{,i} = \varphi_i; \\ \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij}; \\ \xi_{i,jk} = \xi_{\alpha} R_{kji}^{\alpha} + \frac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik} - \varphi_i g_{jk}) \\ \varphi_{ij} = \frac{2}{n-2} \left(\xi^{\alpha} R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R_j^{\alpha} + \xi_{\alpha,j} R_i^{\alpha} + \frac{g_{ij}}{2(n-1)} (\xi^{\alpha} R_{,\alpha} + \varphi R) \right) \end{cases} \quad (1)$$

Тензор

$$E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij} \quad (2)$$

называют тензором Эйнштейна [3]. Из требования сохранения тензора 2 вытекает, что помимо системы 1 должно выполняться уравнение

$$L_{\xi} E_{ij} = \xi^{\alpha} E_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} E_j^{\alpha} + \xi_{\alpha,j} E_i^{\alpha} = 0 \quad (3)$$

Нами доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для того, чтобы инфинитезимальные конформные преобразования оставляли инвариантным тензор Эйнштейна $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$L_{\xi} Z_{ijk}^h = 0.$$

Здесь символ L_{ξ} означает производную Ли вдоль поля ξ , а тензор

$$Z_{ijk}^h \stackrel{\text{def}}{=} R_{ijk}^h - \frac{R}{n(n-1)} (\delta_k^h g_{ij} - \delta_j^h g_{ik}), \quad (4)$$

называется тензором конциркулярной кривизны.

Теорема 2. Пространство, в котором возможны инфинитезимальные конформные преобразования, оставляющие инвариантным тензор Эйнштейна, необходимо должно быть эвклидовым.

Список литературы

- [1] Л. П. Эйзенхарт *Риманова геометрия* // М.: ИЛ, 1948.316 с
- [2] Микеш Й., Молдобаев Д. *О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств* // Изв. вузов. Матем., 1991, № 12, 24–29
- [3] Cherpurna O., Kiosak V., Mikeš J. *Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor.* // J. Appl. Math. Aplimat 3, 1 (2010), 253–258.

Конформные отображения и сохранение некоторых геометрических объектов

Е. В. Черевко

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: cherevko@usa.com

Отображения с сохранением различных геометрических объектов изучались в работах [1], [3], в частности, тензора энергии-импульса в [2], [5]. Особый интерес вызван к конформным отображениям, поскольку при последних всегда сохраняется алгебраический тип пространства-времени, согласно классификации Петрова [4]. Пусть римановы пространства (V_n, g) и (\bar{V}_n, \bar{g}) находятся в конформном соответствии, поэтому, их метрические тензоры связаны соотношением:

$$\bar{g}_{ij} = e^{2\varphi} g_{ij}.$$

Назовем тензор

$$\mathfrak{E}_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \kappa R g_{ij}. \quad (1)$$

обобщенным тензором Эйнштейна. Доказана следующая

Теорема 1. Если (V_n, g) и (\bar{V}_n, \bar{g}) , $(n > 3)$ находятся в конформном соответствии, так, что обобщенный тензор Эйнштейна $\mathfrak{E}_{ij} = R_{ij} - \kappa R g_{ij}$ сохраняется при отображении, причем $\kappa \neq \frac{1}{n}$, то инвариант φ , порождающий отображение, должен удовлетворять системе дифференциальных уравнений:

$$\nabla_j \varphi_i = \varphi_i \varphi_j - \frac{1}{2} g_{ij} \Delta_1 \varphi,$$

условия интегрируемости которой имеют вид:

$$\varphi_\alpha R_{ijk}^\alpha = 0.$$

При этом, тензор Римана R_{ijk}^h , тензор Риччи R_{ij} , произведение $R g_{ij}$ также являются инвариантными.

Список литературы

- [1] Кириченко В. Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. // М., МПГУ, 2003, 495 с.
- [2] Киосак В. А. Конформные отображения с сохранением тензора энергии-импульса // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского. 2011. № 26. С. 98–104.
- [3] Černá O., Kiosak V., Mikeš J. Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor. // J. Appl. Math. Aplimat 3, 1 (2010), 253–258.
- [4] Крамер Д., Штефанн Х., Мак-Каллум М., Херльт Э. Точные решения уравнений Эйнштейна. // Под ред. Э. Шмутцера: Пер. с англ.—М.: Энергоиздат, 1982. 416 с.
- [5] Кузаконь В. М. Черевко Є. В. Конформно-келерові простори та конформні перетворення тензору енергії-імпульсу. // Proc. Inter. Geom. Center, v.4, № 4, 2011, p.20-26.

Конциркулярные тензорные поля и геодезические отображения

И. Г. Шандра

(Финансовый университет, Москва, Россия)

E-mail address: ma-tematika@yandex.ru

Определение 1. Векторное поле ϕ на псевдоримановом пространстве (M, g) называется *конциркулярным*, если оно удовлетворяет условию

$$\nabla_X \phi = \rho \cdot X$$

при некотором скалярном поле ρ , где ∇ – связность Леви-Чивиты. Говорят, что конциркулярное поле относится к *основному типу*, если $\rho \neq 0$, и к *исключительному типу* – в противном случае.

Конциркулярные поля играют важную роль в теории геодезических отображений, проективных и конформных преобразований и в этой связи изучались многими авторами.

В работе введено понятие тензорного конциркулярного поля и доказаны следующие утверждения [1]-[3].

Теорема 1. *Псевдоримановы пространства, допускающие конциркулярное тензорное поле, образуют замкнутый относительно геодезических отображений класс.*

Теорема 2. *Пусть псевдориманово пространство (M, g) допускает нетривиальное геодезическое отображение на псевдориманово пространство (\bar{M}, \bar{g}) и на (M, g) существует конциркулярная q -форма основного типа, тогда на (\bar{M}, \bar{g}) также существует конциркулярная q -форма основного типа.*

Список литературы

- [1] И.Г. Шандра *О геодезической подвижности римановых пространств.* – Матем. заметки, 68: 4 (2000), р. 620–626.
- [2] И.Г. Шандра *О конциркулярных тензорных полях и геодезических отображениях псевдоримановых пространств.* – Изв. вузов. Матем., 2001, № 1, с. 55–66.
- [3] I. G. Shandra *Concircular vector fields on semi-riemannian spaces.* – Journal of Mathematical Sciences, 142:5 (2007), р. 2419–2435.

О топологической эквивалентности функций

В. В. Шарко

(Институт математики, Киев, Украина)

E-mail address: sharko@imath.kiev.ua

Пусть X и Y - топологические пространства, а f и g - непрерывные отображения из X в Y . Непрерывные отображения f и g называются топологически эквивалентными, если существуют гомеоморфизмы $h : X \rightarrow X$ и $k : Y \rightarrow Y$ такие, что $k \cdot f = g \cdot h$.

Лемма 1. *Существует непрерывная функция $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, которая не является топологически эквивалентной никакой гладкой функции $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.*

Теорема 1. *Для каждой кусочно-линейной функции f , заданной на R^1 и имеющей m локальных экстремумов, существует полином степени $m + 1$, который топологически эквивалентен функции f .*

Известно [1], что существует конечное число топологически неэквивалентных полиномов степени $n > 1$ от $k > 0$ переменных, однако неизвестно их число и нет условий, дающих возможность установить, когда два полинома топологически эквивалентны.

Существуют полиномы разных степеней от двух переменных, которые топологически эквивалентны.

Полиномы, удовлетворяющие уравнению, Лапласа называются гармоническими. Гармонические $P(x, y) = x^3 - 3xy^2 - 3x$ и $Q(x, y) = -y^3 + 3x^2y - 3y$ топологически неэквивалентны. Они имеют по две невырожденные критические точки, координаты которых $(\pm 1, 0)$. Для $P(x, y)$ эти критические точки лежат на разных линиях уровня, а для $Q(x, y)$ они лежат на одной линии уровня. Следовательно $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ топологически неэквивалентны.

Лемма 2. *Гармонические полиномы от двух переменных разных степеней всегда топологически неэквивалентны.*

Лемма 3. *Графы Кронрода-Риба гармонических полиномов разных степеней не изоморфны.*

Гармонический полином $P = P(x, y)$ каноническим образом задает функцию P_{K-R} на ее графе Кронрода-Риба $\Gamma_{K-R}(P)$, которая называется $K - R$ образом полинома $P = P(x, y)$. Значение P_{K-R} в точке $x \in \Gamma_{K-R}(P)$ равно значению $P = P(x, y)$ на соответствующей x компоненте связности линии уровня [2].

Гармонический полином называется гармоническим полиномом общего положения, если на его линии уровня лежит не более одной критической точки [3].

Теорема 2. *Гармонические полиномы общего положения будут топологически эквивалентными тогда и только тогда, когда они $K - R$ эквивалентны.*

Список литературы

- [1] Т. Fukuda *Types topologiques des polynomes.*- Publications mathematiques de l'I.H.E., (1976), № 46, P. 87-106.
- [2] V. V. Sharko *About Kronrod-Reeb graph of fuction on a manifold.*- Methods of Functional Analysis and Topology,- (2006),12 -№ 4, P. 389-396.
- [3] В. В. Шарко *Топологическая классификация функций.*-Доповіді НАН України., -(2013), № 4, с.23-25.

Квантування другого методу Ляпунова

Ю. В. Шарко (Іоніна)

(Інститут математики НАНУ, Київ, Україна)

E-mail address: sun_set@ukr.net

([1]) Для нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений предложены дискретные условия устойчивости и асимптотической устойчивости по Ляпунову.

В роботі запропоновано дискретний аналог другого методу Ляпунова для неавтономної системи диференціальних рівнянь

$$dx(t)/dt = f(t, x(t)).$$

Теорема 1. Нехай в області U задана неавтономна система звичайних диференціальних рівнянь $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ і виконується умова $f(t, 0) = 0$. Припустимо, що в області U існує збіжна послідовність кусково гладких гіперповерхонь \mathbf{H}_p^n . Якщо майже в усіх точках $x \in \mathbf{H}_p^n$ ($p = 1, 2, \dots$) значення функції

$$S(t, x) = \langle \vec{N}_p^x(t, x), \vec{f}(t, x) \rangle$$

буде невід'ємним, тоді нульовий розв'язок цієї системи буде стійким за Ляпуновим.

(Ми позначили через $\vec{f}(t, x) = (1, f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$).

Теорема 2. Нехай в області U задана неавтономна система звичайних диференціальних рівнянь $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ і виконується умова $f(t, 0) = 0$. Припустимо, що в області U існує збіжна послідовність різних кусково гладких гіперповерхонь \mathbf{H}_p^n , у яких сингулярні підмножини Σ_p є дискретний набір точок. Якщо в усіх точках $x \in \mathbf{H}_p^n \setminus \Sigma_p$ ($p = 1, 2, \dots$) значення функції

$$S(t, x) = \langle \vec{N}(t, x), \vec{f}(t, x) \rangle$$

буде додатним і в областях $\mathbf{K}_p^{n+1} \setminus \mathbf{K}_{p+1}^{n+1}$ інваріантні множини системи $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ відсутні, тоді нульовий розв'язок цієї системи буде стійким, але не асимптотично стійким за Ляпуновим. (Ми позначили через $\vec{f}(t, x) = (1, f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))$, а через \mathbf{K}_p^{n+1} - многовид з границею \mathbf{H}_p^n).

Теорема 3. Нехай в області U задана система $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ і існує збіжна послідовність кусково гладких гіперповерхонь \mathbf{H}_i^{n-1} . Якщо майже в усіх точках $x \in \mathbf{H}_i^{n-1}$ значення функції

$$S(t, x) = \langle \vec{N}_p^x(t, x), \vec{f}(t, x) \rangle$$

буде невід'ємним і промінь \mathbf{L} є єдиною інваріантною множиною для системи $dx(t)/dt = f(t, x(t))$, тоді і нульовий розв'язок цієї системи, буде асимптотично стійким за Ляпуновим.

Список літератури

- [1] Шарко Ю.В. Квантування другого методу Ляпунова.- Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України. - 2012, - Том 9, №2 - С. 376-384.
- [2] Ю. В. Шарко Квантування функцій Ляпунова.- Укр. мат. журнал.- 2010, - том 62 № 9 - С.300-307.

Классификация правильных универсальных тождеств длины 4 в гладкой лупе

А. М. Шелехов

(Тверской государственной университет, Тверь, Россия)

E-mail address: amshelekhov@rambler.ru

Тождество $S_1(x, y, \dots, u) = S_2(x, y, \dots, u)$ называется правильным, если слова $S_1(x, y, \dots, u)$ и $S_2(x, y, \dots, u)$ различаются только расстановкой скобок, то есть имеют одинаковую длину и порядок следования переменных в них одинаковый. В дальнейшем рассматриваются только несократимые тождества. Тождеством типа Бола называют правильное тождество длины 4 с тремя различными переменными.

Тождество в лупе Q называется универсальным [1], если оно выполняется во всех лупах, изотопных Q . Известно [1], что универсальными являются тождество ассоциативности, правое и левое тождества Бола, тождество Муфанг. Произвольно взятое тождество не является, вообще говоря, универсальным, но оно может оказаться универсальным в некотором подмногообразии луп, которое описывается некоторым другим универсальным тождеством. Например, тождество коммутативности не является универсальным, но оно будет универсально в многообразии ассоциативных луп, то есть групп [1]. Всякое тождество T универсально в многообразии луп, которое определяется универсальным тождеством, производным от тождества T . Многообразие луп, определяемое универсальным тождеством, инвариантно относительно изотопии. Назовем такие многообразия луп I -инвариантными.

Пусть T — некоторое тождество в лупе Q . Требуя, чтобы оно выполнялось во всех главных изотопах Q , мы таким образом выделим I -инвариантное подмногообразие луп, в которых тождество T универсально. Если лупа $Q(\cdot)$ — гладкая лупа размерности r с операцией $z = x \cdot y$, то все ее главные изотопы являются координатными лупами соответствующей три-ткани W , заданной тем же уравнением $z = x \cdot y$ на многообразии $Q \times Q$. Этот подход позволяет охарактеризовать класс тканей, соответствующих искомому универсальному тождеству, с помощью основных тензоров ткани.

Обозначим, как обычно, через R , B_ℓ , B_r , B_m , M , E и H классы тканей: групповых, левых, правых и средних Бола, Муфанг, эластичных и шестиугольных, и теми же символами обозначим соответствующие I -инвариантные многообразия луп.

Пусть теперь T — правильное тождество длины 4 в гладкой лупе Q . Верны

Теорема 1. Если T — тождество от одной переменной, то оно универсально в многообразии луп H , определяемых производным тождеством от тождества моноассоциативности [2].

Теорема 2. Если T — тождество от четырех переменных, то оно универсально в многообразии R [2].

Теорема 3. Если T — тождество от трех переменных (тождество типа Бола), то оно универсально в одном из следующих многообразий луп: R , B_ℓ , B_r , M .

Теорема 4. Имеется всего 26 тождеств T с двумя переменными. Из них 7 универсальны в многообразии B_ℓ , 7 — в многообразии B_r ; 2 — в многообразии E ; 6 принадлежат I -инвариантным многообразиям луп, содержащимся в многообразии M ; 4 принадлежат I -инвариантным многообразиям луп, содержащимся в многообразии B_m и одновременно содержащим многообразие E .

Список литературы

- [1] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука, 1967, 223 с.
- [2] Шелехов А. М. Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания. Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР) **21**, 1989, 109–154 .

Обобщенные структуры на гладких многообразиях

В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов

(ОНАПТ, Одесса, Украина; Тверской государственный университет, Тверь, Россия)

E-mail addresses: kuzakon_v@ukr.net, amshelekhov@rambler.ru

Мы развиваем понятие обобщенного главного расслоения, введенное в [1], и обобщаем с этих же позиций понятие G -структуры. Обобщенное главное расслоение — это такое расслоение, в каждом слое которого действует r -мерная группа Ли, гладко зависящая от слоя. Таким образом, речь идет о семействе групп Ли или о гладкой деформации группы Ли. Пусть $G(x)$ — гладкое семейство групп Ли размерности r , или гладкая n -параметрическая деформация группы Ли, где x — параметр деформации. Будем далее предполагать, что пространство параметров деформации является гладким многообразием размерности n .

Доказана

Теорема 1. Пусть P — гладкое многообразие размерности $n + r$. На P задана структура обобщенного главного расслоения тогда и только тогда, когда на P существуют 1-формы ω^i и ω^a , удовлетворяющие структурным уравнениям

$$d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j, \quad d\omega^a = -\frac{1}{2}C_{bc}^a(x)\omega^b \wedge \omega^c + \omega_j^a \wedge \omega^j,$$

причем функции $C_{bc}^a(x)$ кососимметричны по нижним индексам и удовлетворяют тождествам Якоби; $a, b, c, d, e, \dots = 1, 2, \dots, r$; $i, j, k, \dots = r + 1, \dots, r + n$.

Пусть далее $G(x)$ — гладкая деформация в $GL(n)$, то есть n -параметрическое семейство r -мерных подгрупп группы $GL(n)$, гладко зависящее от параметра x . Обозначим пространство параметров деформации через M , и будем считать, что M — гладкое многообразие размерности n .

K -обобщенной G -структурой $B_G(x)$ на многообразии M назовем подмногообразие в расслоении $B(M)$ реперов многообразия M такое, что для любой точки p из $B_G(x)$ и для любого g из $GL(n)$ точка $p \cdot g$ принадлежит $B_G(x)$ тогда и только тогда, когда $g \in G(x)$, где $x = \pi(p)$. При этом $p \cdot g(v) = p(gv)$, $v \in V$, и считается, что все $G(x)$ действуют в некотором фиксированном n -мерном векторном пространстве V со стандартным базисом.

Доказана

Теорема 2. Пусть M — гладкое многообразие размерности n . На M задана K -обобщенная G -структура $B_G(x)$ тогда и только тогда, когда базисные формы ω^i этого многообразия удовлетворяют структурным уравнениям вида

$$d\omega^i = a_{j\alpha}^i(x)\omega^j \wedge \theta^\alpha + b_{jk}^i\omega^j \wedge \omega^k,$$

$$d\theta^\alpha = -\frac{1}{2}C_{\beta\gamma}^\alpha(x)\theta^\beta \wedge \theta^\gamma + \theta_j^\alpha \wedge \omega^j,$$

где функции $C_{\beta\gamma}^\alpha(x)$ кососимметричны по нижним индексам, удовлетворяют тождеству Якоби и связаны с функциями $a_{j\alpha}^i(x)$ соотношениями

$$a_{j[\alpha}^k(x)a_{k|\beta]}^i(x) = C_{\alpha\beta}^\gamma(x)a_{j\gamma}^i(x),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, \dots = 1, 2, \dots, r$; $i, j, k, \dots = 1, \dots, n$.

Список литературы

[1] Кузаконь В.М. *Generalized fiber bundles with connections* // Ukr. J. Phys. 1998, v. 43, n. 7, pp. 14-16.

О три-тканях Бола с ковариантно постоянным тензором кривизны.

А. М. Шелехов, Е. А. Оноприенко

(Тверской государственной университет, Тверь, Россия; МПГУ, Москва)

E-mail address: amshelkhov@rambler.ru; katrinonoprienko@mail.ru

На гладком многообразии размерности $2r$ рассматриваются многомерные средние три-ткани Бола (обозначим их B_m^∇), у которых тензор кривизны ковариантно постоянен относительно связности Черна. Как известно [1], с три-тканью связана алгебра Акивиса, состоящая из двух операций: бинарной, определяемой тензором кручения ткани, и тернарной, определяемой ее тензором кривизны. Обозначим алгебры, определяемые этими операциями, через A и B соответственно.

Доказаны следующие предложения.

Теорема 1. *Для тканей с ковариантно постоянным тензором кривизны 1) производная алгебра A' входит в среднее и правое ядра алгебры B ; алгебра голономии связности Черна входит в алгебру дифференцирований алгебры A .*

Теорема 2. *При $r = 2$ класс тканей B_m^∇ совпадает с классом групповых тканей.*

Теорема 3. *При $r = 3$ класс тканей B_m^∇ совпадает с классом тканей E , то есть с точностью до изотопии содержит всего две эластичные ткани E_1 и E_2 (см. [1], [2]).*

Список литературы

- [1] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*. Тверь, Тверской гос-т, 2010, 307 с.
- [2] Шелехов А. М. *Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$* . Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140.

Голоморфные геометрические объекты на трансверсальных расслоениях

В. В. Шурыгин

(Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия)

E-mail address: Vadim.Shurygin@ksu.ru

Со слоением \mathcal{F} коразмерности q на гладком $n = (q+p)$ -мерном многообразии M ассоциируется расслоение $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ трансверсальных \mathbf{A} -скоростей на M [1], определяемых локальной алгеброй \mathbf{A} в смысле А. Вейля [2], [1]. Если слоение \mathcal{F} задается атласом с преобразованиями координат $x^{i'} = f^{i'}(x^i, y^\alpha)$, $y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$, $i = 1, \dots, q$, $y^\alpha = q + 1, \dots, n$, где $\partial f^{i'}/\partial y^\alpha = 0$, то на $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ индуцируется атлас с преобразованиями координат $X^{i'} = F^{i'}(X^i, y^\alpha)$, $y^{\alpha'} = f^{\alpha'}(x^i, y^\alpha)$, где $X^i \in \mathbf{A}$, а $X^{i'} = F^{i'}(X^i, y^\alpha)$ — голоморфные (\mathbf{A} -дифференцируемые) функции, являющиеся продолжениями функций $f^{i'}$ [1]. Поэтому $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ несет на себе структуру гладкого многообразия над \mathbf{A} , моделируемого \mathbf{A} -модулем $\mathbf{A}^q \oplus \mathbf{R}^p$. Многообразие $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ несет на себе канонические слоения, к которым относится, в частности, слоение \mathcal{F}' , слои которого определяются локально уравнениями $X^i = \text{const} \pmod{\text{Ann } \mathfrak{m}}$, где \mathfrak{m} — максимальный идеал алгебры \mathbf{A} , а $\text{Ann } \mathfrak{m}$ — аннулятор идеала \mathfrak{m} . Наличие на $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ структуры гладкого многообразия над \mathbf{A} позволяет рассматривать на $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ голоморфные поля геометрических объектов $\Lambda : T_{tr}^{\mathbf{A}}P_{n,q}^r M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}F$, где $P_{n,q}^r M$ — главное расслоение расслоенных r -реперов на M ($P_{n,q}^r M$ образовано r -джетами ростков в нуле изоморфизмов канонического слоения коразмерности q на пространстве \mathbf{R}^n на слоеное многообразие M), а F — расслоенное многообразие, на котором задано действие расслоенной дифференциальной группы $G_{n,q}^r$ (группа Ли $G_{n,q}^r M$ образована r -джетами ростков в нуле автоморфизмов канонического слоения коразмерности q на пространстве \mathbf{R}^n на себя). К объектам такого рода относятся, в частности, \mathbf{A} -продолжения $T_{tr}^{\mathbf{A}}\lambda : T_{tr}^{\mathbf{A}}P_{n,q}^r M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}F$ проектируемых полей расслоенных геометрических объектов $\lambda : P_{n,q}^r M \rightarrow F$, получаемые применением к λ функтора $T_{tr}^{\mathbf{A}}$.

Расслоение $P_{n,q}^r M$ естественно вложено в расслоение $T_{tr}^{\mathbf{A}}P_{n,q}^r M$. Голоморфное поле геометрических объектов Λ на $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ типа $T_{tr}^{\mathbf{A}}F$ индуцирует на M поле геометрических объектов $\lambda = \pi_{tr} \circ \Lambda|_{P_{n,q}^r M}$ типа F , где $\pi_{tr} : T_{tr}^{\mathbf{A}}F \rightarrow F$ — каноническая проекция. Возникает вопрос о нахождении условий, при которых голоморфное поле геометрических объектов Λ на $T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ типа $T_{tr}^{\mathbf{A}}F$ эквивалентно \mathbf{A} -продолжению $T_{tr}^{\mathbf{A}}\lambda$, т. е. о нахождении условий, при которых Λ можно перевести в $T_{tr}^{\mathbf{A}}\lambda$ \mathbf{A} -диффеоморфизмом $\Theta : T_{tr}^{\mathbf{A}}M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}M$, сохраняющим слои расслоения $T_{tr}^{\mathbf{A}}$, т. е. \mathbf{A} -диффеоморфизмом, проектирующимся в тождественное отображение $\text{id} : M \rightarrow M$. Всякий \mathbf{A} -диффеоморфизм $\Theta : T_{tr}^{\mathbf{A}}M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}M$ расслоения Вейля на себя, сохраняющий слои этого расслоения, определяется сечением $\theta = \Theta|M : M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}M$, представляющим собой морфизм слоений \mathcal{F} и \mathcal{F}' .

Теорема 1. \mathbf{A} -гладкое поле геометрических объектов $\Lambda : T_{tr}^{\mathbf{A}}P_{n,q}^r M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}F$ эквивалентно \mathbf{A} -продолжению $T_{tr}^{\mathbf{A}}\lambda$ тогда и только тогда, когда

$$\Lambda|_{P_{n,q}^r M} = \mathcal{L}_\theta \lambda$$

для некоторого сечения $\theta : M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}M$, представляющего собой морфизм слоений \mathcal{F} и \mathcal{F}' , где $\mathcal{L}_\theta \lambda = T_{tr}^{\mathbf{A}}\lambda \circ \theta_{n,q}^r : P_{n,q}^r M \rightarrow T_{tr}^{\mathbf{A}}F$ — трансверсальный джет Ли, а $\theta_{n,q}^r$ — продолжение сечения θ на расслоение $P_{n,q}^r M$.

Список литературы

- [1] Shurygin V.V. *Structure of smooth mappings over Weil algebras and the category of manifolds over algebras.* — Lobachevskii J. Math. 5, (1999), P. 29-55.
- [2] Kolář I., Michor P.W., and Slovák J. *Natural Operations in Differential Geometry.* Springer, (1993), 434 p.

Конциркулярное векторное поле на локально конформно-келеровом многообразии

В. М. Кузаконь

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

О. В. Якимчук

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: yakymchuk.oks@gmail.com

Пусть M – риманово многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$ -модуль гладких векторных полей на M , $\mathfrak{X}^*(M)$ – дуальный модуль дифференциальных 1-форм на M .

Определение 1. [1] Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется торсообразующим, если $\nabla\xi = \rho \text{id} + a \otimes \xi$ для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. Дифференциальную 1-форму a и функцию ρ назовем характеристическими. Торсообразующее векторное поле называется конциркулярным, если $da = 0$, называется спецконциркулярным, если $a = 0$, и называется рекуррентным, если $\rho = 0$.

Пусть $\mathcal{S} = \{g, J\}$ – $2n$ -мерная почти эрмитова (короче, АН-) структура на M , $J^2 = -\text{id}$, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ (эндоморфизм J называется почти комплексной структурой).

Определение 2. Интегрируемая АН-структура называется эрмитовой структурой. Эрмитова структура называется келеровой структурой, если ее фундаментальная форма $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ замкнута.

Определение 3. Эрмитова структура, заданная на многообразии M , называется локально конформно-келеровой (короче, ЛКК-) структурой, если существует открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия M и система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A}$ гладких функций таких, что $\{J|_{U_\alpha}, \tilde{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ – келерова структура для любого $\alpha \in A$. Гладкое многообразие, на котором фиксирована ЛКК-структура, называется ЛКК-многообразием.

Замкнутая дифференциальная 1-форма ω на многообразии M , такая, что $\omega|_{U_\alpha} = 2d\sigma_\alpha$, называется формой Ли. Векторное поле ξ , дуальное форме Ли, называется вектором Ли. ЛКК-многообразие, вектор Ли которого рекуррентен, называют рекуррентным ЛКК-многообразием. Доказаны теоремы:

Теорема 1. Вектор Ли ЛКК-многообразия постоянной кривизны является конциркулярным векторным полем.

Теорема 2. Компактное многообразие M постоянной кривизны не допускает собственной рекуррентной ЛКК-структуры.

Список литературы

- [1] Аминова А.В. Проективные преобразования псевдоримановых многообразий // Москва, Янус-К, 2003, 619 с.
- [2] Кириченко В.Ф., Власова Л.И. Конциркулярная геометрия приближенно келеровых многообразий // Матем. сборник. Т. 193. Вып. 5. 2002. с. 53-76.

Planar pairs of convex sets of constant relative width

L. E. Bazylevych, M.M. Zarichnyi

(Lviv Polytechnica, Lviv University, Lviv, Ukraine)

E-mail address: izar@litech.lviv.ua

All our constructions are made in the Euclidean plane \mathbb{R}^2 . Let $S(x, r)$ denote the closed ball of radius $r > 0$ centered at x . For $A \subset \mathbb{R}^2$, let $\Omega^r(A) = \cap\{S(x, r) \mid x \in A\}$ (see [1]).

A pair (A, B) of nonempty compact convex subsets of \mathbb{R}^2 is said to be a pair of constant relative width $r > 0$ if $A - B = S(0, r)$. In [1] it is proved that this is equivalent to the following: $A = \Omega^r(B)$, $B = \Omega^r(A)$.

Denote by $\text{RW}(r)$ the set of pairs (A, B) of constant relative width $r > 0$ satisfying the conditions:

- (i) A lies in the upper half-plane and touches the x -axis;
- (ii) B lies in the right half-plane and touches the y -axis.

The topology on the set $\text{RW}(r)$ is induced by the product topology and the Hausdorff metric on the factors.

The Lie group S^1 acts on the space $\text{RW}(r)$ by the rotations. (Actually, this means that the result of rotation around the origin must be shifted so that it satisfies conditions (i) and (ii).) The only fixed point of this action is the pair $K = (S((r/2, r/2), r/2), S((r/2, r/2), r/2))$.

Our results are in the spirit of [2, 3]. We demonstrate that the orbit space $(\text{RW}(r) \setminus \{K\})/S^1$ is a Q -manifold (Q stands for the Hilbert cube) which contains various Eilenberg-MacLane spaces of the form $K(\pi, n)$, $n = 1, 2$. These spaces are shown to be Q -manifolds as well.

References

- [1] H. Maehara *Convex bodies forming pairs of constant width.*, Journal of Geometry 1984, Vol. 22, Issue 2, P. 101–107.
- [2] H. Toruńczyk, J. E. West *Fine structure of S^1/S^1 : a Q -manifold hyperspace localization of integers.*, In: Proc. Internat. Conf. Geometric Topology, PWN, Warszawa, 1980, 439–449.
- [3] L. Bazylevych, *Eilenberg-MacLane spaces of compact convex bodies of constant width.*, Visn. L'viv. Univ., Ser. Mekh.-Mat. 2010. Vol. 72, 5–9.

Canonical structures and distributions on homogeneous k -symmetric spaces

V. V. Balashchenko

(Belarusian State University, Minsk, Belarus)

E-mail address: balashchenko@bsu.by; vitbal@tut.by

Canonical structures of classical types such as almost complex ($J^2 = -id$), almost product ($P^2 = id$), f -structures of K. Yano ($f^3 + f = 0$) and some others on homogeneous k -symmetric spaces play a remarkable role in the theory of homogeneous manifolds and its applications [1], [2]. These structures are closely related to the canonical invariant distributions on homogeneous k -symmetric spaces. In this talk, we intend to present new results in the following directions.

We indicate algebraic criteria under which the base canonical distributions belong to the classes **F** (foliations), **AF** (anti-foliations), **TGF** (totally geodesic foliations) on homogeneous k -symmetric spaces endowed with the "diagonal" Riemannian metrics. It implies, in particular, a wide collection of invariant Riemannian almost product structures for the Naveira classification [3].

Further, we study left-invariant f -structures on Riemannian 2-step nilpotent Lie groups and obtain their relation to the classes of **Hf** (Hermitian f -structures) and **NKf** (nearly Kähler f -structures) in the generalized Hermitian geometry [4], [1]. Specifically, we apply canonical f -structures on homogeneous k -symmetric spaces to construct left-invariant f -structures of such a kind on the 5- and 6-dimensional generalized Heisenberg groups as well as on some other Lie groups.

Recently, affinor structures initiated by the golden ratio (so-called "golden structures") were introduced [5]. These structures F satisfy the equation $F^2 = F + id$. We indicate all the canonical "golden structures" on homogeneous k -symmetric spaces and discuss some their properties.

Finally, we present new results for arbitrary regular Φ -spaces [1] which include homogeneous k -symmetric spaces ($\Phi^k = id$). It gives the opportunity to generalize some previous results and their applications to the generalized Hermitian geometry. In particular, we characterize those base canonical f -structures on naturally reductive regular Φ -spaces which are nearly Kähler f -structures. As a corollary, it follows the result from [6] that any base canonical f -structure on a naturally reductive homogeneous k -symmetric space is a nearly Kähler f -structure.

References

- [1] V.V. Balashchenko, Yu.G. Nikonorov, E.D. Rodionov, V.V. Slavsky, *Homogeneous spaces: theory and applications: monograph*. - Polygrafist, Hanty-Mansijsk, (2008), 280p. (in Russian).
- [2] O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, - Moscow, Mir, (1984), 240p. (in Russian).
- [3] A.M. Naveira, *A classification of Riemannian almost-product manifolds*. - Rend. Mat. 73: 3, (1983), P. 577-592.
- [4] V.F. Kirichenko, *Methods of generalized Hermitian geometry in the theory of almost contact manifolds*. - J. Soviet Math. 42: 5, (1988), P. 1885-1919.
- [5] M. Crasmareanu, C.-E. Hretcanu, *Golden differential geometry*. - Chaos, Solitons and Fractals. 38: 5, (2008), P. 1229-1238.
- [6] V.V. Balashchenko, A.S. Samsonov, *Nearly Kähler and Hermitian f -structures on homogeneous k -symmetric spaces*. - Doklady Mathematics. 81: 3, (2010), P. 386-389.

The predshanin number and absolute of regular spaces

Beshimov R.B., Mukhamadiev F.G.

(National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek)

E-mail address: rbeshimov@mail.ru, farhod8717@mail.ru

If two X and Y regular spaces are soabsolute then they have several general properties, for example $c(X) = c(Y)$, $d(X) = d(Y)$, $\pi w(X) = \pi w(Y)$ and if one of these spaces is compact, finally compact, paracompact, locally compact, complete in the meaning of Czech respectively, then so is another one [1]. In the work it is proved that if regular spaces X and Y are co-absolute, then $psh(X) = psh(Y)$.

Let's mention some definitions. A continuous map $f : X \rightarrow Y$ is called a perfect map if X is Hausdorff space, f is a closed map and all preimages $f^{-1}(y)$ are compact spaces [1]. A continuous map $f : X \rightarrow Y$ is called separable if for every $x_1 \neq x_2 \in X$ satisfying condition $f(x_1) = f(x_2)$, there exist disjoint neighborhoods in X . A continuous map $f : X \rightarrow Y$ of the space X onto the space Y is called irreducible if $f(A) \neq Y$ for every proper closed subset A of X . A topological space is called extremely disconnected if for every open set $U \subset X$ the closure $[U]$ is open in X .

Definition [2]. An absolute of a topological space X is an extremely disconnected space qX such that there exists separable perfect irreducible map $\pi_x : qX \xrightarrow{\text{onto}} X$.

A cardinal τ is said to be precaliber of a space X if every family of cardinality τ consisting of nonempty open subsets of X contains a subfamily of cardinality τ with the finite intersection.

The cardinal $\min\{\tau : \tau^+ \text{ - precaliber for } X\}$ is called the predshanin number of X and denoted by $psh(X)$.

Theorem 1. [2,3]. If a map $f : X \rightarrow Y$ is "onto" and τ is precaliber of the space X , then τ is precaliber of Y too.

Theorem 2. [1]. The map $f : X \rightarrow Y$, where $f(X) = Y$ is closed iff for any open subset U of X the set $f^\approx(U) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U\}$ is open in Y .

Theorem 3. Let regular spaces X and Y be co-absolute. Then $pk(X) = pk(Y)$.

Proof. Suppose $pk(X) = \tau \geq \aleph_0$. Theorem 1 implies $pk(Y) \leq pk(X)$. Inversely, let $\mu = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ be a family of nonempty open sets of X and $pk(Y) = \tau \geq \aleph_0$. Consider the system $f^\approx(\mu) = \{f^\approx(U_\alpha) : \alpha \in A\}$, where $f^\approx(U_\alpha) = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U_\alpha\}$. Then by virtue of theorem 2 the system $f^\approx(\mu)$ has open sets in Y . Since $pk(Y) = \tau \geq \aleph_0$ there exists a subset $A' \subset A$ such that $|A'| = \tau$ and the system $\{f^\approx(U_\alpha) : \alpha \in A' \subset A\}$ has the finite intersection property. Then the inverse image $f^{-1}(f^\approx(U_\alpha)) \subset U_\alpha$ is open in X for every $f^\approx(U_\alpha) \in f^\approx(\mu)$ since the mapping f is continuous. From the fact that the system $\{f^\approx(U_\alpha) : \alpha \in A' \subset A\}$ has the finite intersection property we have that the system $\{f^\approx(U_\alpha) : \alpha \in A' \subset A\}$ has the finite intersection property too.

Corollary. Let regular spaces X and Y are co-absolute. Then $psh(X) = psh(Y)$.

References

- [1] Arhangel'skii A.V., Ponomaryov V.I. Bases of general topology In problems and exercises. Moscow, 1974.
- [2] Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. Basic constructions. Moscow. Phys.math.lit. 2006. 332 p.
- [3] Engelking R. General topology. Moscow: Mir, 1986, 752 p.

Quantization of states of the Dirac equation with radiative vacuum-polarization potential and new approach to calculating spectra of muonic systems

L. A. Vitavetskaya

(OSEN, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucvita@mail.ru

In last years a great interest attracts the study of the bound states energies of different exotic complex quantum systems such as hadronic, muonic atomic system etc. The correct treating spectra of these systems obviously requires a consistent account of the tiny radiative effects in the relativistic Dirac approximation. The standard approach to accounting for radiative corrections is the perturbation theory formalism on parameters $1/Z$, $\alpha \cdot Z$ (α is a fine structure constant). It permits evaluations of the relative contributions of different expansion energy terms as the functions of Z . However, the serious problems in this approach are connected with correct definition of the Lamb shift self-energy part, vacuum polarization contribution etc in a case of the heavy systems with large values of Z .

The main purpose of our work is to carry out new consistent procedure for quantization of states of the relativistic Dirac equation with directly introduced radiative vacuum-polarization potential of the Uehling type and present basis of a new theory and its application to calculating spectra of exotic complex quantum systems (muonic systems etc). As usually, the zeroth approximation is usually generated by the effective ab initio model functional, constructed on the basis of the gauge invariance principle. The zeroth order basis is generated by the solution of the Dirac equation with spherically symmetric potential that includes the nuclear, self-consistent field and vacuum-polarization potentials. Using the local properties of all potentials, the relativistic Dirac equation can be standardly written in the central field in a two-component form. The important advancement of our approach is connected with using the gauge invariant procedures of generating relativistic orbitals basis's [1] and more correct treating the radiative effects. As example of application of our approach we have carry out the numerical calculation of the energy eigen values spectra and eigen functions basis for the muonic hydrogen with a direct accounting of the radiative corrections. It is worth to present our final result for the corresponding Lamb shift correction (in meV), which is 202.06 ± 0.10 , which is in a reasonable agreement with the known Borie result 202.055 ± 0.12 [2]. It is important to note that the last result is obtained within the above cited expansion and surely this approach can not be used for studying the Lamb shift in more heavy and complicated systems than the muonic hydrogen. At the same time from the beginning our approach is non-perturbative and oriented on studying more heavy and complicated systems too [3].

References

- [1] A. V. Glushkov *Relativistic and Correlation Effects in Atomic Spectra.* - Odessa, Astroprint, (2006), 450p.
- [2] O. Yu. Khetselius, L. A. Vitavetskaya *The Lamb shift to energy transition in muonic hydrogen: Uehling correction.* - Photoelectr. 16: (2007), P. 65-68.
- [3] A. V. Glushkov, L. A. Vitavetskaya et al *Quantum theory of cooperative muon-N processes.* -// Recent Advances in Theor. Phys. and Chem. Systems, Ser. Progress in Theoretical Chem. and Phys. - Berlin, Springer. vol.15, (2006), P. 301-308.

**THE INTEGRABLE (2+1)-DIMENSIONAL GENERALIZATION OF
THE DISCRETE MODIFIED KORTEWEG-DE VRIES EQUATION
AND ITS BARGMANN TYPE INVARIANT REDUCTION**

O. Hentosh

(Inst. for Applied Problems of Mech. and Math., NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine)

E-mail address: ohen@ua.fm

By use of the hierarchies [1] of squared eigenfunction symmetries for the Lax type vector fields on the extended dual space to the Lie-algebra of the Laurent series by the usual shift operator \mathcal{E} the Lax integrable (2+1)-dimensional generalization of the discrete modified Korteweg-de Vries equation are obtained as the system of two evolutions

$$\begin{aligned} df_i/d\tau &= (-M_1^1 + \delta_1^i l) f_i, & df_i^*/d\tau &= (M_1^1 - \delta_1^i l) f_i^*, \\ df_i/dT &= (l_+^3 - M_1^3 + \delta_1^i l^3) f_i, & df_i^*/dT &= (-l_+^3 + M_1^3 - \delta_1^i l^3) f_i^*, \end{aligned} \quad (1)$$

where $l := \mathcal{E} + \sum_{i=1}^2 f_i \mathcal{E} (\mathcal{E} - 1)^{-1} f_i^*$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_1^*, f_2^*)^\top \in M^4 \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^4)$, the subscript "+" designates a projection of the corresponding operator on the Lie subalgebra of power series by the shift operator \mathcal{E} , δ_k^i , is a Kronecker symbol, $k \in \{1, 3\}$, $\tau, t \in \mathbb{R}$ are evolution parameters, and $M_1^s = \sum_{p=0}^{s-1} (l^p f_1) (\mathcal{E} - 1)^{-1} ((l^*)^{s-1-p} f_1^*)$, $s \in \{1, 3\}$, with the compatibility condition

$$dl_+^3/d\tau = [l_+^3, M_1^1]_+, \quad (2)$$

where $l_+^3 = \mathcal{E}^3 + w_2 \mathcal{E}^2 + w_1 \mathcal{E} + w_0$, $w_0, w_1, w_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$. Considering the eigenvalues $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ of the associated spectral problem

$$ly = \lambda y,$$

where $y \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}; \mathbb{C})$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ is a spectral parameter, as smooth by Frechet functionals on M^4 , one investigate the differential-geometric properties of the invariant with respect to the system (1)-(2) finite-dimensional Bargmann type subspace

$$M_N^4 = \{\mathbf{f} \in M^4 : \text{grad } \mathcal{L}_N[\mathbf{f}(n)] = 0\}, \quad \mathcal{L}_N = -\gamma_0 + \sum_{j=1}^N c_j \lambda_j,$$

where $\gamma_0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^2 f_i(n) f_i^*(n)$, is a local conservation law of the system (1)-(2), $c_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

By means of the Gel'fand-Dikii relationship [2] for differential forms on discrete manifolds the vector fields $d/d\tau$ and d/dT , reduced upon the submanifold $M_N^4 \subset M^4$, are shown to be Hamiltonian with respect to the exact canonical symplectic structure. The Lax representations for the reduced upon the subspace $M_N^4 \subset M^4$ vector fields are given by the monodromy matrix of the corresponding matrix spectral problem. Among the coefficients of the expansions of the traces of the monodromy matrix natural powers by poles one can choice the set of $3N$ functionally independent conservation laws, being involutive with respect the Poisson bracket, generated by the found symplectic structure. This set of conservation laws provides the Liouville integrability of the reduced vector fields $d/d\tau$ and d/dT .

References

- [1] O.Ye. Hentosh. Lax integrable differential-difference dynamical systems on extended phase spaces // *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, **6** (2010), 034, 14 pp., nlin.SI/1004.2945v1.
- [2] A. Prykarpatsky et al. Some remarks on Lagrangian and Hamiltonian formalisms related to the infinite-dimensional dynamical systems with symmetries // *Condensed Matter Physics*, **6** (1995) 79–104.

Geometry of a Chaos: New combined method for treating a deterministic chaos in complex systems

A. V. Glushkov

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: dirac13@mail.ru

V. M. Kuzakon

(ONAFТ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: kuzakon-v@ukr.net

G. A. Kuzakon

(ONAFТ, Odessa, Ukraine)

S. S. Seredenko

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

Every science purposes predicting a future state of system under consideration. Consequently, the main problem of science can be defined as: "Is it possible to predict a future behaviour of process using its past states?" Conventional approach applied to resolve this problem consists in building an explanatory model using an initial data and parameterizing sources and interactions between process properties. Unfortunately, that kind of approach is realized with difficulties, and its outcomes are insufficiently correct. According to modern theory of prediction, time series is considered as random realization, when the randomness is caused by a complicated motion with many independent degrees of freedom. Chaos is alternative of randomness and occurs in very simple deterministic systems. Although chaos theory places fundamental limitations for long-range prediction (see e.g. [1]), it can be used for short-range prediction since ex facte random data can contain simple deterministic relationships with only a few degrees of freedom.

Within a development of geometry of a chaos here We present new combined approach to treating a deterministic chaos in the complex systems, which includes new elements of advanced techniques such as the multi-fractal formalism, wavelet analysis, optimal propagators method, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbor algorithm, Lyapunov exponent's analysis, memories function formalism, surrogate data method etc [2]. As application of the method we have applied it to analyzing the signal's temporal series in modelling interactions in a few vibrational systems [3] and search of an existence of chaotic behavior in these systems. The correlation dimension and optimal propagators methods provide a low fractal-dimensional attractor thus suggesting a possibility of the existence of chaos. The method of surrogate data, for detecting nonlinearity, provides significant differences in the correlation exponents between the original data series and the surrogate data sets. The Lyapunov exponents analysis supports conclusion that the systems studied exhibits low-D chaos.

References

- [1] H. Schuste *Deterministic Chaos: An Introduction.*, - Wiley, N.-Y., (2005), 312p.
- [2] A. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*, - Odessa, OSENУ, (2013), 400p.
- [3] A. Glushkov, V. Kuzakon et al *Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on basis of temporal series analyses.*, - Dyn.Systems - Theory and Appl. 1, (2011), P.31-38.

Quantization of the quasistationary states for the Dirac-Slater equations and new optimized approach to calculating the beta-decay probabilities

Yu. V. Dubrovskaya

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucdubr@mail.ru

The purpose of the work is to develop a new effective numerical approach to problem of quantization of states of the relativistic Dirac-Slater [1] equations and further using the corresponding eigen function basis in the calculations of the permitted beta transitions by means of the golden Fermi-rule. A great importance should be turned on calculating the optimized sets of eigen functions and correspondingly eigen values. To provide and check fulfilling the gauge invariance in the optimized Dirac-Slater method we use method the QED gauge-invariant approach [2] and the York equalities. It should be noted the key features of our method, namely, the correlation effects are accounted for in the zeroth approximation by means introducing an additional correlation Gunnarsson-Lundqvist potential into the Dirac-Slater equations. The correction due to the finite size of a nucleus (the charge distribution in a nucleus is modelled within the homogeneous charged ball and Gauss models) is accounted for in the zeroth approximation of the perturbation theory in an electric and vacuum-polarization potentials, which are substituted to the Dirac-Slater equations (i.e. on the non-perturbative basis) [3]. As an example, it is carried out calculating the beta-decay parameters for a number of the permitted beta transitions. Calculation for superpermitted transitions has demonstrated good agreement between theory and experiment that is practically identical or better than in a case of the standard Dirac-Fock, Hartree-Fock atomic models and Coulomb approximation due to the fulfilling the gauge invariance condition (i.e. more accurate account for exchange-correlation effects). Calculation of the influence for the atomic self-consistent field type on the Fermi function shows that for little and intermediate values of nuclear charge Z a difference in the data, provided by different methods is quite little, however for big Z (for example, ^{241}Pu - ^{241}Am) it becomes quite significant (till a few percents in comparison with non-relativistic data). It's carried out a quantitative estimate of difference between values of the Fermi function under definition of by means of values of the radial electron wave functions on the boundary of a nucleus and by means of the squares of expansion amplitudes of radial wave functions for r near zero). It is shown that with a growth of Z a difference in values of the Fermi function, which are defined according to different methodics, is increased. The same conclusion is right for a behavior of the integral Fermi function, defined on the boundary of a nucleus and on the basis of amplitudes in zero.

References

- [1] J. Slater *Methods of self-consistent field in theory of molecules and solids.*- Wiley, (1974), 650p.
- [2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.
- [3] A. V. Glushkov, Yu. V. Dubrovskaya *QED theory of multiparticle Fermi systems.*- // Recent Advances in Theory of Phys. and Chem. Systems. Progress in Methods and Applications, Ser. Progress in Theoretical Chemistry and physics. - Berlin, Springer. vol.15, (2006), P. 301-328.

Dimension properties of some σ -pic-functors

T.F.Zhuraev

(Tashkent, TSPU)

E-mail address: tursunzhuraev@mail.ru

In the paper [1] a projectively inductively closed functors were defined (shortly, p.i.c.-functors).

Let $F : Tych \rightarrow Tych$ be a functor and $F^n \subset_{cl} F$, $n \in \omega$. We write that F is the union of F^n ($F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n$), if $F(X) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n(X)$ for every Tychonoff space X .

Definition. The functor $F : Tych \rightarrow Tych$ is said to be σ - p.i.c.-functor, if $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} (F^n)_{\beta}$, where F^n is p.i.c.-functor.

For example, the functor \exp_{ω} is σ - p.i.c.-functor

Theorem 1. If $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^n$ and each F^n is σ - p.i.c.-functor, then F is σ - p.i.c.-functor.

Theorem 2. For each n a functor P_n is σ - p.i.c.-functor.

Definition. A space X is called a (strongly)- Σ -space if there exists σ -discrete family N and such cover C of closed σ -compact subsets of the space X that from the openness of sets $c \in C$ and $c \subset U$ it implies that $c \subset F \subset U$ for $F \in N$.

Theorem 3. Let F be a p.i.c functor of finite degree and X be a paracompact Σ space. Then

$$\dim F_{\beta}(X) \leq k \dim X + \dim F(k)$$

Theorem 4. Let $F : Tych \rightarrow Tych$ be a σ - p.i.c.-functor of finite degree k , X be a paracompact Σ space and $F(X)$ is a normal space. Then

$$\dim F(X) \leq k \dim X + \dim F(k)$$

Corollary 1. Let $F : Tych \rightarrow Tych$ be a σ - p.i.c.-functor of finite degree k , X be a paracompact σ -space and $F(X)$ is a normal space. Then

$$\dim F(X) \leq k \dim X + \dim F(k)$$

Corollary 2. Let $F : Tych \rightarrow Tych$ be a σ - p.i.c.-functor of finite degree k , X be a stratifiable space and $F(X)$ is a normal space. Then

$$\dim F(X) \leq k \dim X + \dim F(k)$$

References

- [1] T.F.Zhuraev. On paracompact spaces and projectively inductively closed functors. Applied General Topology V.3. № 1, 2002, pp. 33-44.

Geometry of Bounded Fréchet Manifolds

K. Eftekharinasab

E-mail address: kaveheft@gmail.com

In the suggestive paper [1], it was defined the notations of bounded Fréchet manifolds and bounded (or MC^k) maps between Fréchet spaces. In this paper we defined tangent bundle and second order tangent bundle for these manifolds in the sense of Yano and Ishihara; taking into account that in this setting the group of automorphisms has a topological group structure, we proved that bounded Fréchet tangent bundles are vector bundles. This fact permits us to define a connection via a connection map which is impossible to define for proper Fréchet manifolds.

Dodson and Galanis [2] proved that in the cases of Banach manifolds and those Fréchet manifolds which can be obtained as projective limit of Banach manifolds, in the presence of a linear connection the second order tangent bundle is a vector bundle. We obtain the similar result for bounded Fréchet manifolds. Moreover, culminating with these constructions, one can define vector fields, second order vector fields and sprays. We proved the existence and uniqueness of the integral curve of a vector field. Let M be a bounded Fréchet manifold madolled on a Fréchet space F and let TM be its tangent bundle. The results formulated in the following theorems:

Theorem TM admits a vector bundle structure over M with fiber of type F and structure group $\text{Aut}(F)$.

Theorem The second order tangent bundle T^2M of M becomes vector bundle if and only if M admits linear connection.

Theorem Let $\xi : M \rightarrow TM$ be a vector filed. Then there exits an integral curve for ξ at $p \in M$. Furthermore, any two such curves are equal on the intersection of their domains.

It turned out with some exceptions (those facts which negatively influenced by the lack of a general solvability theory of ordinary differential equations) many results of the geometry of Banach manifolds can be worked out for bounded Fréchet manifolds. We should mention why these manifolds are important. The formulated approach which leads to construct such manifolds provides valuable tools to obtain new results which would be impossible to prove for proper Fréchet manifolds. For example, in [3] it was obtained the Sard's theorem and as we shall see we are able to define local geometric structures such as linear connection via a connection map. The defined connection for proper Fréchet manifolds does not imply that the Christoffel symbol $\Gamma_\alpha : \varphi_\alpha(U_\alpha) \rightarrow L(F \times F; F)$ is a tensor field. Therefore, we need stronger definition (via a connection map) to prove that the curvature and torsion are tensors.

References

- [1] O. Müller, A metric approach to Fréchet geometry, *Journal of Geometry and physics* **58** (2008), 1477-1500. C.T.J. Dodson, Some recent work in Fréchet geometry, *Balkan J. Geometry and Its Applications* **17** (2012), 6-21.
- [2] C.T.J. Dodson and G.N. Galanis, Second order tangent bundles of infinite dimensional manifolds, *J. Geom. Phys.* **52** (2004), 127-136.
- [3] K. Eftekharinasab, Sard's theorem for mappings between Fréchet manifolds, *Ukrainian Math. J.* **64** (2010), 1634-1641.

Quantization of the states for the Schrödinger equation with a crossed electric and magnetic field potential

A. S. Kvasikova

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantkva@mail.ru

A new approach to quantization of the states for the Schrödinger equation with a crossed electric and magnetic field potential is developed within the operator perturbation theory (OPT) [1]. New numerical approach has been carried out to calculating the energy eigen values and eigen functions of the energies, Stark resonances widths and probabilities of transitions between Stark and Zeemane sublevels for atomic system in the crossed DC electric and magnetic fields. According to the OPT [2], the zeroth order Hamiltonian in the Schrödinger equation with a crossed electric and magnetic field potential is defined by the set of the orthogonal eigen values and eigen functions without specifying the explicit form of the corresponding zeroth order potential. It allows to overcome the formal and numerical difficulties. The OPT smallness parameter is of the order of G/E , where G and E are the field width and the characteristic eigen values of energy. We have proven a theorem that G/E remains less than $1/n$ even in the vicinity of the "new continuum" boundary (n is the principal quantum number). It should be reminded that perturbation in the OPT does not coincide with the electric (or magnetic) field potential, though they disappear simultaneously.

As example of application, we present the calculation results for the energy eigen values of the ground state for hydrogen in the dc electric and magnetic fields [3]. For comparison there are also listed the results of the ground state energy eigen values obtained on the basis of the Turbiner's standard perturbation theory SPT (look, for example, review in [2]). Analysis shows that the both results are in the reasonable agreement, at least till the field strengths values 0.04 atomic units. Further in a case more strong field it begins to increase the difference between our theory data and the SPT results. It is important underline that our results are obtained in the first PT order, i.e. already the first PT order provides the physically reasonable results. From the one hand, for weak field strength values an excellent agreement between both approaches can be easily explained. From the other hand, the standard PT formalism falls in a case of consideration the strong electric or magnetic or both simultaneously fields. Our theory is absolutely valid in a case of the strong DC electric field due to using the OPT formalism as the zeroth approximation.

References

- [1] A. V. Glushkov, L. N. Ivanov *Consistent quantum approach to DC strong field Stark effect.*- Journ. Phys. B. (UK) 26: 16, (1993), P. L379-386.
- [2] A. V. Glushkov *Atom in electromagnetic field: Numerical models.*- KNT, Kiev, (2005), 450p.
- [3] A. S. Kvasikova et al *Spectroscopy of the hydrogen in the crossed dc electric and magnetic field.*- Photoelectr. 20: (2011), P. 71-75.

Quantization of states of the relativistic Dirac equation with a non-singular potential and calculation of the parity non-conservation amplitudes in finite Fermi-systems

O. Yu. Khetselius

(OSENu, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nuckhet@mail.ru

A problem of quantization of the quasistationary states for the relativistic Dirac equation with the singular or non-singular nuclear potentials is of a great importance in treating different many-body problems of the constructive mathematical and theoretical physics, differential geometry etc. our interest is provided by a necessity of solving a problem of the eigen-values spectrum and eigen-functions for an effective relativistic Hamiltonian of the finite heavy many-body Fermi-systems and further application to quantitative treating hyperfine structure parameters of these systems and description of the electroweak interactions with calculating the corresponding weak amplitudes for transition, in which a parity non-conservation effect takes a place.

In our work a new constructive approach to quantization of the bound and quasistationary (scattering) states of the relativistic Dirac equation with a non-singular (singular) potential is proposed. Further we develop a new approach to calculating the radiative and weak amplitudes of the transitions with parity non-conservation, provided by e-N electroweak interaction [1]. Our new approach is based on the combined relativistic mean field model and relativistic gauge-invariant many-body perturbation theory with using the optimized one-quasiparticle representation [2]. The correction due to the finite size of a nucleus is accounted for in the relativistic Dirac equation (zeroth approximation of the perturbation theory) in the electric and vacuum-polarization potentials on the non-perturbation basis. The charge distribution in a nucleus is modelled within the relativistic mean field model. The effectiveness of the quantization procedure and correctness of the one-quasiparticle representation (zeroth relativistic Dirac approximation) are checked on example of accurate calculating parity non-conserving dipole amplitudes for a number of the finite heavy Fermi-systems. A theorem, providing reconstruction of the conservation effect, has been proven.

New approach is applied in calculating the hyperfine structure parameters, parity non-conservation radiative amplitudes for a set of the heavy finite Fermi-systems with accounting of exchange-correlation, Breit, weak e-e interactions, radiative and nuclear (magnetic moment distribution, finite size, neutron "skin") corrections, nuclear-spin dependent corrections due to anapole moment, Z-boson ((AnVe) current) exchange, combined hyperfine and Z boson exchange ((VnAe) current) interactions. The weak charge is determined for a number of the heavy systems and comparison with the corresponding Standard model data is performed. Finally, we present an application of a new method to description of the cooperative e-g-nuclear processes in the heavy finite Fermi-systems and calculating the corresponding decay amplitudes with using the optimized bases of the Dirac equation eigen functions.

References

- [1] O. Yu. Khetselius *Quantum structure of electroweak interaction in heavy finite Fermi-systems.*, - Odessa, Astroprint, (2011), 452p.
- [2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*, - Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Submanifolds in locally decomposable Riemannian manifolds

Koji Matsumoto and Zerrin Şentürk

Yonezawa, Yamagata, Japan
Istanbul Technical University, Istanbul, Turkey

E-mail addresses: tokiko_matsumoto@yahoo.com and senturk@itu.edu.tr

Recently, B. Sahin researched submanifolds in a locally product Riemannian manifold and gave a very interesting results.

In this talk, we recall a locally decomposable Riemannian manifold with an almost constant curvature and a semi-slant submanifold of an almost product manifold. Then, we consider the length of the second fundamental form and the mean curvature of a semi-slant submanifold in a locally decomposable Riemannian manifold with an almost constant curvature. Finally, we consider a semi-slant submanifold with the parallel second fundamental form in a locally decomposable Riemannian manifold with an almost constant curvature.

References

- [1] A. Bejancu *CR-submanifolds of a Kaehler manifold I, II*, Proc. Amer. Math. Soc., 69 (1978), 134–142 and Trans. Amer. Math. Soc., 250 (1979), 333–345.
- [2] B.Y, Chen *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, New York (1973),
- [3] B. Kirik, F. Ö. Zengin *On nearly quasi-Einstein manifolds*, to appear.
- [4] K. Matsumoto *On submanifolds of locally product Riemannian manifolds*, TRU Math., 18-2 (1982), 145–157.
- [5] B. Sahin, *Slant submanifolds of an almost product Riemannian manifold*, J. Korean Math. Soc., 43,4 (2006), 717–732.
- [6] B. Sahin *Warped product semi-slant submanifolds of locally product Riemannian manifolds*, Bull. Math.Soc. Sci. Math. Roumanie, 49, (2006), 383–394.
- [7] B. Sahin *Warped product semi-slant submanifolds of a locally Riemannian product mani-*, Studia Sci. Math. Hungarica 46 (2) (2009), 169–184.
- [8] K. Yano *Differential Geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, (1965).

Covariant second order relativistic mechanics

R. Ya. Matsyuk

(IAPMM, L'viv, Ukraine)

E-mail address: romko.b.m@gmail.com

In a (pseudo)Riemannian manifold M we give a covariant and coordinate-homogeneous description of the second order Ostrohrads'kyj mechanics, in the case where the integral curves are invariant under the changes of the dynamical parameter along them.

Let us recall the definition of the Liouville form on $T^*(TM)$,

$$\Lambda = p \cdot dx + p^{(1)} \cdot du,$$

and the definition of the Legendre map,

$$Le: T^3M \rightarrow T^*(TM) \quad \text{over} \quad TM$$

$$\varphi^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} p^{(1)} \circ Le = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}},$$

$$\varphi \stackrel{\text{def}}{=} p \circ Le = \frac{\partial L}{\partial u} - D_\tau \varphi^{(1)},$$

where D_τ denotes the total derivative, $D_\tau = u \frac{\partial}{\partial x} + \dot{u} \frac{\partial}{\partial u} + \ddot{u} \frac{\partial}{\partial \dot{u}}$.

A function $L(x, u, \dot{u})$, defined on T^2M , constitutes a parameter-ambivalent variational problem $\delta \int L d\tau = 0$ if and only if it satisfies the Zermelo conditions:

$$\mathcal{Z}_1 \stackrel{\text{def}}{=} u^\alpha \varphi^{(1)}_\alpha = 0, \tag{Z_1}$$

$$u^\alpha \varphi_\alpha + \dot{u}^\alpha \varphi^{(1)}_\alpha - L = 0.$$

Following Grässer, Rund, and Weyssenhoff, we present the system of generalized canonical equations for the second order autonomous and parameter-ambivalent variational problem in the form

$$Le^{-1} i_X d\Lambda = -\lambda Le^{-1} dH - \mu dZ_1, \tag{*}$$

where the function $Z_1 = p^{(1)}_n u^n$ is well defined and along the Legendre map it gives rise to the first of Zermelo conditions (Z_1) , $Le^{-1} Z_1 = \mathcal{Z}_1$. The functions λ and μ are some undetermined multipliers and the symbol Le^{-1} denotes the reciprocal image with respect to the map Le of the succeeding differential form.

We introduce the following change of variables in the phase space:

$$\Phi: \begin{cases} \pi^{(1)}_n = p^{(1)}_n \circ \phi^{-1} \\ \pi_n = p_n \circ \phi^{-1} - \Gamma^l_{mn} u^m p^{(1)}_l \circ \phi^{-1} \end{cases}$$

Proposition 1. *Let H depend on $(x, u, \pi, \pi^{(1)})$ through the quantities $\gamma = u \cdot u$, $\eta = \pi^{(1)} \cdot \pi^{(1)}$, $\psi = \pi \cdot u$, $\nu = \pi^{(1)} \cdot u$, $\pi \cdot \pi$, $\pi^{(1)} \cdot \pi$. In this case the exterior differential equation (*) is equivalent to the following system of ODEs (the prime denotes the covariant derivative)*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= u, \\ u'^n &= \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)^{-1} \left[2 \frac{\partial H}{\partial \eta} g^{nk} \pi^{(1)}_k + \frac{\partial H}{\partial \nu} u^n \right] + \mu u^n, \\ \pi'_n &= -R_{nkm}{}^l u^m u^k \pi^{(1)}_l, \\ \pi^{(1)'}_n &= - \left(\frac{\partial H}{\partial \psi} \right)^{-1} \left[2 \frac{\partial H}{\partial \gamma} u_n + \frac{\partial H}{\partial \nu} \pi^{(1)}_n \right] - \pi_n - \mu \pi^{(1)}_n. \end{aligned}$$

FOLIATIONS DEFINED BY CLOSED DIFFERENTIAL 1-FORM

A. Ya. Narmanov, S. S. Saitova

(Department of geometry of National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan)

E-mail address: narmanov@yandex.ru

Subject of present paper is the geometry of foliation defined by closed 1-form on compact manifold of constant curvature. In paper everywhere smoothness of manifolds, foliations and maps is a class C^∞ .

It is known that leaves of foliation F on compact manifold M given by closed form ω , are mutually diffeomorphic [3]. Also It is known there is a riemannian metric g on manifold M , such that foliation F is a riemannian foliation of (M, g) [5]. Remind that foliation F is called a riemannian foliation if every geodesic orthogonal at some point to a leaf of foliation F remains orthogonal to leaves of F at all points. Riemannian foliation were investigated by Reinhart first [4].

Foliation F on riemannian manifold is called totally geodesic if every geodesic tangent to a leaf of foliation at at one point lies on this leaf. It means every leaf is a totally geodesic submanifolds. Geometry of geodesic foliation was researched in works [1],[2],[6].

The following Theorem shows that leaves of riemannian foliation on smooth connected compact riemannian manifold (M, g) of constant nonnegative curvature are isometric.

Theorem. Let (M, g) be a smooth connected compact riemannian manifold of constant non-negative curvature. If F is riemannian foliation defined by closed form ω then F is a total geodesic foliation with isometric leaves.

Corollary 1. Under the conditions of the theorem M is the manifold of constant zero curvature.

Corollary 2. Under the conditions of the theorem the fundamental group of each leaf of foliation F isomorphic to the group $A \subset \pi_1(M)$.

Actually restriction $p_1 : \tilde{L} \rightarrow L$ of covering map $\tilde{p} : \tilde{M} \rightarrow M$ to the leaf \tilde{L} of foliation \tilde{F} is the covering map, where L is the leaf of F .

As the manifold \tilde{M} diffeomorphic to the direct product $\tilde{L} \times R^1$, where \tilde{L} is any level surface of function f , fundamental group $\pi_1(\tilde{L})$ is isomorphic to $\pi_1(\tilde{M})$ [1]. Here follows the statement of Corollary 2.

Example. Consider the differential form $\omega = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$, where a_1, a_2, \dots, a_n are real numbers. This form induce the differential form on n -dimensional torus $T^n = R^n / Z^n$, where Z is the set of integers. Equation $\omega = 0$ defines the foliation F codimension one on T^n . If rang of numbers $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ over the set of rational numbers is equal to k , then group $A \subset \pi_1(M)$ is the $Z + Z + \dots + Z$, here $n - k$ summands.

References

- [1] Blumenthal R., Hebda J. Ehresman connections. //Indiana Math.J., V.33. No.4 -1984, pp. 597-611.
- [2] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fiber bundle //Proc. Amer. Math. Soc. 11. 1960. P. 236-242.
- [3] Imanishi H. On the Theorem of Denjoy-Sackteder for Codimension one foliations without Holonomy. - J. Math. Kyoto Univer. 14, 3, 1974, pp. 607-634.
- [4] Reinhart B. Foliated manifolds with bundle-like metrics, - Ann. of Math. 69 (1959), 119-132.
- [5] Sackteder R. Foliations and Pseudogroups. -American J.Math.87, 1965, pp.79-102.
- [6] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds, -Springer.: Verlag, 1988.

Matter from Toric Geometry and its Search at the LHC

T.V. Obikhod

(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, 03068 Kiev, Ukraine)

E-mail address: obikhod@kinr.kiev.ua

Toric geometry is applied for construction the enhanced gauge groups in F-theory [1] compactified on elliptic Calabi-Yau fourfolds [2, 3]. The Hodge numbers calculated from the polyhedra for the chain $H = SU(1), \dots, SU(5), SO(10), E_6, E_7$ determine the number of tensor multiplets, vector multiplets and hypermultiplets of solitonic states that appear from singularities of elliptic fibration. Due to duality between the compactification of $E_8 \times E_8$ heterotic string and the type IIA string compactification on a Calabi-Yau manifold [4] there is a natural sequence of E-group embeddings which gives the matter content of Minimal Supersymmetric Standard Model and the possibility of searching for supersymmetry at the LHC.

References

- [1] C. Vafa, *Evidence for F-theory*, arXiv: hep-th/9602022.
- [2] D. R. Morrison and C. Vafa, *Compactifications of F-theory on Calabi-Yau threefolds (I)*, Nucl. Phys. **B473** (1996) 74.
- [3] D. R. Morrison and C. Vafa, *Compactifications of F-theory on Calabi-Yau threefolds (II)*, Nucl. Phys. **B476** (1996) 437.
- [4] P. Candelas and A. Font, *Duality Between the Webs of Heterotic and Type II Vacua*, arXiv: hep-th/9603170.

One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane.

E. Polulyakh

(IM NANU, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: polulyah@imath.kiev.ua

A function $f(z)$ is *pseudo-harmonic at a point* $p \in \mathbb{R}^2$ if there exist a neighborhood $U(p)$ and a homeomorphism φ of $U(p)$ onto open unit disk in the plane such that $\varphi(p) = 0$ and $f \circ \varphi^{-1}(z)$ is harmonic and is not constant (see [1]).

A function f is called *pseudo-harmonic in the plane* if it is pseudo-harmonic at all its points (see [1]).

Let T be a tree, finite or infinite. Denote by V_0 the set of all vertices of T of degree 1.

Let S^2 be a 2-sphere. We fix a point $s \in S^2$.

A continuous mapping $\Phi : T \rightarrow S^2$ is *plane* if it complies with the following properties:

- (i) $\Phi^{-1}(s) = V_0$;
- (ii) the set $\Phi(T) \cup \{s\}$ is closed in S^2 ;
- (iii) $\Phi|_{T \setminus V_0} : T \setminus V_0 \rightarrow S^2$ is the homeomorphism onto its image.

A continuous mapping $\Psi : T \setminus V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is *plane*, if there exist a plane mapping $\Phi : T \rightarrow S^2$ and a homeomorphism $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2 \setminus \{s\}$ such that

$$\Psi = \psi^{-1} \circ \Phi|_{T \setminus V_0}.$$

Let us consider a finite forest $T = T_1 \sqcup \dots \sqcup T_n$ (a finite disjoint union of trees).

A continuous mapping $\Psi : T \setminus V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ is *plane* if all mappings $\Psi_i = \Psi|_{T_i \setminus V_0} : T_i \setminus V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ are plane, and also $\Psi(T_i \setminus V_0) \cap \Psi(T_j \setminus V_0) = \emptyset$ for $i \neq j$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Theorem 1. *Assume that degree of every vertex of a finite forest T either is 1 or is an even number greater than 2.*

Let $\Psi : T \setminus V_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ be a plane mapping.

Then there exists a pseudo-harmonic function $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, such that $\Psi(T \setminus V_0) = f^{-1}(0)$.

References

- [1] M. Morse, *Topological methods in the theory of functions of a complex variable*. Annals of Mathematics Studies, No. 15. Princeton University Press, Princeton, N. J., (1947), 145 pp.

Principal components and wavelet analysis of complex chaotic geophysical signals: New numerical algorithm

A. V. Romanova

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `quantrom@mail.ru`

An advanced technique based on the joint use of principal component method and the wavelet analysis has been developed to analysis and treating nonlinear geophysical spatially-temporal signals. The combined principal component and wavelet analysis allows combining the possibility to reveal the spatial features of the former and to reveal the temporal ones by the latter. Our algorithm includes the wavelet decomposition for analyzing various signals series according to the methodic [1]. The non-decimated wavelet transform that has temporal resolution at coarser scales and allows to isolate time series of the major components of financial sets a direct way is used. Besides, generalized non-conservative finite-differences scheme method has been developed to solve the corresponding atmosphere general dynamics equations. It is based on the earlier developed generalized non-conservative finite differences scheme for the task of propagating a laser pulse in a non-linear medium [2].

As application we have studied a number of geophysical systems, which are characterized by directly manifested chaotic properties. For example, a new algorithm has been applied to analysis of the different geophysical patterns such as the whether ones, the ozone concentration spatially-temporal distribution etc. Our numerical analysis has quantitatively shown that the changes in weather patterns (over the Eastern Europe) occur coherently. It has been numerically discovered a direct link between the presence of the so-called blocking anticyclone processes in the North Atlantic and its absence over Ukraine. It has been found that that the so-called NAO impacts dominantly spatiotemporal variability of European total ozone content at synoptic time and spatial scales.

References

- [1] A. V. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*- Odessa, OSENУ, (2013), 400p.
- [2] A. V. Ignatenko, A. V. Romanova et al *Generalized non-conservative difference scheme in tasks of non-linear mediumds.*- Bulletin of OSENУ. 14: (2012), P. 229-233

Sums of Hermitian f -structures on homogeneous Φ -spaces of order k

A. S. Samsonov

(BSU, Minsk, Belarus)

E-mail address: Andrey.S.Samsonov@gmail.com

Hermitian f -structures is one of the main classes in the *generalized Hermitian geometry* field (see, for example, [1]). The class **Hf** is defined by $T(X, Y) = 0$ condition where T is *composition tensor* explicitly evaluated in [1]:

$$T(X, Y) = \frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY - \nabla_{f^2X}(f)f^2Y),$$

where ∇ is the Levi-Civita connection of (pseudo)Riemannian manifold (M, g) , $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Let's point the recent fact concerning Hermitian f -structures on (pseudo)Riemannian manifolds. It was found that any *base canonical f -structure* [2] f_i on arbitrary *homogeneous Φ -spaces* of any order k (*homogeneous k -symmetric spaces* in the other terminology) with the special set of metrics belongs to the class **Hf** iff $3i \neq k$ or $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{h}$ [3]. Investigation of the algebraic sums of these structures f_i is an extension of the pointed fact. Let us formulate preliminary information (for example, see necessary references in [3]) and the discovered theorem.

Let G/H (G is a connected Lie group) be a homogeneous Φ -spaces of order k . Denote by \mathfrak{g} and \mathfrak{h} Lie algebras for G and H respectively. The canonical reductive decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ corresponding to the automorphism $\varphi = d\Phi_e$ can be represented as

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_0 \oplus \mathfrak{m}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{m}_u,$$

where $u = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$, some of \mathfrak{m}_i can be trivial. Any canonical f -structure can be represented as

$$f = (\zeta_1 J_1, \dots, \zeta_s J_s),$$

where J_1, \dots, J_s ($s = \lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor$) are specially defined almost complex structures ($J_i^2 = -1$) on $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_s$, $\zeta_i \in \{-1; 0; 1\}$, $i = \overline{1, s}$, $f|_{\mathfrak{m}_u} = 0$ for even k . The structure f is denoted by f_i (i.e. f_i is the base canonical f -structure) if subspace \mathfrak{m}_i isn't trivial, $\zeta_i = 1$ and other $\zeta_j = 0$.

Let's consider now the set of G -invariant Riemannian metrics on a homogeneous Φ -spaces G/H of order k in the case of semisimple compact Lie algebra \mathfrak{g} with Killing form B . Using the well known bijective correspondence between the G -invariant metrics and the $Ad(H)$ -invariant inner products on the canonical reductive complement \mathfrak{m} let take the next family:

$$\langle X, Y \rangle = \lambda_1 B(X_1, Y_1) + \dots + \lambda_u B(X_u, Y_u),$$

where $X, Y \in \mathfrak{g}$, $i = \overline{1, u}$, $X_i, Y_i \in \mathfrak{m}_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\lambda_i < 0$. New results are formulated in

Theorem 1. *Consider a homogeneous Φ -space $M = G/H$ of order k with the pointed metric $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ and arbitrary base canonical f -structures f_v, f_w, f_z on M , with $v > w > z$. The structure $f_v + f_w + f_z$ is of class **Hf** if and only if for each triple (i, j, t) from the set $\{(v, w, z), (v, z, w), (w, z, v)\}$ the conditions below simultaneously hold:*

- 1) $2i + j \neq k$ and $i + 2j \neq k$ and $3t \neq k$ or $[\mathfrak{m}_t, \mathfrak{m}_t] \subset \mathfrak{h}$.
- 2) $2i + j \neq k$ and $i + 2j \neq k$ and $i + j + t \neq k$ or $[\mathfrak{m}_i, \mathfrak{m}_j] \subset \mathfrak{m}_{i-j}$.

The author is grateful to Vitaly V. Balashchenko for helpful discussions and recommendations related to this article.

References

- [1] V. F. Kirichenko *Quasi-homogeneous manifolds and generalized almost Hermitian structures.*- Math. USSR, Izv. 23, (1984), P. 473-486.
- [2] V. V. Balashchenko, N. A. Stepanov *Canonical affinor structures of classical type on regular Φ -spaces.*- Sbornik: Mathematics. 186: 11, (1995), P. 1551-1580.
- [3] A. S. Samsonov *Nearly Kähler and Hermitian f -structures on homogeneous Φ -spaces of order k with the special metrics.*- Sib. Math. Journal. 52: 6, (2011), P. 904-915.

Quantum defect method to many-body systems: New procedure of quantization and calculation of the eigen values for highly excited states

T. B. Tkach

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantper@mail.ru

We present a new analytical and (numerical) approach to quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the Dirac equation within a one-channel quantum defect approximation. There is an essential difference between the task on the eigen values and eigen functions for the bound and continuum states. The general method includes the optimized relativistic model potential and quantum defect approximation combined with the energy approach and many-body perturbation theory with zeroth order optimized 1-particle representation [1]. The key feature of the presented theory is an implementation of the relativistic model potential (quantum defect approximation) to the frames of the gauge-invariant relativistic energy formalism for studying spectral parameters of Rydberg many-body systems. At first, we have formulated a consistent relativistic quantum defect on the gauge-invariant basis. Let us note that usually the most exact version of the relativistic quantum defect approximation is provided by using the empirical data in order to determine the quantum defect values for different states. New approach has allowed to generalize the general theory of quantum defect and get a new ab initio optimized scheme, satisfying a principle of minimization for the gauge dependent radiative contributions to imaginary part of energy of the system for the certain class of the photon propagator calibration.

As object of studying we have calculated different parameters for the highly excited states of a number of atomic systems, namely, the lithium- and beryllium-like ones. There are calculated eigen values of an energy and oscillator strengths of the different transitions from ground state to the low-excited and Rydberg states. The comparison of calculated oscillator strengths with available theoretical and experimental (compiled) data is performed [2] and demonstrates an consistency and effectiveness of our new approach.

References

- [1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory*, - Odessa, Astroprint, (2008), 700p.
- [2] A. V. Loboda, T. B. Tkach *Generalized energy approach in an electron-collisional spectroscopy of multicharged ions*, - Journ. of Phys. C Ser. 397: 1, (2012), P. 012027 (6p.)

Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac-Fock equation and new approach to calculating the forbidden radiative transition probabilities

T. A. Florko

(OSEN, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantflo@mail.ru

Usually the multi-configuration Hartree-Fock and Dirac-Fock approaches are used in calculations of the energy eigen values and different spectral parameters for many-body atomic systems. Though these approaches provide the most reliable version of calculation, nevertheless, as a rule, detailed description of the method for studying role of the gauge-invariant contributions and more tiny radiative corrections is lacking. Serious problems are connected with correct definition of the high-order correlation corrections etc. The further improvement of this method is connected with using the gauge invariant procedures of generating relativistic orbital basis's and more correct treating the above cited effects [1]. Especially a serious difficulties are arisen under consideration and calculation of the key characteristics for so called forbidden transition in atomic systems.

Here we present a new gauge-invariant version of the relativistic many-body perturbation theory approach with optimized Dirac-Fock zeroth approximation to description of the forbidden radiative transitions characteristics in spectra of the heavy atomic systems. We have presented an improved procedure for quantization of the stationary and quasi-stationary states for the corresponding Dirac-Fock equations and developed new precise scheme for calculating the forbidden radiative transition probabilities [2]. New scheme is based on the relativistic energy approach and gauge-invariant QED perturbation theory (PT) formalism with using the optimized one-quasi-particle representation and precise accounting for the exchange-correlation effects [3]. There are carried out the calculations of energy eigen values and eigen functions, probabilities and oscillator strengths for the radiative transitions in spectra of a number heavy atomic systems and performed a detailed comparison with available alternative theoretical and experimental data for the cited systems. has been performed studying of the asymptotic properties of the eigen functions and numerical features of the corresponding radiative transition integrals.

References

- [1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.
- [2] T. A. Florko *Quantum geometry: new numerical approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Fock equation.*- Proc.Int.Geometry Center. 5: 3, (2010), P. 32-38.
- [3] A. V. Glushkov, T. A. Florko et al *Optimized perturbation theory scheme for calculating the interatomic potentials and hyperfine lines shift.*- Int.J. Quant. Th. 109: 4, (2009), P. 3325-3332.

Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation and new approach to calculating the dielectronic satellites spectra

Yu. G. Chernyakova

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantche@mail.ru

A new approach to quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the Dirac equation for many-body (N-body) quantum (atomic) systems is developed. The new method is based on ab initio version of the quantum electrodynamics perturbation theory for the N-quasi-particle systems with using comprehensive, gauge invariant relativistic orbital basis's generation scheme [1] and effective procedure of the Fano-Byorke type for calculating the perturbation operator matrix elements for N-quasi-particle states and with accurate accounting the complex correlation effects. The recurrence relationships between the three-body and two-body matrix elements have been obtained. It has been proven a theorem establishing a link between gauge non-invariant contributions into the matrix elements and quality of the eigen functions basis of the corresponding Dirac operator.

New approach is applied in calculation of the characteristics for dielectronic satellites of spectral lines for multicharged ions. New spectral data have been obtained for characteristics Na-like satellite lines within a full relativistic perturbation theory [1] calculation. An effective procedure for theoretical modelling the dielectronic satellites spectra of multicharged ions is carried out and applied to modelling spectra of Na-like multicharged ions and others. This scheme is based on using obtained relativistic, gauge-invariant calculation data and statistical procedure of accounting line intensity distribution for transitions between configurations with great number of lines [2]. It is more exact in comparison with widely used schemes on basis of data by the multi-configuration Dirac (Hartree)- Fock calculation and especially effective under studying complex configurations, where it is realized an intermediate case and spectrum is linear-striped one.

References

- [1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*, - Odessa, Astroprint, (2008), 700p.
- [2] Yu. G. Chernyakova et al *Estimating the tokamak parameters by means high resolution theoretical spectroscopy method.*, - Photoelectr. 19: 1, (2010), P. 107-110.

Quantization of states of the relativistic Klein-Gordon-Fock equation and calculation of spectra of the pionic systems

A. N. Shakhman

(OSENУ, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantsha@mail.ru

The work is devoted to development of a new procedure for quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the relativistic Klein-Gordon-Fock equation in application to pionic atomic systems and calculation of the spectra, radiative corrections, hyperfine structure parameters for these systems. Our new approach is ab initio, relativistic method allowing to carry out a consistent calculation of the spectra for pionic systems with an account of relativistic, nuclear, radiative effects within the gauge-invariant QED perturbation theory in version [1]. The analytical and numerical estimates regarding a quantitative link between a consistence of the quantization procedure, a quality of the nucleus structure modeling and accuracy of calculating energy and spectral properties of systems have been received. The wave functions zeroth basis is found from the relativistic Klein-Gordon-Fock equation. The potential includes the self-consistent ab initio potential, the electric and polarization potentials of a nucleus plus some other potentials for accounting of more tiny effects (such as exchange-correlation ones etc). In order to make modelling a nuclear charge distribution in a nucleus the Gauss model has been used. Within the method of differential equations [1], the corresponding nuclear potential is found as solution of the differential equations system. The energy shift is connected with a length of the pion-nuclear scattering (scattering amplitude for zeroth energy). It has been proven a theorem establishing a link between a quality wave functions zeroth basis and value of the gauge non-invariant contribution to energy.

As application of the approach, the data on energy characteristics (transition energies and probabilities) of the different transitions group in the pionic systems, including estimating the values of the strong pion-nuclear interaction energy levels shifts and widths, defining the corrections due to the e-screening, vacuum polarization, relativistic recoil effects etc are presented and compared with available other theoretical and experimental results [2]. It is considered an advanced approach to redefinition of the pion-nucleon phenomenological optical model potential parameters and increasing an accuracy of the hadronic transitions energies definition.

References

- [1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.
- [2] A. Deloff *Fundamentals in Hadronic Atom Theory.*- Singapore, World Sci., (2003), 352p.

Holonomic space of projective Cartan's connection

Yu. I. Shevchenko

(I.Kant BFU, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: Eskrydlova@kantiana.ru

We consider n -dimensional smooth manifold M_n with Laptev's structure equations

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta_j^i \quad (i, \dots = \overline{1, n}).$$

After prolongation we obtain

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \omega^k \wedge \theta_{jk}^i,$$

besides according to Laptev's lemma the following condition holds

$$\theta_{jk}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{[jk]}^i \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

which is written as follows:

$$\theta_{[jk]}^i = \lambda_{jkl}^i \omega^l; \quad \lambda_{(jk)l}^i = 0, \quad \lambda_{[jkl]}^i = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\{jkl\}}^i = 0,$$

where square brackets denote alternation, round brackets — symmetrisation, and curly brackets — cycling. In the general case, when $\lambda_{jkl}^i \neq 0$, we will say about semiholonomic smooth manifold M_n . In the special case, when $\lambda_{jkl}^i = 0$, we call M_n a holonomic smooth manifold ${}^H M_n$.

The structure equations of the space of projective Cartan's connection $P_{n,n}$ we rewrite as follows:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad D\omega_i = \omega_j^i \wedge \omega_j + R_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k,$$

$$D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l,$$

besides the components of curvature-torsion tensor $R = \{S_{jk}^i, R_{jkl}^i, R_{ijk}\}$ satisfy differential comparisons

$$\Delta S_{jk}^i \equiv dS_{jk}^i + S_{jk}^l \omega_l^i - S_{lk}^i \omega_j^l - S_{jl}^i \omega_k^l \cong 0 \quad (\text{mod } \omega^i),$$

$$\Delta R_{jkl}^i - \delta_j^i S_{kl}^m \omega_m - S_{kl}^i \omega_j \cong 0, \quad \Delta R_{ijk} + R_{ijk}^l \omega_l \cong 0.$$

1. The tensor of projective curvature-torsion R contains the tensor of affine curvature-torsion $\{S_{jk}^i, R_{jkl}^i\}$, which includes torsion tensor S_{jk}^i .

2. Three analogues of Ricci-Bianchi identities are invariant in the space $P_{n,n}$ only in the case of real torsion $S_{jk}^i = \frac{1}{n-1}(\delta_j^i S_k - \delta_k^i S_j)$, where S_k is a tensor.

3. The space $P_{n,n}$ with the real torsion is a semiholonomic n -dimensional smooth manifold.

4. In the space without torsion $P'_{n,n}$ ($S_k = 0$) the tensor of projective curvature-torsion R degenerates into the tensor of center-projective curvature $\{R_{jkl}^i, R_{ijk}\}$, which contains the tensor of affine curvature R_{jkl}^i .

5. The vanishing of non-holonomicity tensor $R_{[jk]}^i$ distinguishes the holonomic space ${}^H P'_{n,n}$.

Макс Айзикович Акивис. К 90-летию со дня рождения.....	6
Марченко Володимир Олександрович. В связи с 90-летием со дня рождения.....	9
Пастур Леонід Андрійович. В связи с 75-летием со дня рождения.....	13
Иджад Хакович Сабитов . В связи с 75-летием со дня рождения.....	14
Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова А-деформации та безмоментний напружений стан рівноваги циліндричної оболонки.....	17
Б. І. Івануса Топологічна еквівалентність гладких функцій на колі.....	18
М. Л. Гаврильченко, В. А. Кіусак Про конформні відображення на простори Ейнштейна.....	19
Я. П. Кривко Особливості геометричної складової зовнішнього незалежного тестування абітурієнтів з математики.....	20
К. О. Легка, І. В. Лазутіна Прості атоми степені 4 і 5.....	21
А. В. Лобчук Топологічна еквівалентність функцій на прямій.....	22
Т. Ю. Подоусова, Л. Л. Безкоровайна Про перший чебишевський вектор LGT-сітки.....	23
І. В. Потапенко Характеристика деформуючого поля при інфінітезимальних деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду.....	24
В. М. Прокіп Розв'язність лінійних матричних рівнянь над областю головних ідеалів.....	25
О. Г. Савченко Ідемпотентні міри на K -ультраметричних просторах.....	26
С. В. Федорук Топологічна еквівалентність морсівських відображень кола в коло.....	27
Ю.С. Федченко Про нескінченно малі конформні деформації поверхонь обертання.....	28
О. В. Амброзьяк Использование эвристических приемов в процессе формирования геометрических понятий.....	29
А. В. Аминова, М. Х. Люлинский О вычислении кривизны сферически симметричного суперпространства в системе $\mathbb{R}^{16,00}$	30

М. В. Антипова Примеры эластичных восьмимерных тканей Бола с тензором кривизны минимального ранга.....	31
А. В. Аристархова Геометрия псевдо-конформно-плоских почти контактных метрических многообразий.....	32
Е. Б. Балакирева Каноническая в пространстве аффинной связности группа.....	33
Л. Л. Безкоровайная О свойствах пятерки замечательных сетей	34
В. Березовский, Й. Микеш О частном случае канонических почти геодезических отображений первого типа пространств аффинной связности, при которых сохраняется тензор Римана.....	35
И. Ю. Власенко Структурно устойчивые внутренние отображения.....	36
Д. В. Вылегжанин Обобщенные почти эрмитовы структуры на однородных многообразиях.....	37
Г. Д. Гегамян О вложении шестимерной групповой три-ткани с тривиальной сердцевиной в три-ткань Муфанг.....	38
Д. Гольцов Полусвободное S^1 -действие и отображения Ботта в окрестность.....	39
М. Ф. Гребенюк Связности тангенциально-вырожденной поверхности.....	40
К.Р. Джукашев Эластичные три-ткани.....	41
В. В. Дикусар, Н. Н. Оленев Билинейные системы оптимального управления.....	42
М. В. Добик F-планарные отображения римановых пространств с квази-симплектической структурой.....	43
Я. М. Дымарский, Ю. Евтушенко Топологические свойства семейства периодических краевых задач.....	44
З. Х. Закирова О некоторых псевдоримановых пространствах, допускающих проективные движения.....	45
Е. С. Запутряева Изгибания плоских многоугольников с сохранением индекса.....	46

К. М. Зубрилин Уплощающие свойства полного лифта инфинитезимального проективного преобразования, относительно горизонтального лифта аффинной связности.....	47
М. И. Кабанова Канонические уравнения неголономной $(n + 1)$ -ткани	48
О. Е. Арсеньева, В. Ф. Кириченко Эрмитовы аспекты геометрии пространств постоянной кривизны.....	49
Н. Г. Коновенко О проективно инвариантных вариационных задачах.....	50
Е. С. Корнев Обобщенные римановы метрические структуры.....	51
В. М. Кузаконь Обобщенные структуры.....	52
А. В. Кулешов Об одном проективном инварианте семейства гиперплоских элементов с огибающей поверхностью центров.....	53
И. Н. Курбатова Об одном типе диффеоморфизмов римановых пространств.....	54
Маматов М.Ш., Махмудова Д.М., Темуров С.Ю. Поисковые геометрические задачи в развитии самостоятельного аналитического и творческого мышления студентов.....	55
Маматов М.Ш., Ташманов Е.Б., Алимов Х.К. Дифференциальные игры преследования многих лиц с распределенными параметрами и геометрическими ограничениями.....	56
А. Д. Милка Проблемы жесткости выпуклых полиэдров	57
А. А. Михеева О сердцевине шестимерной эластичной три-ткани E_2	58
Л. Л. Безкоровайная, В. А. Москалик Теорема об ареальной бесконечно малой деформации скольжения.....	59
Ю. А. Аминов, Я. С. Наседкина О поверхностях F^2 из E^n их индикатрисе и принадлежности пространству E^4	60
О. М. Омелян О Пучках связности 1-го и 2-го типа на семействе центрированных плоскостей, обобщающем поверхность.....	61
Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов, В. В. Славский В.В., О. П. Хромова О спектре оператора кривизны конформно (полу)плоских левоинвариантных римановых метрик групп Ли малых размерностей	62
В. И. Паньженский, О. П. Сурина Финслеровы деформации римановых метрик	63

Покась С. М., Крутоголова А. В. Бесконечно малые проективные преобразования римановых пространств второго приближения.....	64
Покась С. М., Цехмейструк Л. Г. Об одном классе полусимметрических римановых пространств.....	65
А. О. Пришляк, Е.Н.Вятчанинова Топология функций с изолированными критическими точками на границе трехмерного тела.....	66
Ю. С. Резникова Однородные и неоднородные самоподобные фрактальные множества.....	67
Рылов А.А. Кривизна некоторых моделей информационной геометрии.....	68
И. Х. Сабитов Нежесткие поверхности вращения с уплощениями в полюсах.....	69
И. Х. Сабитов Новые интегральные формулы для кривых и многоугольников на плоскости.....	70
В. М. Савельев Квадратичное представление плоских кривых.....	71
С. Самохвалов Реализация эрлангенской программы для римановых пространств	72
Г. А. Серякин О построении 4-мерных нелоренцевых h -пространств.....	73
Е. Н. Синюкова О голоморфно-проективных отображениях в целом некоторых специальных классов келеровых пространств.....	74
О. Т. Сисюк Геометрические объекты, инвариантные относительно квази-геодезических отображений римановых пространств с симплектической структурой.....	75
В. И. Субботин Выпуклые многогранники с изолированными симметричными гранями.....	76
Г. А. Толстихина О сердцевине некоторой четырехмерной три-ткани Бола параболического типа.....	77
А.Ф. Турбин Совершенный мегаоктаэдр И.Ньютона-Л.Шлефли.....	78
А.Ф. Турбин, Ю.Д. Жданова Геометрический синтез в действии.....	79
В. Т. Фоменко Непрерывные изгибания овалоида с дыркой при условии обобщенной втулочной связи.....	80

Ю. С. Хомич, Л. А. Гармашова Единственность регулярных замкнутых выпуклых поверхностей.....	81
В. Х. Кирилов, Н. П. Худенко Определение области устойчивости ламинарного течения пленки жидкости.....	82
Е. Е. Чепурная Инфинитезимальные конформные преобразования, сохраняющие тензор Эйнштейна.....	83
Е. В. Черевко Конформные отображения и сохранение некоторых геометрических объектов.....	84
И. Г. Шандра Конциркулярные тензорные поля и геодезические отображения.....	85
В. В. Шарко О топологической эквивалентности функций.....	86
Ю. В. Шарко (Юніна) Квантування другого методу Ляпунова.....	87
А. М. Шелехов Классификация правильных универсальных тождеств длины 4 в гладкой лупе.....	88
В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов Обобщенные структуры на гладких многообразиях.....	89
А. М. Шелехов, Е. А. Оноприенко О три-тканях Бола с ковариантно постоянным тензором кривизны.....	90
В. В. Шурыгин Голоморфные геометрические объекты на трансверсальных расслоениях.....	91
О. В. Якимчук, В. М. Кузаконь Конциркулярное векторное поле на локально конформно-келеровом многообразии.....	92
L. E. Bazylevych, M.M. Zarichnyi Planar pairs of convex sets of constant relative width.....	93
V. V. Balashchenko Canonical structures and distributions on homogeneous k-symmetric spaces.....	94
Beshimov R.B., Mukhamadiev F.G. The predshandin number and absolute of regular spaces.....	95
L. A. Vitavetskaya Quantization of states of the Dirac equation with radiative vacuum-polarization potential and new approach to calculating spectra of muonic systems.....	96
O. Hentosh The integrable (2+1)-dimensional generalization of the discrete modified korteweg-de vries equation and its bargmann type invariant reduction.....	97

A. V. Glushkov, V. M. Kuzakon, G. A. Kuzakon, S. S. Seredenko Geometry of a Chaos: New combined method for treating a deterministic chaos in complex systems.....	98
Yu. V. Dubrovskaya Quantization of the quasistationary states for the Dirac-Slater equations and new optimized approach to calculating the beta-decay probabilities	99
T.F.Zhuraev Dimension properties of some σ -pic-functors.....	100
K. Eftekharinasab Geometry of Bounded Frechet Manifolds.....	101
A. S. Kvasikova Quantization of the states for the Schrödinger equation with a crossed electric and magnetic field potential.....	102
O. Yu. Khetselius Quantization of states of the relativistic Dirac equation with a non-singular potential and calculation of the parity non-conservation amplitudes in finite Fermi-systems.....	103
Koji Matsumoto and Zerrin Şentürk Submanifolds in locally decomposable Riemannian manifolds.....	104
R. Ya. Matsyuk Covariant second order relativistic mechanics.....	105
A.Ya.Narmanov,S.S.Saitova Foliations defined by closed differential 1-form	106
T.V. Obikhod Matter from Toric Geometry and its Search at the LHC.....	107
E. Polulyakh One note on level sets of pseudo-harmonic functions in the plane.....	108
A. V. Romanova Principal components and wavelet analysis of complex chaotic geophysical signals: New numerical algorithm.....	109
A. S. Samsonov Sums of Hermitian f -structures on homogeneous Φ -spaces of order k	110
T. B. Tkach Quantum defect method to many-body systems: New procedure of quantization and calculation of the eigen values for highly excited states.....	111
T. A. Florko Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac-Fock equation and new approach to calculating the forbidden radiative transition probabilities.....	112
Yu. G. Chernyakova Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation and new approach to calculating the dielectronic satellites spectra.....	113

A. N. Shakhman	
Quantization of states of the relativistic Klein-Gordon-Fock equation and calculation of spectra of the pionic systems.....	114
Yu. I. Shevchenko	
Holonomic space of projective Cartan's connection.....	115

ИТБ ОНАХТ