

В.Т. Швець

**Теорія ймовірностей
у прикладах і задачах**

Одеса 2023

ББК 22.161я73

УДК 517(0.75.8)

Швець Валерій Тимофійович

Теорія ймовірностей у прикладах і задачах

Одеса. В електронному вигляді, 2023 - 155 с.

Навчальний посібник є продовженням навчального посібника: «Теорія ймовірностей, математична статистика та випадкові процес». Він містить велику кількість прикладів застосувань основних принципів теорії ймовірностей до розв'язання конкретних задач з різних областей знань. Тут і теоретична фізика, і теорія інформації, економічна теорія, і соціологічні дослідження тощо. Складність розглянутих задач не дозволяє розмістити їх у базову курсі теорії ймовірностей. Проте їх актуальність створює додаткову мотивацію для засвоєння основних принципів теорії. Розглянуті задачі відповідають програмам різних прикладних дисципліни технічних вузів і їх розв'язання на високому теоретичному рівні полегшує розуміння цих дисциплін. Посібник розрахований на студентів та аспірантів технічних вузів.

Автор:

доктор фіз.-мат. наук, проф. В.Т.Швець

Рецензенти:

доктор фіз.-мат. наук, проф. Козицький С. В.

доктор фіз.-мат. наук, проф. Лепіх Я. І.

доктор фіз.-мат. наук, проф. Щерба І. Д.

Оглавление

Вступ	4
1.Закон великих чисел	5
2.Центральна межова теорема	12
3.Формула повної ймовірності.....	23
4.Модель одновимірного випадкового блукання.....	27
5.Ентропія	30
6. Розподіл Больцмана.....	36
7.Розподіл Максвелла	41
8.Інформація та ентропія	47
9.Мікроканонічний і канонічний розподіли	56
10.Роль флуктуацій для фізичних систем	60
11.Статистика багатства. Показниковий розподіл.....	63
12.Статистика багатства. Канонічний розподіл	71
13.Модель Ізинга. Формування суспільної думки	76
14.Інформаційна ентропія і свобода вибору	85
15.Формул влади і вибори в Україні	98
16.Статистики Фермі і Бозе.....	103
17.Ідеальний класичний газ.....	110
18.Термодинаміка ідеального класичного газу	116
19.Розподіл хі-квадрат	119
20.Пуассонівський процес.....	121
21.Рівняння Смолуховського	124
22.Процес Орнштейна-Уленбека	128
23.Закон розподілу неприємностей	132
Математичні додатки.....	135
1.Інтеграл Пуассона-Гауса	135
2.Фур'є-образ одновимірного розподілу Гауса	136
3.Фур'є-образ хвильової функції	143
4.Фур'є-образ тривимірного нормального розподілу.....	146
5. Розподіл Бернуллі і нормальний розподіл	150
Література:	153

Вступ

Ідеологія теорії ймовірностей є базовою для математичного світогляду сучасного інженера. Вона абсолютно адекватна складності світу, у якому ми живемо. Принципи теорії ймовірностей знаходять застосування практично у всіх технічних дисциплінах. Кількість застосувань цієї теорії у нових напрямках людської діяльності і людського знання неупинно зростає. Проте більшість технічних дисциплін ще не адаптували в себе в необхідній мірі методи теорії ймовірностей, математичної статистики та випадкових процесів. Метою даного навчального посібника є показати ефективність застосування теорії ймовірностей у самих різних областях людської діяльності. Крім традиційних областей, зроблена спроба застосувати цю теорію і у таких областях, де раніше методи теорії ймовірностей не використовувались.

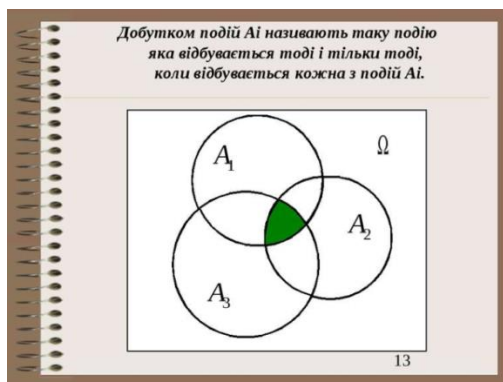
Навчальний посібник фактично є продовження традиційного курсу теорії ймовірностей математичної статистики та випадкових процесів, виданого автором раніше. Він базується на матеріалі цього курсу, але не дублює його. Вважається, що читач знайомий з засадничими ідеями курсу. Ці ідеї і принципи застосовуються до різноманітних задач, що звичайно не містяться в традиційних навчальних посібниках з різних причин, зокрема через їх складність. Оскільки даний навчальний посібник розрахований на поглиблене вивчення теорії ймовірностей, то він містить деякі базові теореми теорії ймовірностей разом з їх доведенням.

1. Закон великих чисел

Закон великих чисел і центральна межава теорема є ідеологічним фундаментом сучасної теорії ймовірностей і різноманітних застосувань, її філософською основою. Саме вони перетворюють теорію ймовірностей у цілісну науку з єдиним ідейним стрижнем. Тому саме з них ми починаємо наш навчальний посібник.

Закон великих чисел описує поведінку середнього арифметичного n випадкових величин для $n \rightarrow \infty$. Він також пов'язує межове значення цього середнього з математичним очікуванням кожної з випадкових величин. Закон великих чисел має декілька формулювань. Конкретне формулювання залежить від наявної інформації про кожну з випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Фактично закон великих чисел моделює ситуацію з вимірюванням довільної величини ξ , де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ є результатами окремих її вимірювань, які, у свою чергу, зручно вважати випадковими величинами. Закон обґрунтовує і деталізує той факт, що збільшуючи кількість вимірювань (число n) ми, як правило, уточнюємо інформацію про невідому величину ξ . Він стверджує, що в міру зростання n середнє арифметичне результатів окремих вимірювань перестає бути випадковою величиною і у межі $n \rightarrow \infty$, за певних умов, дає нам точне значення вимірюваної величини. Характерною ознакою закону великих чисел є аналіз не самих відхилень певної випадкової величини від її межового значення, а ймовірностей цих відхилень. Це цілком природно для випадкової величини, оскільки зазначені відхилення можуть бути довільними, але ймовірність малих відхилень – велика, а великих відхилень – мала.

Отже закон великих чисел можна сформулювати так: при зростанні обсягу вибірки ймовірність того, що вибіркове середнє не відрізняється від математичного очікування прямує до одиниці.



**Характерною рисою теорії ймовірностей є її базування на теорії множин.
Сама ймовірність є числовою функцією множини**

Найпростіший варіант закону великих чисел виникає тоді, коли всі випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ однаково розподілені, попарно незалежні і мають скінчені дисперсії, тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\xi} - a|) = 1.$$

Тут

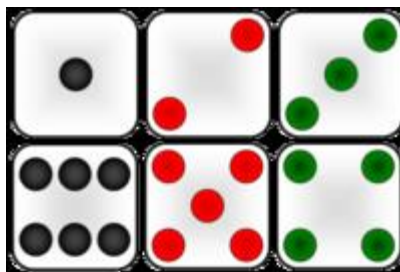
$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

– середнє арифметичне всіх випадкових величин, $M \xi_k = a$. Величина $\bar{\xi}$ ще називається вибіркоvim середнім. Даний варіант закону великих чисел можна сформулювати і так. За зазначених вище умов із зростанням обсягу вибірки n вибіркoве середнє прямує до математичного очікування випадкової величини ξ , як до своєї межі, тобто

$$M \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\xi}.$$

Складніший варіант закону великих чисел виникає, якщо всі випадкові величини попарно незалежні, але мають свій конкретний закон розподілу з математичним очікуванням $M \xi_k$ і дисперсією $D \xi_k$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\xi} - \overline{M \xi}|) = 1,$$



Простір елементарних подій – максимально можлива множина, що характеризує даний випадковий експеримент, у разі підкидання грального кубика один раз. Будь-яка подія є підмножиною простору елементарних подій. Дії над множинами трансформуються у дії над ймовірностями.

де $\bar{\xi}$ – середнє арифметичне випадкових величин, а $\overline{M\xi}$ – середнє арифметичне їх математичних очікувань

$$\overline{M\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k.$$

Закон великих чисел аналізує ситуацію для $n \rightarrow \infty$. Як бути, коли n скінчене? Як оцінити ймовірність відхилень значень випадкової величини від свого математичного очікування? Відповідь на ці запитання можна отримати за допомогою відповідної властивості дисперсії, а саме

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}.$$

Цю нерівність легко отримати, якщо розглянути означення дисперсії

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 P_{\xi}(x) dx.$$

Інтеграл доцільно представити сумою трьох інтегралів

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\mu - \alpha\sigma} (x - \mu)^2 P_{\xi}(x) dx + \int_{\mu - \alpha\sigma}^{\mu + \alpha\sigma} (x - \mu)^2 P_{\xi}(x) dx + \int_{\mu + \alpha\sigma}^{\infty} (x - \mu)^2 P_{\xi}(x) dx.$$

Якщо середній інтеграл праворуч опустити, то рівність перетвориться у нерівність



Закон великих чисел (підкидання симетричного кубика). За велику кількість підкидань середнє число, що випадає при цьому прямує до числа $3.5=(1+2+3+4+5+6)/6$.

$$\sigma^2 \geq \int_{-\infty}^{\mu-\alpha\sigma} (x-\mu)^2 P_{\xi}(x) dx + \int_{\mu+\alpha\sigma}^{\infty} (x-\mu)^2 P_{\xi}(x) dx.$$

Цю нерівність можна підсилити, якщо врахувати, що $(x-\mu)^2 \geq \alpha^2 \sigma^2$. Дійсно, на верхній межі першого інтегралу $(x-\mu)^2 = \alpha^2 \sigma^2$, а для менших значень x виконуватиметься зазначена нерівність. Аналогічно на нижній межі другого інтегралу виконуватиметься рівність, а для більших значень x знову виконуватиметься нерівність. Отже,

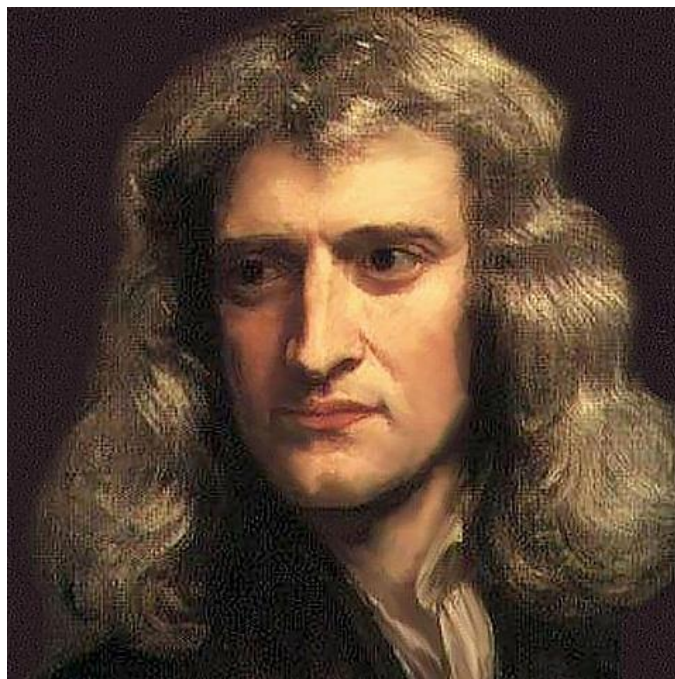
$$\sigma^2 \geq \alpha^2 \sigma^2 \left[\int_{-\infty}^{\mu-\alpha\sigma} P_{\xi}(x) dx + \int_{\mu+\alpha\sigma}^{\infty} P_{\xi}(x) dx \right].$$

Зауважимо, що кожний з інтегралів є ймовірністю приналежності значень випадкової величини області його інтегрування,

$$\sigma^2 \geq \alpha^2 \sigma^2 \left[P(-\infty \leq \xi \leq \mu - \alpha\sigma) + P(\mu + \alpha\sigma \leq \xi \leq \infty) \right]$$

або

$$\sigma^2 \geq \alpha^2 \sigma^2 \left[P(-\infty \leq \xi - \mu \leq -\alpha\sigma) + P(\alpha\sigma \leq \xi - \mu \leq \infty) \right].$$



Ісаак Ньютон

(1643-1727)

Геніальний англійський науковець, засновник вищої математики і теоретичної фізики

Суму ймовірностей можна записати як одну ймовірність з комбінованим аргументом або

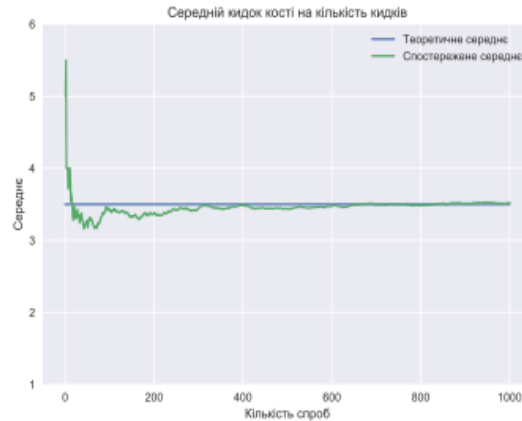
$$\sigma^2 \geq \alpha^2 \sigma^2 P(|\xi - \mu| \geq \alpha \sigma)$$

$$\varepsilon = \alpha \sigma,$$

$$P(|\xi - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

Звідси і випливає вихідна нерівність, яка ще називається нерівністю Чебишева.

Нерівність Чебишева можна використати для доведення закону великих чисел. Для цього конкретизуємо середнє квадратичне відхилення, що входить у



Прямуювання середнього арифметичного до математичного очікування із зростанням обсягу вибірки

нерівність, застосованого для вибіркового середнього $\bar{\xi}$ і, очевидно, для

вибіркової дисперсії σ^2 / n

$$P(|\bar{\xi} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Ця нерівність означає, що ймовірність великих відхилень вибіркового середнього від математичного очікування зменшується при зростанні обсягу вибірки. Оскільки сума ймовірностей малих і великих відхилень є достовірною подією

$$P(|\bar{\xi} - \mu| \geq \varepsilon) + P(|\bar{\xi} - \mu| < \varepsilon) = 1,$$

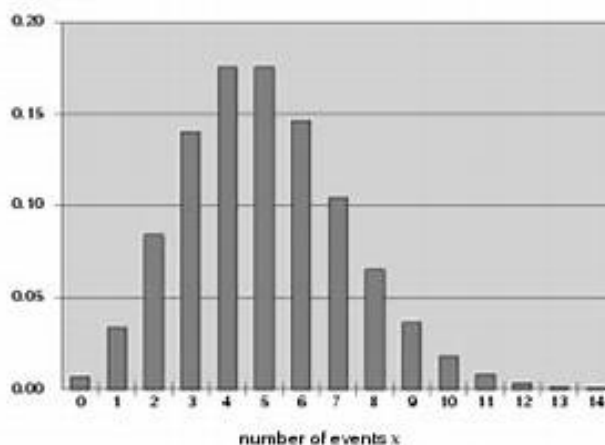
то

$$P(|\bar{\xi} - \mu| < \varepsilon) = 1 - P(|\bar{\xi} - \mu| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

Якщо спрямувати обсяг вибірки до нескінченості

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{\xi} - \mu| < \varepsilon) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \right) = 1,$$

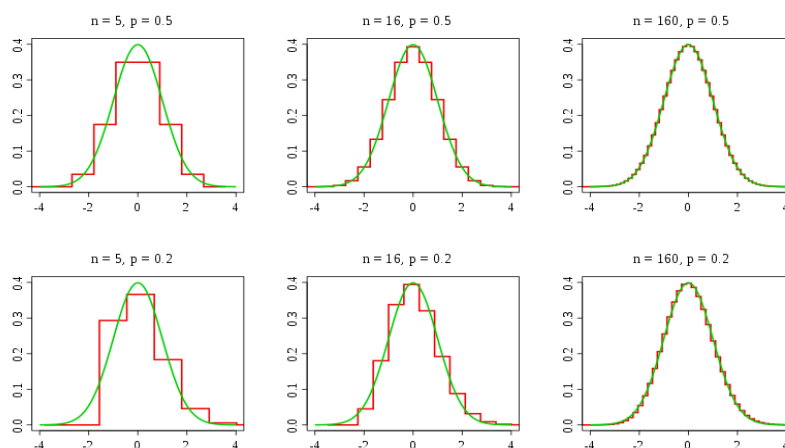
то ми і отримаємо стандартне формулювання закону великих чисел.



Можлива густина розподілу ймовірностей (гістограма), отримана експериментально.

Закон великих чисел широко використовується у повсякденному житті при інтерпретації статистичних даних, що стосуються великих людських спільнот. Наприклад, 30% людей певної країни знаходяться на межі бідності. Яка ймовірність того, що навмання взята людина знаходиться за межею бідності?

За умовою доля бідних людей у населенні країни дорівнює ймовірності P взятій навмання людини опинитись за межею бідності. Кількість бідних людей тоді буде добутком кількості населення, помноженій на зазначену ймовірність. 30% або доля бідного населення 0.3 за результатами соціологічних досліджень є результатом дослідження майнового стану скінченої кількості населення. Це може бути або частина населення, або і все населення країни. У першому разі ця доля є певним вибіркоvim середнім. Звичайно населення країни нараховує мільйони громадян. Якщо мова йде про дослідження частини населення, то мова йде про тисячі або й десятки тисяч громадян. Отже, за такого обсягу вибірки, вибіркoве середнє не може суттєво відрізнитись від ймовірності, тобто $p=0.3$.



Центральна межова теорема (підкидання симетричної монети). Із зростанням кількості випробувань експериментальна ступінчаста гістограма прямує до нормального розподілу.

2.Центральна межова теорема

Якщо закон великих чисел визначає межове значення вибіркового середнього, то центральна межова теорема визначає поведінку вибіркового середнього, як випадкової величини, в околі цього межового значення.

Варіантів центральної межової теореми багато, але головна ідея всіх цих варіантів полягає в тому, що в околі межового значення для вибіркового середнього його поведінка стає універсальною. Тобто, незалежно від того, за яким законом були розподілені окремі доданки суми, аби дисперсія була скінченною, їх середнє арифметичне буде розподілене за нормальним законом. Наведемо одне з формулювань центральної межової теореми.

Теорема. Якщо випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ незалежні, однаково розподілені і мають скінчену дисперсію, то для $n \rightarrow \infty$ рівномірно за x , тобто одночасно для всіх x ,

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy.$$



Карл Гаус

(1777-1855)

Геніальний німецький математик. Його ім'я носить найважливіший закон розподілу випадкової величини

Це означає, що функцією розподілу випадкової величини $\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}}$ буде стандартний нормальний розподіл. Тут

$a = M(\xi_1) = M(\xi_2) = \dots = M(\xi_n)$ - математичне очікування кожної з випадкових величин, $\sigma^2 = D(\xi_1) = D(\xi_2) = \dots = D(\xi_n)$ - дисперсія кожної з випадкових величин.

Випадкова величина $\xi = \left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - a \right) \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}$ - це відхилення вибіркового середнього від математичного очікування, виміряне в одиницях середньоквадратичного відхилення для тої самої вибірки. Розглянута випадкова величина має нульове математичне очікування і одиничну дисперсію. Дійсно,

$$M(\xi) = M\left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a\right) \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}\right) =$$



Поль Дірак

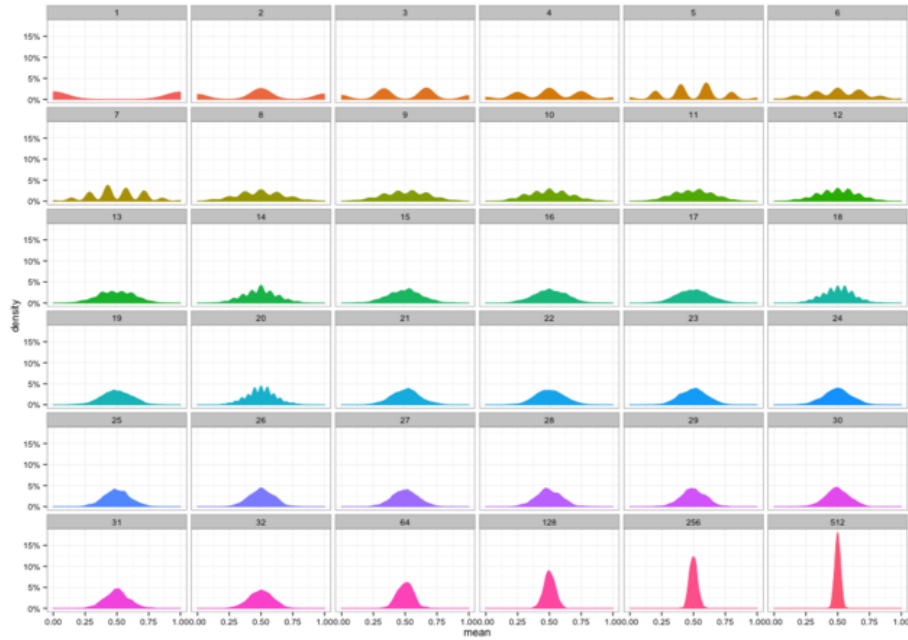
(1902-1984)

***Геніальний англійський фізик-теоретик – засновник сучасної
релятивістської квантової механіки, базованої на статистичному описі
поведінки мікрочастинок***

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n M(\xi_i) - M(na) \right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{i=1}^n a - na \right) = 0, \\
 D(\xi) &= D \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a \right) \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) = \\
 &= M \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a \right)^2 \frac{1}{\sigma^2/n} \right) - \left[M \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a \right) \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}} \right) \right]^2 = M \left(\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i - a \right)^2 \frac{1}{\sigma^2/n} \right).
 \end{aligned}$$

Після піднесення до квадрату для дисперсії матимемо

$$D(\xi) = \frac{1}{\sigma^2/n} M \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j - 2a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i + a^2 \right) =$$



Симуляція із використанням біноміального розподілу. Було згенеровано випадкові 0-і та 1-і, а потім їх середнє розраховано для різних розмірів вибірки від 1 до 512. Можна помітити, як із збільшенням розміру вибірки хвости стають тоншими, а розподілення значень все більше концентруються довкола середнього.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sigma^2/n} \left(\frac{1}{n^2} M \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j - 2a \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M \xi_i + Ma^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{\sigma^2/n} \left(\frac{1}{n^2} M \sum_{i,j=1}^n \xi_i \xi_j - a^2 \right) = \frac{1}{\sigma^2/n} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1(i \neq j)}^n M(\xi_i \xi_j) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n M(\xi_i^2) - a^2 \right)
 \end{aligned}$$

Незалежність випадкових величин означає, що

$$M(\xi_i, \xi_j) = M(\xi_i)M(\xi_j) = a^2,$$

Тому

$$\begin{aligned}
 D(\xi) &= \frac{1}{\sigma^2/n} \left(\frac{n(n-1)}{n^2} a^2 + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n M(\xi_i^2) - a^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{\sigma^2 n} \left(\sum_{i=1}^n M(\xi_i^2) - na^2 \right) =
 \end{aligned}$$

Місце нормального закону в біометричному аналізі

ЦЕНТРАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА (Лаплас, 1812 р.)



Один із основних постулатів ЦГТ :

...закон розподілу суми великого числа нормованих випадкових доданків (= розподілів) практично поза залежністю від типу розподілу самих доданків наближається у міру росту числа доданків до нормального (гаусівського) розподілу

$$= \frac{1}{\sigma^2 n} \left(\sum_{i=1}^n [M(\xi_i^2) - [M(\xi_i)]^2] \right) = \frac{1}{\sigma^2 n} \left(\sum_{i=1}^n D(\xi_i) \right) = 1.$$

Центральну межову теорему можна записати і для густини нормального або Гаусівського розподілу

$$P_{\xi}(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\xi^2 / 2)$$

або

$$P_{\bar{\xi}}(x) \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{\xi} - a)^2}{2\sigma^2/n}\right).$$

Тут

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i$$

вибіркове середнє. Нижче ми наведемо доведення центральної межової теореми. При цьому ми використаємо ту обставину, що кожна випадкова величина однозначно задається трьома еквівалентними способами: через функцію розподілу, через повний набір моментів випадкової величини –

Християн Гюйгенс (1629 – 1695 р.р.)



- Нідерландський вчений, математик, астроном і фізик. Автор однієї з перших праць з теорії ймовірностей “О розрахунках в азартних іграх” (1657 р.)

початкових або центральних і через твірну або характеристичну функцію моментів. Якщо ми маємо вибірку, складену з незалежних рівноправних випадкових величин, то для твірної функції, складеної з початкових моментів, твірна функція суми таких випадкових величин буде добутком твірних функцій окремих випадкових величин

$$M_z(t) = [M_{w/n}(t)]^n.$$

Тут випадкова величина Z є середнім арифметичним n однаково розподілених випадкових величин W_i з довільним законом розподілу, тобто вибіркоvim середнім

$$z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i.$$

Кожна з цих випадкових величин має наступну структуру

$$w_i = \frac{\xi_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n}},$$

тобто є випадковою величиною з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією, але лише у разі, якщо закон розподілу є нормальним.

Абрахам де Муавр (1667-1754 р.р.)



•Англійський математик

Його робота “Аналітична суміш” опублікована в 1730 р.

В цій роботі вперше була сформульована і доведена центральна гранична теорема теорії ймовірності.

Твірна функція початкових моментів у загальному випадку є математичним очікуванням наступної випадкової функції

$$\exp\left(\frac{w_i}{n}t\right) = 1 + \frac{w_i}{n}t + \frac{1}{2!}\left(\frac{w_i}{n}\right)^2 t^2 + \dots + \frac{1}{m!}\left(\frac{w_i}{n}\right)^m t^m + \dots,$$

тобто

$$M_{w_i/n} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)t\right) P_{w_i/n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) dx_i.$$

При цьому жодних обмежень на функцію розподілу, крім скінченності дисперсії, ми не робимо. Якщо замість випадкової функції взяти її розвинення у ряд Маклорена, то

$$M_{w_i/n} = \sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \frac{t^m}{m!}.$$

Тут

$$\mu_m = \frac{1}{n^{m/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^m P_{w_i/n}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right) dx_i$$

Якоб Бернуллі (1656-1705 р.р.)



• Швейцарський математик, фізик, астроном.

Його робота “Мистецтво припущення” була опублікована в 1713 р.

В цій роботі вперше була доведена гранична теорема теорії ймовірності – закон великих чисел.

початкові моменти відповідної випадкової величини. При цьому, нульовий момент – це просто умова нормування густини розподілу і він дорівнює 1. Перший момент дорівнює нулю, другий момент

$$\mu_2 = \frac{1}{n^2}.$$

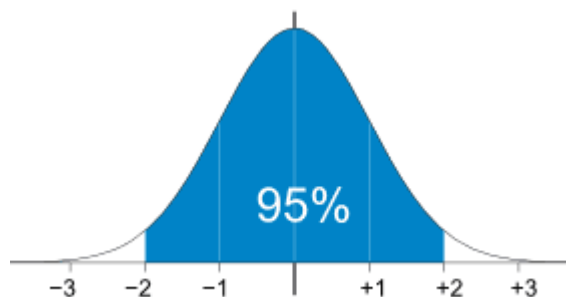
Кожний наступний момент містить у знаменнику додатковий множник – корінь квадратний з порядку моменту. Отже, твірну функцію можна записати так

$$M_{w_i/n} = 1 + \frac{1}{2!n} t^2 + \dots$$

Відповідно

$$M_z(t) = \left[1 + \frac{1}{2!n} t^2 + \dots \right]^n.$$

Якщо спрямувати обсяг вибірки до нескінченості, то можна обмежитись лише виписаними членами, і ми отримаємо наступний результат



Густина нормального або Гаусівського розподілу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_z(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2!n} t^2 \right]^n = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Але така твірна функція є твірною функцією нормально розподіленої випадкової величини з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією. Отже випадкова величина z розподілена саме за таким законом. Вибіркове середнє пов'язане з цією випадковою величиною лінійним співвідношенням

$$\bar{\xi} = \frac{\sigma z}{\sqrt{n}} + \mu,$$

отже воно теж розподілене за нормальним законом.

Задача. Знайти твірну функцію для нормального розподілу

Розв'язання. За означенням твірної функції

$$M_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xt) P_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xt) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Об'єднавши показники експонент і виділивши повний квадрат отримаємо

$$M_{\xi}(t) = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right] \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\mu-\sigma^2 t)^2}{2\sigma^2}\right] dx = \exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right].$$

Для нормального розподілу нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією

$$M_{\xi}(t) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Задача. Відомо, що випадкова величина ξ розподілена за нормальним законом. Знайти закон розподілу лінійної функції $a\xi + b$.

Розв'язання. За означенням твірної функції початкових моментів

$$M_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[(ax+b)t] P_{\xi}(x) dx = \exp(bt) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(axt) \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx.$$

Даний інтеграл відрізняється від попереднього лише заміною параметру t на at

$$M_{\xi}(t) = \exp\left[(b + \mu a)t + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 t^2\right].$$

Отже, з точністю до заміни параметру t на at і сталого множника $M_{\xi}(t) = \exp[(b + \mu a)t]$ ми отримали твірну функцію нормального розподілу.

Якщо гранично просто сформулювати центральну межу теорему, то її сенс у тому, що сума великої кількості випадкових величин розподілена за нормальним законом незалежно від того, як розподілені окремі випадкові величини, за умови, що ці розподіли мають скінчену дисперсію.

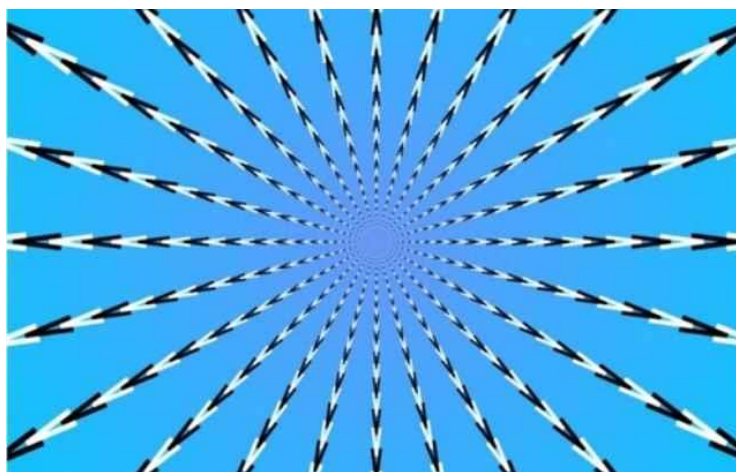
До людської спільноти цю теорему можна застосувати так. Кожна людина характеризується великою кількістю параметрів: вага, зріст, інтелект, освіта тощо. За рахунок оптимально підібраних природних одиниць вимірювання їх можна зробити нерозмірними. Припустимо, що ми не знаємо закону розподілу кожного з них, але вважаємо їх дисперсію скінченою. Не зважаючи на це, їх середнє арифметичне буде розподілене за нормальним законом. Це вибіркове середнє можна вважати показником привабливості людини. Ми відразу отримаємо, що цей показник для невеликої долі людності буде надзвичайно малим – це майбутні підбурювачі спокою суспільства, соціальна база суспільних заворушень. Для такої самої малої долі людності цей показник буде надзвичайно великим – це та частина людства: науковці, письменники,

художники, інженери, підприємці тощо, яка рухає його вперед, якій людство зобов'язане всіма своїми досягненнями. Це також підбурювачі спокою суспільства на іншій ідейній основі. І буде консервативна більшість, яка фактом свого існування забезпечує стабільність людської цивілізації.

Центральна межа теорема дозволяє знайти розподіл ймовірностей і для рівня освіченості людської спільноти. В якості останнього братимемо, наприклад, середній бал атестату зрілості. Функція розподілу ймовірностей для рівня освіченості ξ окремої людини вважатимемо невідомою, але такою, що має скінчену дисперсію. Для простоти з населення країни виділимо лише учнів випускних класів і розглянемо всі випускні класи довільної країни. Кількість учнів в класі нехай буде достатньо великою. Вважатимемо їх рівноправними, тобто такими, що мають однакову кількість учнів і однаковий соціальний стан. Для кожного класу визначимо середній бал атестату його учнів $\bar{\xi}$. Очевидно, що це середнє буде розподілене за нормальним законом з густиною

$$P_{\bar{\xi}}(x) \rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\bar{\xi}-a)^2}{2\sigma^2/n}\right).$$

Тут n - кількість учнів у класі. В якості математичного очікування a можна взяти середній бал атестату для учнів випускних класів всієї країни або вибіркве середнє для достатньо великої кількості учнів країни. В якості дисперсії σ^2 можна також взяти дисперсію для учнів випускних класів всієї країни або вибіркву дисперсію для достатньо великої кількості учнів країни.



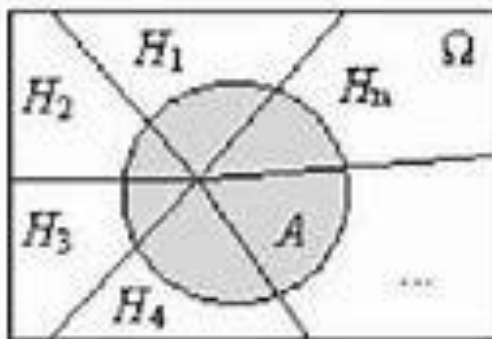
Нескінченість

Якщо населення країни достатньо велике, то ці величини є числами, а не випадковими величинами.

Отже, висновок такий. Рівень освіти середньостатистичного учня довільного класу розподілений за нормальним законом. Тобто, не знаючи функцію розподілу ймовірностей для освіченості окремого учня, ми, тим не менш, знаємо функцію розподілу ймовірностей для середньо статистичного учня довільного класу, яка дає доволі детальне уявлення про стан освіти в даній країні. Зрозуміло, що порівнювати результати для різних країн можна лише у разі, якщо шкільні програми у них приблизно однакові, так само як і критерії оцінок. Всі властивості нормального розподілу автоматично стають властивостями учнівської спільноти. Даний підхід можна поширити на всіх учнів країни, а також на всіх громадян країни, що мають середню освіту.

3.Формула повної ймовірності

Задача. Гравець підкидає симетричну монету. Якщо він виграв, то отримує винагороду в h гривень, а якщо програв то віддає h гривень. Нехай початковий капітал гравця становить X гривень. Метою гравця є довести цей



Подія A належить простору елементарних подій і має непорожній перетин з іншими подіями, взаємно несумісними, але такими, що їх сума дорівнює простору елементарних подій

капітал до величини H гривень, після чого гра припиняється. Знайти ймовірності $P(A)$ розорення гравця і $P(B)$ досягнення поставленої мети.

Розв'язання. На кожному кроці гри існує дві можливості: гравець виграє суму h і гравець програє суму h . У першому разі загальна сума його грошей стає $x+h$, у другому випадку - $x-h$. Перед киданням монети щодо можливого результату існує дві гіпотези - E_1 - гравець виграє і E_2 - гравець програє. Ймовірності їх реалізації: $P(E_1)=1/2$, $P(E_2)=1/2$. Відповідно ймовірності виграшу і програшу будуть такими: $P(x|E_1)=P(x+h)$, $P(x|E_2)=P(x-h)$. Ймовірність мати у висліді одного підкидання суму x визначатиметься формулою повної ймовірності

$$P(x) = P(E_1)P(x|E_1) + P(E_2)P(x|E_2)$$

або

$$P(x) = \frac{1}{2}P(x+h) + \frac{1}{2}P(x-h).$$

Вважаючи $h/x \ll 1$, можна кожен з ймовірностей у правій частині рівняння розвинути в ряд Тейлора і обмежитись членами, квадратичними за h . Матимемо

$$P(x) = \frac{1}{2} \left[P(x) + \frac{dP(x)}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 P(x)}{dx^2} h^2 \right] + \frac{1}{2} \left[P(x) - \frac{dP(x)}{dx} h + \frac{1}{2} \frac{d^2 P(x)}{dx^2} h^2 \right].$$

Після спрощення

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} = 0.$$

Загальним розв'язком цього диференційного рівняння є лінійна функція

$$P(x) = a + bx.$$

Довільні сталі можна знайти з двох межових умов. У разі пошуку ймовірності розорення гравця гра припиняється у двох випадках: розорення гравця $P(0) = 1$ і досягнення поставленої мети $P(H) = 0$. Очевидно,

$$P(0) = a = 1,$$

$$P(H) = a + bH = 1 + bH = 0.$$

З останнього рівняння $b = -1/H$. Отже, ймовірність розорення буде

$$P(x) = P(A) = 1 - \frac{x}{H}.$$

Для пошуку ймовірності досягнення мети межові умови будуть іншими: $P(0) = 0$ і $P(H) = 1$. У цьому разі $a = 0, b = 1/H$ і ймовірність розбагатіти буде

$$P(x) = P(B) = \frac{x}{H}.$$

Яка з двох ймовірностей більша залежить від початкового капіталу. Якщо $x < H/2$, то більшою є ймовірність розорення, якщо $x > H/2$ то більшою є ймовірність розбагатіти.

Задача. При переливанні крові слід враховувати групу крові донора і хворого. Людині, що має четверту групу крові, можна переливати кров довільної групи; людині з другою або третьою групою крові можна переливати кров або тої ж групи, або першої; людині з першою групою крові можна переливати лише кров першої групи. Серед населення 33.7 % мають першу, 37.5



Роберт Браун
(1773-1858)

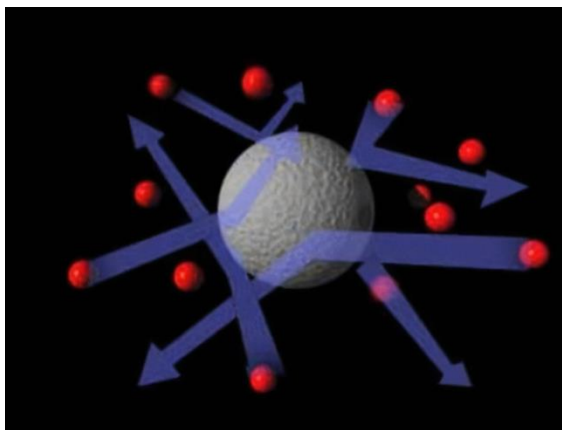
Шотландський ботанік, що відкрив безладний рух дрібних частинок у рідині під впливом ударів молекул цієї рідини (Броунівський рух)

% – другу, 20.9 третю і 7.9 % – четверту групи крові. Знайти ймовірність того, що випадково взятому хворому можна перелити кров випадково взятого донора.

Розв'язання. Нехай B_1 – подія, відповідно до якої хворий має першу групу крові; B_2 – другу; B_3 – третю; B_4 – четверту. Якщо подія A полягає у тому, що у висліді переливання крові хворий виживе, то ймовірність цієї події визначається формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{n=1}^4 P(A|B_n)P(B_n).$$

Очевидно, $P(B_1)=0.337$, $P(B_2)=0.375$, $P(B_3)=0.209$, $P(B_4)=0.079$, $P(A|B_1)=0.337$, оскільки донор повинен мати виключно першу групу крові; $P(A|B_2)=0.337+0.375=0.712$, оскільки донор повинен мати або першу, або другу



Броунівська частинка

групи крові; аналогічно $P(A|B_3) = 0.337 + 0.209 = 0.546$, $P(A|B_4) = 1$, оскільки донор у цьому разі може мати довільну групу крові. У висліді $P(A) = 0.47$.

4. Модель одновимірного випадкового блукання

Задача. Нехай частинка змінює своє положення у дискретні моменти часу, кратні Δt . При цьому за час Δt вона переходить з положення з координатою x , або в положення $x + \Delta x$, або $x - \Delta x$. Позначимо через $\xi(t)$ положення частинки в момент часу t . При цьому за час t частинка здійснить $n = t/\Delta t$ таких переходів. Якщо позначити через N кількість переходів у додатному напрямку, а через M кількість переходів у від'ємному напрямку ($N + M = n$), то зміщення у додатному напрямку становитиме $N\Delta x$, а у від'ємному напрямку $M\Delta x$. Загальне зміщення дорівнюватиме $\xi(t) = (N - M)\Delta x$. Якщо вважати $\xi(0) = 0$, то

$$\xi(t) = (\xi(s) - \xi(0)) + (\xi(t) - \xi(s)).$$

Тобто ми представили зміщення частинки сумою двох незалежних доданків. Перший з них – зміщення за проміжок часу від 0 до s , другий – від s до t . Це



є наслідком базового положення про те, що одновимірне випадкове блукання належить до випадкових процесів з незалежними приростами. У свою чергу це є наслідком некорельованості зміщення у будь-які моменти часу. Далі ми скористаємось тим, що даний випадковий процес однорідний у часі, тобто не залежить від вибору початку відліку часу. Це означає, що випадкові величини $\xi(t) - \xi(s)$ і $\xi(t-s) - \xi(0)$ однаково розподілені і мають однакові дисперсії. Тому,

$$D\xi(t) = D(\xi(s) - \xi(0)) + D(\xi(t) - \xi(s)) = D\xi(s) + D\xi(t-s).$$

Остання рівність можлива лише тоді, коли кожна з дисперсій у правій частині співвідношення є лінійною функцією часу, тобто

$$D\xi(s) = \sigma^2 s, \quad D\xi(t-s) = \sigma^2 (t-s).$$

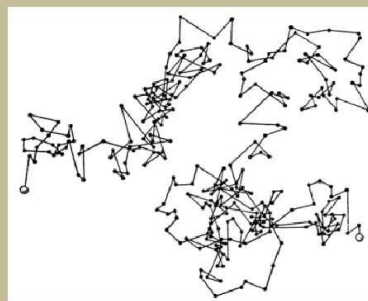
Відповідно,

$$D\xi(t) = \sigma^2 t.$$

Дисперсію зміщення частинки можна обчислити і безпосередньо. Обчислимо дисперсію зміщення на n -ому кроці за формулою

$$D\xi(t) = M \left[\xi(t) - M \xi(t) \right]^2.$$

Очевидно,



Броунівський рух свідчить про безперервний хаотичний рух молекул речовини, швидкість якого залежить від температури: чим вища температура, тим швидше рухаються молекули.

$$Mx_n = \frac{1}{2}[x_n + \Delta x] + \frac{1}{2}[x_n - \Delta x] = x_n,$$

$$Dx_n = \frac{1}{2}[x_n + \Delta x - x_n]^2 + \frac{1}{2}[x_n - \Delta x - x_n]^2 = [\Delta x]^2.$$

За n кроків дисперсію можна розглядати як суму дисперсій на одному кроці через незалежність відповідних випадкових величин. Отже,

$$D\xi(t) = \sum_{i=1}^n Dx_i = n(\Delta x)^2,$$

$$D\xi(t) = (\Delta x)^2 \frac{t}{\Delta t}.$$

Порівнюючи два різних вирази для дисперсії отримаємо наступне співвідношення, що дозволяє визначити коефіцієнт дифузії через зовнішні параметри $\Delta x, \Delta t$

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2.$$

Очевидно, ми маємо справу зі схемою Бернуллі при n випробування і N успіхах. Вважаючи ці числа достатньо великими, можемо використати інтегральну теорему Муавра-Лапласа

$$P\left(x_1 \leq \frac{\xi(t)}{\sqrt{D\xi(t)}} \leq x_2\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Останній результат можна записати і так

$$P\left(x_1 \sqrt{D\xi(t)} \leq \xi(t) \leq x_2 \sqrt{D\xi(t)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

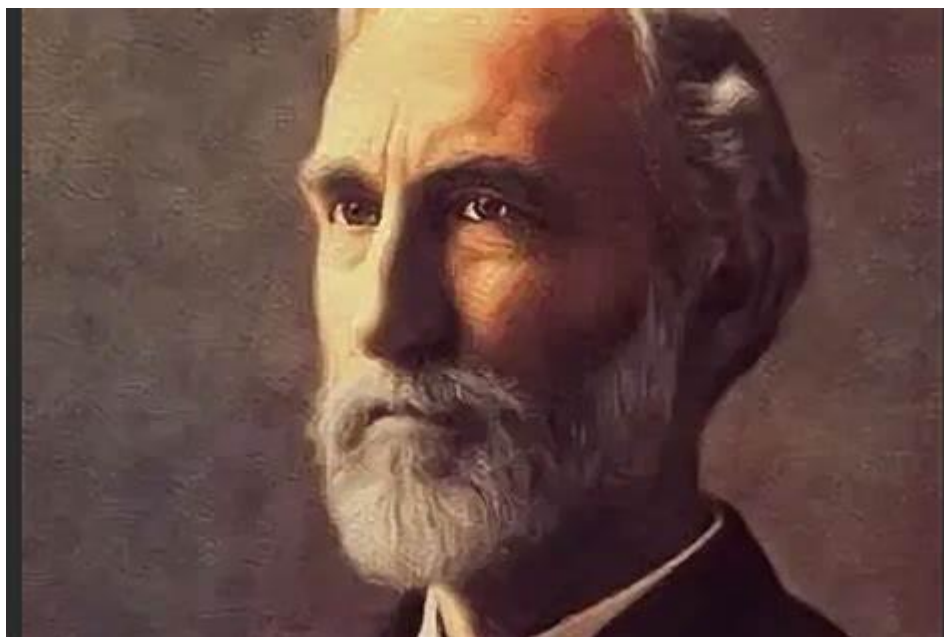
або

$$P\left(x_1 \sigma \sqrt{t} \leq \xi(t) \leq x_2 \sigma \sqrt{t}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Тобто інтервал для зміщення частинки не змінюючись у довжині переміщується з часом у бік більших значень.

5. Ентропія

Розглянемо макроскопічну фізичну систему, енергія якої зберігається. Розглянемо також квазізамкнену макроскопічну підсистему цієї системи. Остання може обмінюватись енергією ΔE з рештою системи. Енергія ΔE , очевидно, є випадковою величиною. Підсистему вважатимемо малою частиною великої системи. Велику систему, з якої виключено малу підсистему називатимемо термостатом. Очевидно, що енергія підсистеми E також буде випадковою величиною. Взаємодія підсистеми і термостату здійснюється через поверхню, що відділяє її від термостату. Зрозуміло, що енергія підсистеми пропорційна її об'єму, а останній пропорційний кубу її радіуса. Енергія взаємодії підсистеми і термостату пропорційна площі поверхні, що обмежує підсистему. Остання пропорційна квадрату її радіуса. Насправді об'ємна форма підсистеми не має принципового сенсу і для нашої оцінки її можна вважати сферою. Для достатньо великої підсистеми частка $\Delta E/E \ll 1/R$ буде достатньо



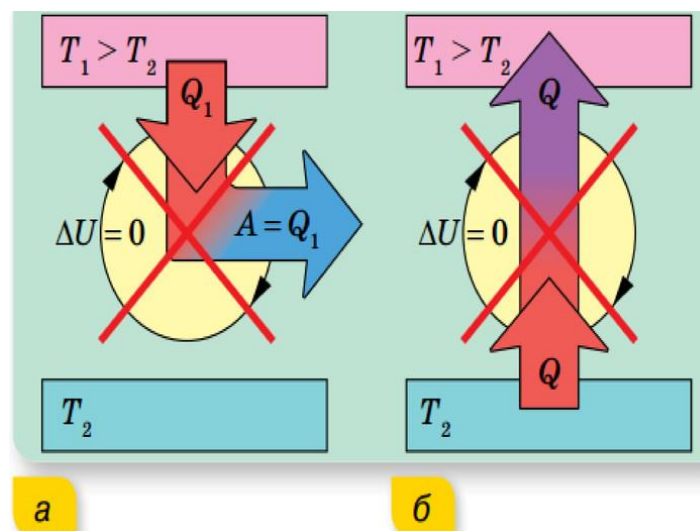
Джозайя Уїллард Гіббс

(1838-1903)

Видатний американський фізик і математик, один з творців статистичної фізики

малою. Тут R - радіус підсистеми. Якщо позначити через $\bar{E}$ середнє значення енергії підсистеми, то після обміну підсистеми енергією з термостатом це середнє значення енергії не може суттєво змінитись. Нехай $\Delta E/2$ таке значення енергії, яке підсистема може набутися або втратити за рахунок обміну енергією з термостатом протягом довільного проміжку часу у переважній більшості випадків. Це значення енергії має той же порядок величини, що і енергія при одному довільному акті взаємодії підсистеми і термостату.

На перший погляд може здаватись, що обмін енергією підсистеми з термостатом нагадує одновимірне випадкове блукання. При останньому за доволі великий проміжок часу пройдений шлях може досягати довільного наперед заданого значення. Проте це не так. Припустимо, що у початковий

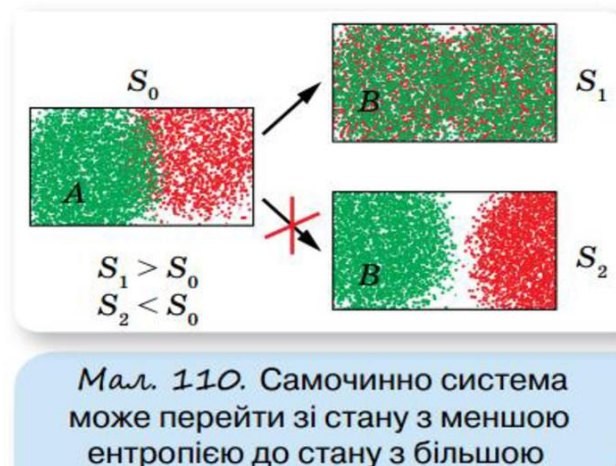


момент часу підсистема знаходиться в ідеальній рівновазі з термостатом. У цей момент ймовірність отримання порції енергії від термостата і ймовірність віддачі термостату порції енергії однакові. Як тільки підсистема, наприклад, отримала порцію енергії від термостату, то ймовірність отримання від термостата наступної порції енергії стане меншою, а ймовірність передачі порції енергії термостату стане більшою за $\frac{1}{2}$. Якщо, не зважаючи на це, підсистема отримає ще одну порцію енергії від термостата, то ймовірність отримати нову порцію стане ще менше, а віддати енергію термостату ще більше за $\frac{1}{2}$. Тут спрацьовує прагнення підсистеми до теплової рівноваги з термостатом. Тоді можна вважати, що всі можливі значення енергії підсистеми лежать в інтервалі $\bar{E} - \Delta E / 2 < E < \bar{E} + \Delta E / 2$.

Можна ввести у розгляд ймовірність знаходження підсистеми у станах з енергіями, що не перевищують E

$$P(E) = \int_{-\infty}^E W(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Для надзвичайно вузького доступного підсистемі інтервалу енергій конкретний вигляд густини розподілу ймовірностей несуттєвий. Тому оберемо



найпростіший варіант розподілу – рівномірний розподіл. У цьому разі густина розподілу ймовірностей знаходження підсистеми в різних енергетичних станах

$$W(E) = \begin{cases} 1/\Delta E, & \bar{E} - \Delta E/2 < E < \bar{E} + \Delta E/2, \\ 0, & E \leq \bar{E} - \Delta E/2 \cup E \geq \bar{E} + \Delta E/2. \end{cases}$$

Зрозуміло, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(E) dE = \frac{1}{\Delta E} \int_{\bar{E}-\Delta E/2}^{\bar{E}+\Delta E/2} dE = 1.$$

Можна ввести у розгляд також функцію розподілу енергетичних станів підсистеми

$$\Gamma(E) = \int_{-\infty}^E \gamma(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Остання функція визначає кількість енергетичних станів, енергія яких не перевищує E , якщо енергетичні стани утворюють квазідискретний набір. Саме такий набір станів ми надалі і розглядатимемо. У цьому разі зручно замість знаку суми використовувати у відповідних місцях знак інтегралу. Випадок неперервного енергетичного спектру тут не розглядається, оскільки такий розгляд без розгляду засадничих питань квантової механіки неможливий. Якщо верхня межа інтегралу прямує до нескінченості, то ця функція визначає повну кількість енергетичних станів системи. Вважаючи цю функцію неперервною, за

виключенням можливо скінченного набору точок, можна записати, що в області неперервності густина розподілу енергетичних станів

$$\gamma(E) = \frac{d\Gamma(E)}{dE}.$$

Припустивши рівноправність енергетичних станів підсистеми, тобто рівномірність їх розподілу у вузькому енергетичному інтервалі, ми маємо зробити наступний крок і припустити однаковість ймовірностей знаходження системи в кожному з цих станів, тобто

$$w(E) = \begin{cases} \text{const}, & \bar{E} - \Delta E / 2 < E < \bar{E} + \Delta E / 2, \\ 0, & E \leq \bar{E} - \Delta E / 2 \cup E \geq \bar{E} + \Delta E / 2. \end{cases}$$

В якості сталої можна взяти, наприклад, $w(\bar{E})$.

Між густиною ймовірностей перебування підсистеми у стані з енергією E , ймовірністю перебування підсистеми у стані з цією енергією і густиною станів існує фундаментальне співвідношення

$$W(E) = w(E)\gamma(E).$$

З рівномірності розподілу станів енергій підсистеми і сталості ймовірностей перебування підсистеми у заданому енергетичному стані випливає і сталість густини енергетичних станів підсистеми

$$\gamma(E) = \begin{cases} \text{const}, & \bar{E} - \Delta E / 2 < E < \bar{E} + \Delta E / 2, \\ 0, & E \leq \bar{E} - \Delta E / 2 \cup E \geq \bar{E} + \Delta E / 2. \end{cases}$$

В якості сталої величини можна взяти $\gamma(\bar{E})$. У цьому разі

$$\Gamma(E) = \int_{-\infty}^E \gamma(\varepsilon) d\varepsilon = \begin{cases} \gamma(\bar{E})\Delta E, & \bar{E} + \Delta E / 2 \geq E, \\ \gamma(\bar{E})(E - \bar{E} + \Delta E / 2), & \bar{E} - \Delta E / 2 < E < \bar{E} + \Delta E / 2, \\ 0, & E \leq \bar{E} - \Delta E / 2. \end{cases}$$

На проміжку $\bar{E} - \Delta E / 2 < E < \bar{E} + \Delta E / 2$ у нашому конкретному випадку з високою точністю можна написати

$$W(\bar{E}) = w(\bar{E})\gamma(\bar{E}).$$

Звідси

$$\gamma(\bar{E}) = \frac{1}{w(\bar{E})\Delta E}.$$

Для повної кількості енергетичних станів системи матимемо

$$\Gamma(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \gamma(\varepsilon) d\varepsilon = \gamma(\bar{E})\Delta E = \frac{1}{w(\bar{E})}.$$

За визначенням, ентропією системи називається функція

$$S(E) = \ln[\Gamma(E)].$$

В рамках нашої моделі

$$S(\bar{E}) = -\ln[w(\bar{E})].$$

Конкретний результат можна легко отримати у разі, коли підсистема може знаходитись у N рівноправних станах. З умови нормування ймовірності випливає, що $w(E) = 1/N$ і ми маємо для ентропії формулу Хартлі

$$S(E) = \ln(N).$$

У статистичній фізиці доводиться, що логарифм ймовірності перебування підсистеми у стані з енергією E може залежати лише від адитивних інтегралів руху. Якщо зафіксувати просторове розташування підсистеми, обнуливши повний імпульс і момент імпульсу системи, то лишається лише один такий інтеграл руху – повна енергія підсистеми. У цьому разі

$$\ln[w(E)] = \alpha + \beta E.$$

Якщо в якості аргументу взяти середню енергію, то матимемо

$$\alpha + \beta \bar{E} = \ln[w(\bar{E})].$$

Лінійні випадкові функції мають ту властивість, що середнє їх значення дорівнює значенню цих функцій від середнього значення аргументу. У висліді

$$\ln[w(\bar{E})] = \ln[\overline{w(E)}] = \overline{\ln[w(E)]} = \sum_n w(E_n) \ln[w(E_n)].$$

$$S(E) = - \sum_n w(E_n) \ln[w(E_n)] = - \sum_n p_n \ln(p_n),$$

де для ймовірностей ми ввели традиційні позначення. Важливо зауважити, що отриманий результат не залежить від вигляду закону розподілу ймовірностей $p(E_n)$ і справедливий для будь-якого його варіанту.

6. Розподіл Больцмана

Розподіл Больцмана – це найважливіший розподіл, що зустрічається в атомній, молекулярній фізиці, квантовій механіці тощо. Тут ми покажемо, як його можна отримати з поліноміального розподілу

$$P_N(N_1, N_2, \dots, N_M) = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_M!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_M^{N_M}.$$

Якщо ми підкидаємо несиметричну монету N раз, то $M = 2$, тобто у нас є два варіанти її випадення: герб або решка. Ймовірності їх випадення будуть p_1 і p_2 , кількості випадення гербів і решок будуть, відповідно, N_1 і N_2 . Це так звана схема Бернуллі – частинний випадок поліноміальної схеми. Якщо ми підкидаємо довільний гральний кубик, то ймовірності випадення різних його граней будуть $p_1, p_2, \dots, p_6$, а кількості їх випадення при N підкиданнях будуть $N_1, N_2, \dots, N_6$, $N_1 + N_2 + \dots + N_6 = N$. Дивовижним є той факт, що поліноміальна схема прекрасно описує статистичну поведінку системи невзаємодіючих атомів, молекул, електронів тощо. У цьому разі кількість підкидань прямує до нескінченості. Якщо наші частинки є однаковими, тобто нерозрізненими, то їх взаємна перестановка відповідає тому самому фізичному стану системи. Тобто виродження стану системи є $N!$ Можна розглянути ймовірність мікроскопічного стану системи з фіксованим розподілом частинок за енергіями без врахування



Людвіг Больцман

(1844-1906)

Видатний австрійський фізик – один з творців статистичної фізики

їх можливих перестановок. Вона буде в $N!$ разів меншою, тобто визначатиметься так

$$p_N(N_1, N_2, \dots, N_M) = \frac{1}{N_1! N_2! \dots N_M!} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots p_M^{N_M}.$$

Коефіцієнт перед добутком ймовірностей є статистичною вагою даного макроскопічного стану

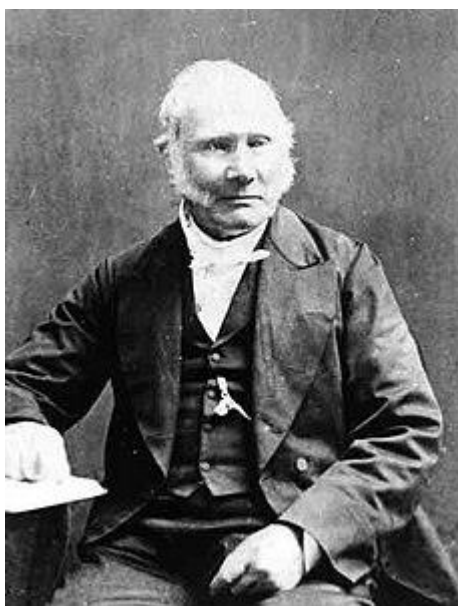
$$\Gamma(N_1, N_2, \dots, N_M) = \frac{1}{N_1! N_2! \dots N_M!},$$

А його логарифм визначатиме ентропію системи

$$S(N_1, N_2, \dots, N_M) = \ln[\Gamma(N_1, N_2, \dots, N_M)].$$

Для нашої модельної системи можна записати детальніший вираз

$$S = S(N_1, N_2, \dots, N_M) = - \sum_{i=1}^M \ln(N_i!).$$



Роберт Стірлінг

(1790-1878)

Видатний шотландський науковець

Використавши формулу Стірлінга

$$\ln(N!) = N \ln(N) - N$$

останній вираз можна суттєво спростити

$$S = -\sum_{i=1}^M N_i \ln(N_i) + \sum_{i=1}^M N_i = -\sum_{i=1}^M N_i \ln(N_i) + N.$$

Маючи вираз для кількості мікрочастинок в різних станах, ми можемо побудувати всю термодинаміку такої системи. Далі ми реалізуємо цей алгоритм на прикладі статистики Больцмана, до розгляду якої ми і перейдемо.

Розглянемо один з прикладів фізичної системи, що описується поліноміальним розподілом. Фізичний стан системи характеризуватимемо набором енергетичних станів $E_1, E_2, \dots, E_M$ і набором кількостей частинок, що мають ці енергії $N_1, N_2, \dots, N_M$

$$\sum_{i=1}^M N_i = N.$$

Відповідно, ймовірності їх потрапляння у стани з відповідними енергіями - $p_1, p_2, \dots, p_N$

$$\sum_{i=1}^M p_i = 1.$$

Повна (внутрішня) енергія системи визначатиметься так

$$\sum_{i=1}^M N_i E_i = E.$$

Таким чином, макроскопічний стан системи ідентифікується його енергією і кількістю частинок. Очевидно, що стан систем при заданій кількості частинок і із заданною енергією може реалізовуватись різним розподілом частинок по енергетичним рівням, тобто можна говорити про різні мікростани системи, що відповідають одному макростану з заданною енергією і кількістю частинок. Тобто можна говорити про статистичну вагу кожного макростану системи. Ця статистична вага і визначає ентропію системи, як показано у попередньому параграфі. Але нашою метою тут буде знаходження кількостей частинок $N_1, N_2, \dots, N_M$, якщо відомі енергії $E_1, E_2, \dots, E_M$ і ймовірності набуття частинками цих енергій $p_1, p_2, \dots, p_N$.

Стан рівноваги системи визначатиметься тим, що кількості частинок у різних станах, та їх енергія з часом не змінюватимуться

$$dN = \sum_{i=1}^M dN_i = 0,$$

$$dE = \sum_{i=1}^M E_i dN_i = 0.$$

Мовою ймовірностей стан рівноваги означатиме, що ймовірність знаходження системи у такому стані матиме максимальне значення

$$dP_N(N_1, N_2, \dots, N_M) = 0.$$

Екстремум ймовірності та її логарифму досягаються одночасно, проте екстремум останнього шукати легше, тому розглянемо

$$\ln[P_M(N_1, N_2, \dots, N_M)] = \ln(N!) - \sum_{i=1}^M \ln(N_i!) + \sum_{i=1}^M N_i \ln(p_i).$$

Цей вираз можна спростити, якщо використати формулу Стірлінга

$$\ln(N!) = N \ln(N) - N,$$

тоді

$$\ln[P_N(N_1, N_2, \dots, N_M)] = \ln(N!) - \sum_{i=1}^M N_i \ln(N_i) + \sum_{i=1}^M N_i + \sum_{i=1}^M N_i \ln(p_i).$$

Умова екстремуму тепер матиме вигляд

$$-\sum_{i=1}^M \ln(N_i) dN_i + \sum_{i=1}^M \ln(p_i) dN_i = 0.$$

Це рівняння щодо кількостей частинок у відповідних станах слід розглядати разом з умовами (рівняннями) стаціонарності. Всі рівняння можна об'єднати в одне за допомогою метода невизначених множників Лагранжа. Тоді

$$-\sum_{i=1}^M \ln(N_i) dN_i + \sum_{i=1}^M \ln(p_i) dN_i + \alpha \sum_{i=1}^M dN_i + \beta \sum_{i=1}^M E_i dN_i = 0$$

або

$$\sum_{i=1}^M \left[\ln\left(\frac{p_i}{N_i}\right) + \alpha + \beta E_i \right] dN_i = 0.$$

Остання рівність можлива лише у разі, якщо

$$\ln\left(\frac{p_i}{N_i}\right) + \alpha + \beta E_i = 0.$$

Розв'язок останнього рівняння має вигляд

$$N_i = p_i \exp(-\alpha - \beta E_i).$$

Одну з довільних сталих можна знайти з умови нормування

$$N = \sum_{i=1}^M N_i = \exp(-\alpha) \sum_{i=1}^M p_i \exp(-\beta E_i).$$

Вираз

$$Z = \sum_{i=1}^M p_i \exp(-\beta E_i)$$

називається статистичною сумою системи. Вона однозначно визначається набором ймовірностей і енергетичних станів системи. Тепер

$$N_i = \frac{N}{Z} p_i \exp(-\beta E_i).$$

Це і є знаменитий розподіл Больцмана.

Другий параметр має розмірність оберненої енергії і характеризує зовнішні умови, в яких знаходиться система. Його можна виміряти експериментально. У фізиці цей параметр називається оберненою температурою

$$\beta = 1/T,$$

якщо температуру вимірювати в одиницях енергії. Ми можемо зв'язати цей параметр з іншими термодинамічними параметрами системи, наприклад, внутрішньою енергією. Внутрішня енергія, що припадає на одну частинку, є математичним очікуванням енергії системи

$$u = \langle E \rangle / N = \sum_{i=1}^M E_i N_i / N = \frac{1}{Z} \sum_{i=1}^M p_i \exp(-\beta E_i) E_i.$$

Останній вираз можна представити і так

$$u = -\frac{1}{Z} \frac{d}{d\beta} \sum_{i=1}^M p_i \exp(-\beta E_i) = -\frac{1}{Z} \frac{d \ln(Z)}{d\beta}.$$

Можна показати, що якщо система складається з двох незалежних підсистем, які перебувають у стані термодинамічної рівноваги одна з одною, то це можливо лише у разі однакової температури обох підсистем.

7. Розподіл Максвелла

Розподіл Больцмана безпосередньо застосовний до систем частинок з дискретним енергетичним спектром. Це, наприклад, частинки у потенційній ямі.



Джеймс Максвелл

(1831-1879)

*Геніальний шотландський вчений, який створив теорію
електромагнітного поля*

Відстань між енергетичними рівнями у цьому разі залежить від геометричних параметрів цієї ями. Якщо розміри збільшувати, то відстань між енергетичними рівнями зменшується. При достатньо великих розмірах енергетичний спектр стає квазідискретним. Тоді з високою точністю від підсумовування за енергетичними станами можна перейти до інтегрування за енергією. Для систем невзаємодіючих частинок статистичну суму можна обчислити у загальному вигляді, так само як і всі характеристики системи, для яких використовується даний закон розподілу ймовірностей. Ключовою характеристикою системи, потрібною для здійснення переходу від підсумовування до інтегрування є густина станів, тобто кількість енергетичних станів, що припадає на одиничний інтервал енергії. Стан класичних частинок визначається їх координатами і хвильовими векторами. Системі багатьох частинок відповідає точка у фазовому просторі відповідної розмірності. Густина станів має найпростіший вигляд лише для частинок, стани яких визначаються неперервним хвильовим вектором $\mathbf{k}$ і неперервним радіус-вектором $\mathbf{r}$. У цьому разі вона є сталою величиною,

рівною одиниці. Тоді для класичних частинок перехід від підсумовування до інтегрування для безспінових частинок здійснюється так

$$\sum_i = \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{k}.$$

Якщо функція під знаком суми не залежить від координат, то за ними можна провести інтегрування і перехід буде таким

$$\sum_i = V \int d\mathbf{k}.$$

Якщо вона залежить лише від модуля хвильового вектора, то

$$\sum_i = 4\pi V \int dk k^2.$$

Рівноправність енергетичних станів, що визначається хвильовим вектором, тягне за собою однакову доступність їх для мікрочастинок, тобто

$$p_i = 1/M, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Тепер вираз для розподілу Больцмана суттєво спрощується

$$N_k = \frac{N}{Z} \exp\left(-\frac{E(k)}{T}\right),$$

$$Z = \sum_k \exp\left(-\frac{E(k)}{T}\right).$$

Обчислимо статистичну суму, перейшовши від підсумовування до інтегрування

$$Z = 4\pi V \int_0^\infty \exp\left(-\frac{E(k)}{T}\right) k^2 dk.$$

Цей інтеграл приводить до відомого інтегралу Пуасона у разі, як це має місце для невзаємодіючих вільних частинок, що мають лише кінетичну енергію,

$$E(k) = \hbar^2 k^2 / 2m.$$

Тут $\hbar$ - стала Планка, m - маса мікрочастинки. Тоді

$$Z = -4\pi V \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \exp(-\alpha k^2) dk = -4\pi V \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{d}{d\alpha} \alpha^{-1/2}, \quad \alpha = \frac{\hbar^2}{2mT}.$$

Остаточню,



$$Z = V \left(\frac{2\pi mT}{\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

Тепер кількість мікрочастинок у стані з даним значенням хвильового вектора

$$N_{\mathbf{k}} = n \left(\frac{\hbar^2}{2\pi mT} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mT} \right), \quad n = N/V.$$

З точністю до множника n ми маємо нормальний розподіл або розподіл Гауса.

Легко перевірити, що

$$\sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} = N.$$

Задача. Перевірити попередню умову нормування.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} &= 4\pi V \left(\frac{\hbar^2}{2\pi mT} \right)^{3/2} n \int_0^\infty \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mT} \right) k^2 dk = \\ &= -4\pi N \left(\frac{\hbar^2}{2\pi mT} \right)^{3/2} \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \exp(-\alpha k^2) dk \Big|_{\alpha=\hbar^2/2m} = -4\pi N \left(\frac{\hbar^2}{2\pi mT} \right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{d}{d\alpha} \alpha^{-1/2} = \\ &= 4\pi N \left(\frac{\hbar^2}{2\pi mT} \right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{1}{2} \left(\frac{2mT}{\hbar^2} \right)^{3/2} = N. \end{aligned}$$

Кількість частинок у стані з заданим хвильовим вектором у фазовому просторі, що визначається координатами і хвильовими векторами можна перетворити у кількість цих частинок у стані з заданим хвильовим вектором у просторі лише хвильових векторів. Очевидно, що ця кількість має вигляд

$$N(k) = N \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mT} \right).$$

З точністю до множника N ми знову маємо нормальний розподіл або розподіл Гауса. Наведена функція задовольняє умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z N(k) = N.$$

Тепер кількість мікрочастинок, компоненти хвильового вектора яких належать інтервалам $[k_x, k_x + dk_x]$, $[k_y, k_y + dk_y]$, $[k_z, k_z + dk_z]$ визначатиметься так

$$dN = N(k) dk_x dk_y dk_z.$$

Задача. Перевірити попередню умову нормування.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z N(k) = \\ & = N \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_x^2}{2mT} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_y^2}{2mT} \right) \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \exp \left(-\frac{\hbar^2 k_z^2}{2mT} \right) = \\ & = N \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \pi^{3/2} \left(\frac{2mT}{\hbar^2} \right)^{3/2} = N. \end{aligned}$$

Кількість частинок із заданим значенням хвильового вектора, нормована на густину частинок в одиниці об'єму буде такою

$$n(\mathbf{k}) = n \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mT} \right),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z n(\mathbf{k}) = n$$

і визначатиме густину мікрочастинок, компоненти хвильового вектора яких належать інтервалам $[k_x, k_x + dk_x]$, $[k_y, k_y + dk_y]$, $[k_z, k_z + dk_z]$

$$dn = n(k) dk_x dk_y dk_z.$$

Можна розглянути і кількість частинок, нормовану на одиницю, тоді це вже буде відповідна густина ймовірностей

$$n(\mathbf{k}) = \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mT} \right),$$

яка визначатиме долю частинок, компоненти хвильового вектора яких належать інтервалам $[k_x, k_x + dk_x]$, $[k_y, k_y + dk_y]$, $[k_z, k_z + dk_z]$.

Тепер ми легко можемо знайти внутрішню енергію нашої системи

$$U = \sum_{\mathbf{k}} E(k) N_{\mathbf{k}} = \frac{3}{2} NT.$$

Задача. Знайти вираз для внутрішньої енергії системи виходячи з відомої функцій розподілу мікрочастинок за станами з заданими значеннями хвильового вектора.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} U &= \frac{V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{\infty} E(k) N_{\mathbf{k}} k^2 dk = -4\pi V \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^{\infty} N_{\mathbf{k}} dk \Big|_{\alpha=\hbar^2/2mT} = \\ &= -4\pi N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} \alpha^{-1/2} \Big|_{\alpha=\hbar^2/2mT} = \\ &= 4\pi N \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2}{2\pi m T} \right)^{3/2} \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{2} \left(\frac{2mT}{\hbar^2} \right)^{5/2} = \frac{3}{2} NT. \end{aligned}$$

Легко знайти і ще одну ключову термодинамічну функцію системи – ентропію. В попередньому параграфі було показано, що для класичної системи безспінових мікрочастинок

$$S = - \sum_{i=1}^M N_i \ln(N_i) + N.$$

Переходячи до підсумовування за хвильовим векторам отримаємо класичний вираз для ентропії класичного газу безспінових мікрочастинок

$$\begin{aligned} S &= - \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \ln(N_{\mathbf{k}}) + N = \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}} \ln(Z / N) + N = \\ &= \frac{5}{2} NT + N \ln \left[\frac{(2\pi m T)^{3/2}}{\hbar^3 n} \right]. \end{aligned}$$

Якщо ми маємо справу з нерелятивістською мікрочастиною, то для її кінетичної енергії існує і інший вираз, що пов'язує її з швидкістю частинки

$$E(\mathbf{k}) = E(\mathbf{v}) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2},$$

де $\mathbf{v}$ - швидкість частинки. Перейшовши від інтегрування за хвильовим вектором до інтегрування за швидкістю мікрочастинок, отримаємо для густини мікрочастинок з заданою швидкістю наступний вираз, що називається розподілом Максвелла,

$$\begin{aligned} N(\mathbf{v}) &= n \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m\mathbf{v}^2}{2T} \right), \\ \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z N(\mathbf{v}) &= n. \end{aligned}$$

Тепер вираз

$$dn(\mathbf{v}) = N(\mathbf{v}) dv_x dv_y dv_z$$

визначає густину мікрочастинок в одиниці об'єму, що мають швидкості в інтервалі $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$.

8. Інформація та ентропія

Часто в математиці базою для створення нової математичної теорії є добре розвинутий апарат вже якоїсь існуючої теорії. Так, на диво плідним в



Клод Елвуд Шеннон

(1916-2001)

**Видатний американський електротехнік і математик,
«батько» теорії інформації**

теорії ймовірностей виявилось використання теорії множин. Базовий об'єкт теорії ймовірностей саму ймовірність найзручніше виявилось визначати як числову функцію множини. При цьому дії над множинами відповідним чином трансформувались у дії над такими числовими функціями. У свою чергу, теорія інформації цілком запозичила свій математичний апарат у теорії ймовірностей. Просто в теорії ймовірностей ми цікавимось такою її числовою характеристикою як ймовірність, а в теорії інформації – такою її характеристикою як кількість інформації.

Отже, розглянемо дві події A і B . В теорії інформації інформацію про настання кожної з цих подій прийнято називати повідомленням, що належать певному ймовірнісному простору. Порівняємо кількості інформації, що містяться в цих подіях-повідомленнях. За означенням, кількість інформації $I(A|B)$, що міститься в події A відносно події B , визначається так

$$I(A|B) = \log_a \left(\frac{P(A|B)}{P(A)} \right),$$

де $P(A)$ - ймовірність події A , $P(A|B)$ - умовна ймовірність події, тобто ймовірність події A при умові, що наступила подія B . Тут $A|B$ - повідомлення про подію A при умові, що перед тим ми отримали повідомлення B . Введена таким чином функція є симетричною щодо своїх аргументів

$$I(A|B) = I(B|A).$$

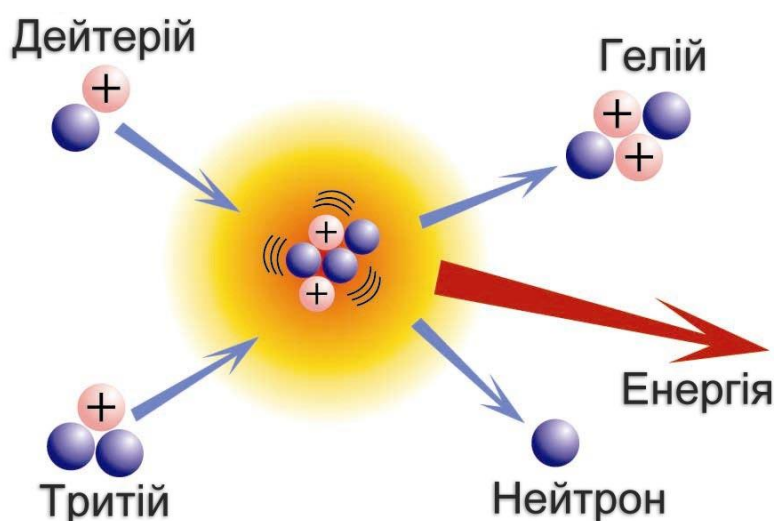
Фактично ця функція характеризує взаємовплив двох подій в плані інформації. Наприклад, якщо ці події незалежні, тобто інформація про одну з них не містить жодної інформації про можливість іншої, то $I(A|B) = I(B|A) = 0$. Якщо $B = A$, то $P(A|B) = 1$, і ми отримуємо можливість вимірювання абсолютної інформації про окрему подію. За означенням, кількість інформації, що міститься в події (повідомленні) A визначається так

$$I(A) = I(A|B) = -\log_a [P(A)].$$

Подібне означення кількості інформації було введено К. Е. Шеноном у 1948 році, а для деяких частинних випадків ще у 1928 році Р. Хартлі. Очевидно, що кількість інформації не може бути від'ємною величиною. З означення кількості інформації випливає, що чим менша ймовірність події, тим більшою є кількість інформації, що в ньому міститься. Повідомлення про те, що літак X приземлився мало кого зацікавить, оскільки ймовірність такого ходу подій цілком очікувана і відбувається з ймовірністю дуже близькою до одиниці. Повідомлення про те, що літак X розбився при приземленні зацікавить майже всіх, оскільки ймовірність такого ходу подій близька до нуля, тобто є практично неочікуваною. Очевидно, що

$$\lim_{P(A) \rightarrow 0} I(A) = -\lim_{P(A) \rightarrow 0} \log_a [P(A)] = \infty,$$

$$\lim_{P(A) \rightarrow 1} I(A) = -\lim_{P(A) \rightarrow 1} \log_a [P(A)] = 0.$$



Термоядерний синтез. Приклад випадкового процесу. Синтез можливий лише на основі дейтерію, що і відбувається в надрах Сонця мільярди років.

Якщо інформацію вимірювати в бітах і вимагати, щоб події (повідомленню) про те, що при одноразовому підкиданні симетричної монети випав герб відповідала кількість інформації в один біт, то логарифм в останньому виразі слід брати за основою 2, що є загальноприйнятим в теорії інформації. Але можна використати і безліч інших варіантів для основи логарифму.

Якщо ви ставите фігуру на довільну клітину C шахової дошки, то ви обираєте один варіант з 64 рівноправних. Відповідно до класичного означення ймовірності ймовірність зробити це навмання $P(C)=1/64$. Передавши повідомлення про цю подію ви надали іншій особі наступну кількість інформації

$$I(C) = -\log_2[P(C)] = -\log_2(1/64) = 6,$$

тобто 6 біт інформації. З означення кількості інформації і теореми множення ймовірностей випливає, що для незалежних подій A і B має місце умова адитивності інформації, тобто

$$I(AB) = -\log_2[P(AB)] = -\log_2[P(A)P(B)] =$$

$$= -\log_2[P(A)] - \log_2[P(B)] = I(A) + I(B).$$

В попередній задачі подію C можна собі уявити як вислід одночасного відбування двох інших подій: ви поставили фігуру у рядок A і стовпець B . У цьому разі ви повідомити іншій людині наступну кількість інформації

$$I(C) = I(AB) = I(A) + I(B),$$

де події A і B , очевидно, незалежні. Якщо вважати всі рядки і стовпці шахівниці рівноправними з точки зору встановлення на них даної фігури і скористатись класичним означенням ймовірності, то $P(A) = 1/8$, $P(B) = 1/8$ і

$$I(C) = 3 + 3 = 6,$$

Тобто ми отримали попередній результат у інший спосіб. Якщо події A і B довільні, то

$$\begin{aligned} I(AB) &= -\log_2[P(AB)] = -\log_2[P(A)P(B|A)] = \\ &= -\log_2[P(A)] - \log_2[P(B|A)] = -\log_2[P(A)] - \log_2\left[\frac{P(B|A)}{P(B)}P(B)\right] = \\ &= -\log_2[P(A)] - \log_2[P(B)] - \log_2\left(\frac{P(B|A)}{P(B)}\right) = \\ &= I(A) + I(B) - I(A|B) \end{aligned}$$

і спостерігається інтерференція подій (повідомлень), дещо подібна до теореми додавання ймовірностей.

Припустимо, що лише половина запущених торпед потрапляє у ціль. З них лише половина є такими, що топлять корабель. У висліді торпедної атаки корабель затонув. Яку інформацію містить таке повідомлення? Очевидно, що лише одна четверта запущених торпед здатна потопити корабель. Тобто ймовірність такої події $P(C) = 1/4$, а відповідна інформація повідомлення $I(C) = 2$. Тут також подію C можна розглянути як добуток двох подій: події A - корабель вражений торпедою і події B - корабель внаслідок такого враження



Атом. Його властивості принципово можуть описуватись лише в межах ймовірнісного підходу квантової механіки

затонув. Очевидно, ймовірності цих подій: $P(A)=1/2$, $P(B)=1/4$, $P(B|A)=1/2$. Відповідні їм кількості інформації будуть такими: $I(A)=1$, $I(B)=2$, $I(B|A)=1$. Таким чином

$$I(AB)=I(A)+I(B)-I(B|A)=2.$$

Ми знову отримали той самий результат але у інший спосіб.

Важливою числовою характеристикою кількості інформації є інформаційна ентропія H . Вона характеризує не окреме інформаційне повідомлення, а весь можливий ансамбль повідомлень $E_1, E_2, \dots, E_n$, яких може бути і нескінченно багато. Ці повідомлення покривають весь простір елементарних подій $\Omega = E_1 + E_2 + \dots + E_n$ і не мають спільних точок, крім меж. Інформаційна ентропія визначає середню кількість інформації, що припадає на одне повідомлення з ансамблем повідомлень.

Якщо ймовірності реалізацій цих подій є $P(E_1), P(E_2), \dots, P(E_n)$, $P(E_1)+P(E_2)+\dots+P(E_n)=1$, то інформаційна ентропія є математичним очікуванням кількості інформації, тобто середньою кількістю інформації, що припадає на одне повідомлення

$$H = -P(E_1)\log_2[P(E_1)] - P(E_2)\log_2[P(E_2)] - \dots - P(E_n)\log_2[P(E_n)]$$

або

$$H = -\sum_{i=1}^n P(E_i) \log_2 [P(E_i)].$$

Можна сказати і так, що інформаційна ентропія характеризує невизначеність інформації, представленої ансамблем повідомлень. Вона дорівнює нулю, коли ймовірності всіх повідомлення ансамблю, крім одного, дорівнюють нулю, а це єдине має ймовірність одиницю. Дійсно, довільний доданок останньої суми

$$\lim_{P(E_i) \rightarrow 0} H = -\lim_{P(E_i) \rightarrow 0} P(E_i) \log_2 [P(E_i)] = 0,$$

$$\lim_{P(E_i) \rightarrow 1} H = -\lim_{P(E_i) \rightarrow 1} P(E_i) \log_2 [P(E_i)] = 0.$$

Аналіз показує, що максимум інформаційної ентропії досягається, коли всі повідомлення ансамблю $E_1, E_2, \dots, E_n$ рівноправні і $P(E_1) = P(E_2) = \dots = P(E_n) = 1/n$. Це означає, що інформація про елементи ансамблю повідомлень максимально невизначена. Кожна з подій ансамблю подій відбуватиметься з тою самою ймовірністю. У цьому разі

$$H = \log_2(n).$$

Це так звана формула Хартлі. У цьому разі кількість інформації в одному повідомленні і середня кількість інформації в ансамблі повідомлень, що припадає на одне повідомлення, збігаються, тобто інформаційна ентропія збігається к кількістю інформації в довільному повідомленні.

У разі представлення інформації як неперервної функції в просторі елементарних подій ми повинні пов'язати її з густиною розподілу ймовірностей повідомлень $P_\xi(x)$ і розглядати як густину інформації

$$i_\xi(x) = -\log_2 [P_\xi(x)].$$

При цьому інформаційна ентропія визначатиметься так

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} P_\xi(x) \log_2 [P_\xi(x)] dx.$$



Галактика. Кількість зірок у нашій галактиці оцінюється у $2-4 \cdot 10^{11}$.
Можливий лише статистичний опис

Нехай є система з n подій B_i ($i=1, \dots, n$) і з n повідомлень про ці події A_i ($i=1, \dots, n$). Тоді середня кількість інформації, що припадає на одне таке повідомлення, визначається так

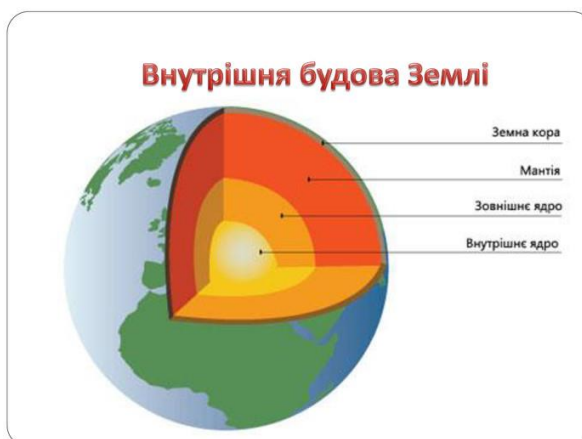
$$H = \sum_{i=1, j=1}^n P(A_i B_j) \log_2 \frac{P(A_i B_j)}{P(A_i)P(B_j)}.$$

Якщо інформація в повідомленнях A_i ($i=1, \dots, n$) є абсолютно правдивою, то ці повідомлення просто збігаються з самими подіями B_i ($i=1, \dots, n$), тобто $A_i \equiv B_i$. У цьому разі $P(A_i B_j) = 0$, $i \neq j$ і $P(A_i B_i) = P(B_i) = P(A_i)$ і ми отримуємо вже відому формулу

$$H = - \sum_{j=1}^n P(B_j) \log_2 P(B_j).$$

Якщо ж між подіями і повідомленнями немає жодного зв'язку, тобто $P(A_i B_j) \rightarrow 0$, $i, j=1, \dots, n$, то $H=0$.

Задача. Нехай у даній місцевості зимою ймовірність випадення снігу $1/5$. Здійснюється прогноз погоди. Він може містити помилку. Ця помилка залежить від самого прогнозу. При прогнозуванні рідкої події – снігу помилка більша. Її ймовірність нехай буде $1/2$. При прогнозуванні відсутності снігу, тобто події, що відбувається значно частіше, помилка менша. Нехай її



Описати властивості нашої планети можливо лише в межах статистичної фізики.

ймовірність становить $1/10$. Яку середню кількість інформації несе прогноз погоди. Іншими словами, яка середня кількість інформації припадає на одне з двох можливих повідомлень: буде сніг або снігу не буде.

Розв'язання. Нехай подія A_1 - випав сніг. Ймовірність цієї події $P(A_1)=1/5$. Подія A_2 - сніг не випав. Її ймовірність $P(A_2)=4/5$. Можливі два прогнози погоди: B_1 - сніг випав і B_2 - сніг не випав. Ймовірності правдивості першого прогнозу в залежності від того, що насправді відбулось, буде $P(A_1|B_1)=1/2$, другого $P(A_1|B_2)=1/10$. Відповідно, для другого прогнозу $P(A_2|B_1)=1/2$, $P(A_2|B_2)=9/10$. Нам потрібно знайти ймовірності прогнозу снігу $P(B_1)$ і відсутності снігу $P(B_2)$. Для цього використаємо той факт, що ймовірність випадення снігу задовольняє формулі повної ймовірності та умові нормування

$$P(A_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) + P(B_2)P(A_1|B_2),$$

$$P(B_1) + P(B_2) = 1.$$

Розв'язуючи цю систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь щодо шуканих ймовірностей, матимемо $P(B_1)=1/4$, $P(B_2)=3/4$. Так само можна було б

використати і формулу повної ймовірності для ймовірності невинищення снігу.
Тепер легко знайти ймовірності наступних добутоків

$$P(A_1B_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) = \frac{1}{8}, \quad P(A_1B_2) = P(B_2)P(A_1|B_2) = \frac{3}{40},$$

$$P(A_2B_1) = P(B_1)P(A_2|B_1) = \frac{1}{8}, \quad P(A_2B_2) = P(B_2)P(A_2|B_2) = \frac{27}{40}.$$

Використовуючи формулу для середньої кількості інформації, що припадає на одне повідомлення, отримуємо

$$I = \sum_{i=1, j=1}^2 P(A_iB_j) \log_2 \frac{P(A_iB_j)}{P(A_i)P(B_j)} = 0.13.$$

Припустимо тепер, що прогноз погоди завжди абсолютно вірний. Тоді, якщо прогноз B_1 , то обов'язково відбудеться подія A_1 з ймовірністю

$$P(A_1|B_1) = P(B_1) = 1/5.$$

При цьому

$$P(A_1|B_2) = P(A_2|B_1) = 0.$$

Відповідно

$$P(A_2|B_2) = P(B_2) = 4/5, \quad P(A_1B_1) = P(B_1)P(A_1|B_1) = (1/5)^2,$$

$$P(A_2B_2) = P(B_2)P(A_2|B_2) = (4/5)^2, \quad P(A_1B_2) = P(A_2B_1) = 0.$$

Тепер

$$I = \sum_{i=1}^2 P(A_i) \log_2 P(A_i) = 0.71.$$

9. Мікроканонічний і канонічний розподіли

Розглянемо замкнуту систему. Енергія такої системи зберігається. Такий стан системи з заданою енергією назовемо макроскопічним. Цьому макроскопічному стану звичайно відповідає велика кількість мікроскопічних станів. Наприклад, системою є газ у заданому об'ємі. Мікроскопічна фіксація

стану такої системи відповідає фіксації всіх координат і швидкостей окремих молекул. Кожна така фіксація є мікроскопічним станом системи. У наступний момент часу система знаходитиметься у іншому мікроскопічному стані. Проте макроскопічний стан системи, що визначається її енергією, той самий. Можна говорити про розподіл мікроскопічних станів системи при заданому макроскопічному. Найпростішим таким розподілом є мікроканонічний розподіл. В рамках такого розподілу всі мікроскопічні стани вважаються рівноправними.

Нехай система складається з N молекул. Якщо враховувати лише поступальні ступені вільності, то таких ступенів вільності буде 3^N координат і 3^N швидкостей (імпульсів). Можна розглянути простір з 3^{2N} вимірами. Тоді стан системи визначатиметься точкою у цьому просторі. Рівноправність мікроскопічних станів означає, що за достатньо великий проміжок часу траєкторія системи рівномірно заповнить ту частину простору, яка обмежується умовою сталості енергії. Ця умова виділяє у даному просторі гіперповерхню 3^{2N-1} вимірів. Ймовірність знаходження системи в певній області цієї гіперповерхні, очевидно, пропорційна площі цієї області. Мірою площі є функція $\Gamma(E)$, розглянута нами вище. Тоді ймовірність знаходження системи в мікроскопічних станах, що відповідають області $d\Gamma(E)$ і енергії $E_0 \in$

$$dW(E) = \text{const} \delta(E_0 - E) d\Gamma(E).$$

Розглянемо тепер макроскопічну замкнуту систему як таку, що складається з термостату і малої, але макроскопічної її частини – підсистеми. Позначимо енергію підсистеми через E , а функцію розподілу енергетичних станів через $\Gamma(E)$. Відповідно, енергію термостату позначимо через E' , а функцію розподілу її енергетичних станів через $\Gamma'(E')$. Нагадаємо, що у разі квазидискретного енергетичного спектру функція розподілу енергетичних станів

нормована на їх загальну кількість. Очевидно, що має місце закон збереження енергії

$$E + E' = E_0.$$

Для системи в цілому вважатимемо справедливим мікродискретний розподіл ймовірностей. Тепер він матиме вигляд

$$dW(E, E') = \text{const} \delta(E_0 - E - E') d\Gamma(E) d\Gamma'(E').$$

Функцію розподілу ймовірностей для підсистеми ми отримаємо зінтегрувавши останній вираз за функцією розподілу енергій термостату

$$dW(E) = \text{const} d\Gamma(E) \int \delta(E_0 - E - E') d\Gamma'(E').$$

Якщо енергетичний спектр підсистеми квазідискретний, то має місце наступне співвідношення

$$W(E) = w(E) d\Gamma(E).$$

Ймовірність знаходження підсистеми в одному з енергетичних станів квазідискретного спектру буде такою

$$w(E_n) = \text{const} \int \delta(E_0 - E_n - E') d\Gamma'(E').$$

Від інтеграла Стільється доцільно перейти до визначеного інтегралу. Оскільки

$$d\Gamma'(E') = \frac{d\Gamma'(E')}{dE'} dE',$$

то

$$w(E_n) = \text{const} \int \delta(E_0 - E_n - E') \frac{d\Gamma'(E')}{dE'} dE'.$$

Похідну від функції розподілу енергетичних станів термостату можна з високою точністю знайти з тих міркувань, що її густина розподілу відмінна від нуля у надзвичайно вузькому інтервалі значень енергії термостату $E_0 - \Delta E/2 < E < E_0 + \Delta E/2$, де $\Delta E/2$ - максимальне відхилення енергії термостату від повної енергії замкнутої системи. Тому можна покласти у виразі для

похідної $dE' = \Delta E$ і винести цю величину з під знаку інтегралу, об'єднавши її з довільно сталою. Для цього, фактично, нескінченно малого інтервалу диференціал функції розподілу енергетичних станів термостату збігається з їх загальною кількістю

$$d\Gamma'(E') = \Gamma'(E_0 + \Delta E/2) - \Gamma'(E_0 - \Delta E/2) = \Gamma'(E') = \exp[S'(E')].$$

Тут ми використали ту обставину, що за означенням ентропія для довільної енергії системи (у даному разі термостату) дорівнює логарифму кількості станів з енергіями, що не перевищують цю енергію. Таким чином,

$$w(E_n) = \text{const} \int \delta(E_0 - E_n - E') \exp[S'(E')] dE'.$$

Оскільки енергія термостата мало відрізняється від енергії всієї системи, то ентропію термостату можна розвинути в ряд Тейлора в околі енергії системи. З точністю до лінійних членів розвинення матимемо

$$S'(E') = S'(E_0) + \frac{dS'(E_0)}{dE'}(E' - E_0) = S'(E_0) - \frac{dS'(E_0)}{dE'} E_n.$$

За означенням температури системи, однакової і для підсистеми, і для термостату,

$$\frac{dS'(E_0)}{dE'} = \frac{1}{T}.$$

Тепер інтегрування легко виконується і

$$w(E_n) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right).$$

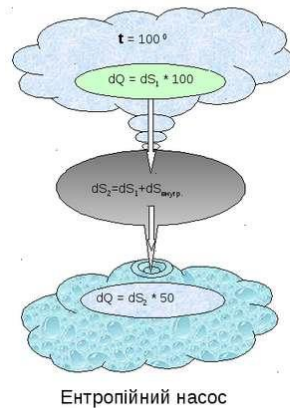
Цей розподіл ймовірностей для енергії підсистеми називається канонічним розподілом. Стала Z знаходиться з умови нормування

$$Z = \sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{T}\right)$$

і називається статистичною сумою підсистеми.

Перший з двох основних класів необоротних процесів :

В ізолюваних системах в околі рівноваги дисипація за рахунок виробництва ентропії $dS_i > 0$ за всіх умов знищує будь-які структури.



Ентропія володіє властивістю адитивності:

$$dS = dS_i + dS_e$$

А чи може бути $dS_e < 0$? - **МОЖЕ !!!**

Для початку формування структур необхідно перевищення експорту ентропії над її внутрішнім виробництвом:

$$|dS_e < 0| > dS_i$$

У близькому до рівноваги стані переважає dS_i , отож для процесів самоорганізації важливим є якнайбільший відхід системи від рівноважного стану

Таким чином, канонічний розподіл є наслідком припущень про рівноправність всіх мікростанів, що відповідають макроскопічному стану системи із заданою енергією, сталість густини ймовірностей функції розподілу ймовірностей енергетичних станів системи (фактично використання геометричного означення ймовірностей), сталість ймовірностей різних енергетичних станів (фактично використання класичного означення ймовірностей), сталість густини енергетичних станів системи.

У канонічному розподілі присутні характеристики і термостату і підсистеми. Енергії характеризують стан системи. Температура характеризує стан термостату.

10. Роль флуктуацій для фізичних систем

Розглянемо роль флуктуацій залежно від розмірів системи. У статистичній фізиці величина $D\xi$ носить назву квадратичної флуктуації. Якщо $D\xi$ мала, то можливі значення ξ близькі до її середнього значення. Малість

$D\xi$ щодо $M\xi$ характеризує величина $\delta\xi = \sqrt{D\xi}/M\xi$, що називається відносною флуктуацією. Її малості відповідає умова $\delta\xi \ll 1$.

Важливу роль у статистичній фізиці відіграє наступна теорема. Якщо система складається з N незалежних частин, то відносна флуктуація довільної адитивної функції, що характеризує цю систему, обернено пропорційна кореню з кількості незалежних частин N тобто $\delta\xi \propto 1/\sqrt{N}$.

Адитивність випадкової величини ξ означає, що її значення для цілої системи дорівнює сумі значень ξ_k , $k=1,2,3,\dots,N$, де ξ_k у такій же мірі характеризує k -ту незалежну систему як ξ цілу систему, отже

$$\xi = \sum_{k=1}^N \xi_k.$$

Очевидно подібна рівність має місце і для математичних очікувань, тобто

$$M\xi = \sum_{k=1}^N M\xi_k,$$

оскільки відповідно до властивості математичного очікування

$$M \sum_{k=1}^N \xi_k = \sum_{k=1}^N M\xi_k.$$

Обчислимо тепер квадратичну флуктуацію (дисперсію) величину ξ , тобто величину $D\xi$. Для суми незалежних випадкових величин ξ_k має місце наступна властивість дисперсії

$$D \sum_{k=1}^N \xi_k = \sum_{k=1}^N D\xi_k.$$

тому

$$D\xi = \sum_{k=1}^N D\xi_k.$$

Якщо випадкові величини ще й однаково розподілені та з однаковими математичними очікуваннями і дисперсіями, тобто

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \dots = M\xi_N = \mu,$$

$$D\xi_1 = D\xi_2 = \dots = D\xi_N = \sigma^2,$$

то

$$M\xi = \mu N, \quad D\xi = \sigma^2 N,$$

і

$$\delta\xi = \frac{\sqrt{D\xi}}{M\xi} = \frac{\sigma\sqrt{N}}{\mu N} = \frac{\sigma}{\mu\sqrt{N}}.$$

Якщо твердження про однаковість розподілу випадкових величин є неточним, то остання рівність стає наближеною.

У фізиці випадковою величиною ξ може бути енергія, імпульс, момент імпульсу тощо. У соціології – рівень сепаратизму, патріотизму тощо. Отриманий результат свідчить про наступне. Із зростанням кількості незалежних частин системи N абсолютна флуктуація величини ξ зростає як корінь квадратний з кількості частин

$$\sqrt{D\xi} \propto \sqrt{N},$$

а відносна падає як корінь квадратний з кількості частин

$$\delta\xi \propto 1/\sqrt{N}.$$

Якщо мова йде про молекули газу і їх кінетичну енергію, то із зростанням їх кількості зростає й ймовірність таких значень кінетичної енергії, що суттєво перевищують її середнє значення для всіх молекул. При цьому вплив таких флуктуацій на енергію всієї системи із зростанням N спадає. Якщо мова йде про сепаратизм, то із зростанням кількості адміністративних одиниць як $\sqrt{N}$ зростає і ймовірність виходу з під контролю країни окремих адміністративних одиниць, але як $1/\sqrt{N}$ спадає реальна загроза для країни від такого бунту. За



малої кількості адміністративних одиниць ймовірність виходу з під контролю мала, але наслідки такої події руйнівні. Як і завжди – проблема у пошуку золотієї середини.

Взявши в якості фізичної системи всіх громадян довільної країни, в якості випадкової величини – майно всіх громадян, а в якості випадкових величин ξ_k – майно окремих громадян бачимо, що ймовірність появи багатішої людини серед громадян країни зростає пропорційно кореню квадратному з кількості громадян, а вплив такої багатішої людини на перебіг подій у країні спадає обернено пропорційно тій самій величині.

11. Статистика багатства. Показниковий розподіл

Розглянемо знаходження густини розподілу багатства для спільноти людей. Людей вважатимемо ідентичними, а їх взаємодію між собою зведемо до обміну матеріальними ресурсами або грошима, що можливо внаслідок торгівлі, роботи за наймом, азартної гри, або насильства. Нехай ξ – кількість грошей у довільної людини, а взаємодія між ними має випадковий характер. Вважатимемо величину ξ неперервною. Отже, ми маємо систему – спільноту людей, що складається з великої кількості підсистем – окремих людей, а її стан

характеризується одним неперервним параметром – кількістю грошей в окремої людини. Нехай $P_{\xi}(x)$ – густина розподілу, що описує випадкову величину ξ .

При цьому

$$dp = P_{\xi}(x)dx$$

- ймовірність того, що довільна людина має гроші в інтервалі $[x, x+dx]$ $[x, x+dx]$.

Перша умова, якій задовольнятиме густина ймовірності – це умова нормування.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x)dx = 1.$$

Якщо вважати, що кількість грошей окремої людини величина невід'ємна, тобто люди не дають гроші один одному в борг, то нижня межа інтегралу нормування дорівнюватиме нулю, в іншому разі $-\infty$. При обміні грошима двох людей має виконуватись закон збереження грошей, отже другою умовою буде наступна.

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4.$$

В якості третьої умови візьмемо умову незалежності густини розподілу від часу, тобто умову її стаціонарності. Цю умову можна записати так

$$P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = P_{\xi_1 \xi_2}(x_3, x_4)$$

з наступним поясненням. Двоє людей до зустрічі мали x_1 і x_2 грошей. Після зустрічі x_3 і x_4 відповідно. Густина функції розподілу двох випадкових величин ξ_1 і ξ_2 внаслідок зустрічі не повинна змінитись інакше вона залежала б від часу.

Тобто матиме місце попередня рівність. Якщо випадкові величини ξ_1 і ξ_2 вважати незалежними, тобто кожна з двох осіб має своє незалежне джерело походження грошей, то

$$P_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2) = P_{\xi_1}(x_1)P_{\xi_2}(x_2).$$

Аналогічно

$$P_{\xi_1 \xi_2}(x_3, x_4) = P_{\xi_1}(x_3)P_{\xi_2}(x_4).$$



Умова стаціонарності є основним рівнянням для знаходження шуканої густини розподілу. Його доцільно об'єднати з законом збереження. У висліді

$$P_{\xi_1}(x_1)P_{\xi_2}(x_2) = P_{\xi_1}(x_3)P_{\xi_2}(x_1 + x_2 - x_3).$$

Спростити це функційне рівняння можна лише замінивши його диференціальним рівнянням. Для цього злогарифмуємо його

$$\ln[P_{\xi_1}(x_1)] + \ln[P_{\xi_2}(x_2)] = \ln[P_{\xi_1}(x_3)] + \ln[P_{\xi_2}(x_1 + x_2 - x_3)],$$

а далі здиференціюємо спочатку за змінною x_1 , а тоді - x_2 . У висліді

$$\frac{1}{P_{\xi_1}(x_1)} \frac{dP_{\xi_1}(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{P_{\xi_2}(x_1 + x_2 - x_3)} \frac{dP_{\xi_2}(x_1 + x_2 - x_3)}{dx_1},$$

$$\frac{1}{P_{\xi_2}(x_2)} \frac{dP_{\xi_2}(x_2)}{dx_2} = \frac{1}{P_{\xi_2}(x_1 + x_2 - x_3)} \frac{dP_{\xi_2}(x_1 + x_2 - x_3)}{dx_2}.$$

Оскільки збігаються праві частини останніх двох рівностей, то збігаються і ліві, тобто

$$\frac{1}{P_{\xi_1}(x_1)} \frac{dP_{\xi_1}(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{P_{\xi_2}(x_2)} \frac{dP_{\xi_2}(x_2)}{dx_2}.$$

У цьому рівнянні лівою частиною є функція лише змінної x_1 , правої – лише функція змінної x_2 . Дві функції, що залежать від різних змінних збігаються лише у разі, якщо вони є сталими величинами, тобто

$$\frac{1}{P_{\xi_1}(x_1)} \frac{dP_{\xi_1}(x_1)}{dx_1} = \frac{1}{P_{\xi_2}(x_2)} \frac{dP_{\xi_2}(x_2)}{dx_2} = -\alpha$$

де α - довільна стала. Останню подвійну рівність можна також записати так

$$\frac{1}{P_{\xi}(x)} \frac{dP_{\xi}(x)}{dx} = -\alpha,$$

де $x = x_1, x_2$. Отже, отримуємо наступне звичайне диференціальне рівняння

$$d \ln[P_{\xi}(x)] = -\alpha dx.$$

Його розв'язком є

$$P_{\xi}(x) = A \exp(-\alpha x),$$

де A – довільна стала, яку можна знайти з умови нормування, а саме:

$$A \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x) dx = 1.$$

Звідси $A = \alpha$. Таким чином, шукана густина розподілу має вигляд

$$P_{\xi}(x) = \alpha \exp(-\alpha x)$$

і залежить від єдиного параметра α . Для його знаходження потрібно врахувати всю суму грошей розподілених між людьми. Для цього обчислимо математичне очікуванням випадкової величини ξ

$$M \xi = \int_0^{\infty} x P_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\alpha} = \mu.$$

З іншого боку, відповідно до закону великих чисел,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{\xi} = \mu.$$

Тут вибіркове середнє

$$\bar{\xi} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k = \frac{E}{N},$$

де E – загальна сума грошей розподілених між людьми – їх спільне багатство. Отже, якщо кількість людей достатньо велика, то математичне очікування означатиме середнє багатство всієї спільноти, що припадає на одну людину

$$\mu \approx E / N$$

і

$$P_{\xi}(x) = \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right).$$

Отриманий результат має просту інтерпретацію. Якщо N особам видати однакову суму грошей E/N і надалі не втручатись в їх стосунки, то через деякий час виникне майнова нерівність, що описується показниковим законом. При цьому найбільша кількість людей не матиме майна взагалі або матиме його дуже мало $x \ll E/N$, а незначна частина матиме його дуже багато $x \gg E/N$.

Для показникового закону розподілу дисперсія дорівнює

$$D\xi = \mu^2.$$

Дисперсія є характеристикою нерівномірності розподілу багатства між окремими підсистемами – людьми. Отже, чим більшим є частка багатства системи, що припадає на окрему підсистему – людину, тим нерівномірніше розподілене це багатство між людьми і навпаки. Хочеш бути багатим - терпи соціальну нерівність. Хочеш соціальну рівність – терпи бідність.

Знання функції розподілу ймовірностей системи дозволяє знайти всі термодинамічні функції розглянутої системи. Внутрішня енергія, що припадає на одну підсистему, це просто математичне очікування випадкової величини ξ , яке ми вже знайшли вище

$$\varepsilon = \mu.$$

Внутрішня енергія, що припадає на одиницю об'єму визначиться так

$$E = n\mu.$$

Для знаходження ентропії, що припадає на одну підсистему, використаємо її означення

$$s = - \int_0^{\infty} P_{\xi}(x) \ln[P_{\xi}(x)] dx.$$

Тут слід зауважити, що в даній задачі ми маємо справу з розмірними фізичними величинами і отримані результати матимуть лише якісний характер. Для деяких неперервних випадкових величини вони залежатимуть від їх одиниць вимірювання. Зокрема це стосується ентропії. Для класичних фізичних систем типу електронів фазовий простір системи вдається розділити на комірки, в кожній з яких може перебувати лише один електрон. Це дозволяє отримувати при інтегруванні однозначний результат. У нашому випадку це питання вимагає окремого дослідження. У висліді отримуємо вираз для ентропії

$$s = \ln(\mu) + 1,$$

у загальному випадку

$$s = \ln(\mu) - \ln(\mu_0),$$

що містить логарифм розмірної величини. Тобто ентропія залишається визначеною з точністю до довільної сталої, у той час як зміна ентропії визначена однозначно. Для зручності в якості довільної сталої ми обрали величину $-\ln(\mu_0)$, де μ_0 також довільна стала. Така проблема виникає і в теорії інформації. Там вона розв'язується використанням природної одиниці вимірювання для інформації – біта, що відповідає інформації про вибір з двох можливих рівноправних варіанта одного. Це найпростіша ситуація, інформацію про яку можна оцінювати. У разі фінансової свободи такою природною одиницею вимірювання статків окремої людини нам видається вартість прожиткового мінімуму, що забезпечує виживання людини. Якщо в якості довільної μ_0 сталої вибрати саме прожитковий мінімум, нижче якого статки

людини опускатись не можуть, то ми матимемо логарифм вже безрозмірної величини

$$s = \ln(\mu / \mu_0).$$

Оскільки ентропія є мірилом свободи підсистем, що складають систему, то фінансова свобода у суспільстві тим більша, чим більше його багатство або внутрішня енергія. Температуру системи можна обчислити однозначно, виходячи з її означення

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial s}{\partial \varepsilon} \right)_V.$$

Звідси ми отримуємо, що

$$T = \mu.$$

Тут температура визначається у тих же одиницях, що і гроші. Тобто фінансова температура людської спільноти – це середня частка її багатства, що припадає на одну людину. Чим вища фінансова температура суспільства, тим більше його багатство. Очевидно, що мінімально можливою температурою буде температура $T_0 = \mu_0$. Якщо температура системи дорівнює мінімальній, то ентропія такої системи дорівнює нулю, що цілком узгоджується з фізичним і інформаційним означенням ентропії.

Для знаходження вільної енергії, що припадає на одну людину, також використаємо її означення

$$f = \varepsilon - sT / T_0.$$

Маємо

$$f = -\ln(T / T_0) T / T_0.$$

Вільна енергія всієї системи буде

$$F = Nf = fnV.$$

Вона також залежатиме від вибору системи одиниць. Тут n - густина системи, V - об'єм. Оскільки тиск у системі визначається як

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T,$$

то і тиск залежатиме від вибору системи одиниць

$$P = n \ln(T/T_0) T/T_0.$$

Фінансовий тиск проявляється у стосунках між людськими спільнотами. Чим вища фінансова температура і густина населення у даної спільноти, ти вищим буде її тиск на інші спільноти.

У розглянутому випадку випадкова величина, що характеризувала стан окремої підсистеми, була неперервною. Отримані результати легко узагальнити і на випадок існування у системи дискретного набору станів. У цьому разі

$$P_n = \frac{1}{Z} \exp \left(- \frac{x_n}{T} \right).$$

Всі термодинамічні функції тепер визначатимуться однозначно. Тут замість інтеграла нормування буде присутня так звана статистична сума

$$Z = \sum_n \exp \left(- \frac{x_n}{T} \right).$$

Показниковий розподіл базується на законі збереження субстанції, якою обмінюються люди. Цією субстанцією можуть бути не лише енергія, для систем частинок, гроші для людей, але і такі субстанції як свобода або влада. Для свободи можна використовувати таку одиницю вимірювання, як і для інформації. Тобто, якщо брати логарифм за основою 2, то мінімальна порція свободи, це коли на вибір у вас є лише два варіанти і обидва для вас однаково доступні. Це означає, що в обох випадках ймовірність вашого вибору дорівнює $1/2$. Тоді свобода такого вибору дорівнюватиме 1. Влада – це свобода вибору за вас, тому одиниця вимірювання влади така ж сама. Влада, свобода і гроші у людській спільноті зберігаються як для суспільства у цілому, так і у висліді парної взаємодії людей. Показниковий закон розподілу влади, свободи і грошей є універсальним для довільного суспільства: рабовласницького, феодального,

капіталістичного, соціалістичного, націонал-соціалістичного, фашистського. Звичайно у всіх видах громадського ладу той, хто має владу над іншими, той має і свободу для себе, Хто має владу над іншими, той має і гроші для себе, або їх еквівалент у вигляді матеріальних благ. Диктатори всіх епох відбирали свободу вибору у більшості населення країн і концентрували у своїх руках колосальну свободу вибору для себе. Їх одноосібні рішення могли коштувати населенню мільйонів життів. Звичайно вони мали і необмежений доступ до матеріальних ресурсів країни, хоча більшість населення могла перебувати у злиднях. Радянський союз часів сталінізму був прикладом якраз такої диктатури і відповідної концентрації свободи, влади і матеріальних ресурсів в одних руках.

До речі – вірне і зворотне твердження. Той, хто не мав влади, не мав і свободи на власні вчинки, на власні думки, на власні висловлювання. При цьому він, як правило, ледь животів у крайніх злиднях. Переважна більшість людей у Радянському союзі епохи сталінізму жила у селі. Вони не мали паспортів, не мали права, вільного пересування країною, їм не платили за роботу у колгоспах, вони не мали права не виходити на роботу, для них не існувало поняття про пенсійний вік. Відповідно, вони жили у страшних злиднях. Тут відсутність свободи, влади і матеріальних ресурсів було долею більшості населення країни у повній відповідності до показникового закону.

12. Статистика багатства. Канонічний розподіл

Нехай наша система складається з N підсистем. Кожна підсистема може знаходитись в одному з $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \dots$ станів. Кількість підсистем у довільному стані r гзначимо через N_r . Вважатимемо, що перехід підсистеми з одного в інший можливий лише у разі, якщо як мінімум одна інша підсистема також

змінить свій стан. Надалі обмежимося не дуже густою системою, в якій в кожному акті такого переходу приймають участь лише дві підсистеми. Позначимо через $W(r,s|r',s')$ ймовірність того, що дві підсистеми у висліді взаємодії за одиницю часу перейдуть зі станів r,s у стани r',s' . Вважатимемо, що ймовірність таких переходів не залежатиме від ступеню заповнення кінцевих станів. Кількість таких переходів за одиницю часу визначиться як

$$W(r,s|r',s')N_{r'}N_{s'}$$

Кількість зворотних переходів визначиться аналогічно і теж не залежатиме від наповненості початкових станів

$$W(r',s'|r,s)N_rN_s.$$

Через повну рівноправність початкових і кінцевих станів має місце рівність

$$W(r,s|r',s')=W(r',s'|r,s).$$

За час dt кількість підсистем у довільному стані r зміниться на величину

$$dN_r = \sum_{s,r',s'} W(r,s|r',s')(N_{r'}N_{s'} - N_rN_s)dt.$$

Умовою стаціонарного стану системи є нульова зміна цієї кількості, що можливо лише за умови

$$N_{r'}N_{s'} - N_rN_s = 0.$$

Цього рівняння виявляється достатньо для знаходження кількості підсистем у кожному стані лише при умові, що ця кількість залежить лише від енергії відповідного стану і виконується закон збереження енергії

$$\mathcal{E}_{r'} + \mathcal{E}_{s'} = \mathcal{E}_r + \mathcal{E}_s.$$

У разі, коли підсистемами є електрони, атоми, молекули, енергія має традиційний у фізиці сенс. Якщо ж ми маємо справу з людською спільнотою, то підсистемою можна вважати окрему людину. Роль енергії тут відграватиме нерухомість або гроші тощо. Важливо, щоб зазначена субстанція при взаємодії

людей зберігалась. Наше функційне рівняння можна спростити, злогарифмувавши його

$$\ln(N_{r'}) + \ln(N_{s'}) = \ln(N_r) + \ln(N_s).$$

Воно має місце лише у разі, якщо кожний з логарифмів є лінійною функцією енергії. Тоді

$$\alpha - \beta\epsilon_{r'} + \alpha - \beta\epsilon_{s'} = \alpha - \beta\epsilon_r + \alpha - \beta\epsilon_s$$

і це рівняння автоматично виконується при виконанні закону збереження енергії. Мінус у лінійній залежності обрано для зручності. Отже,

$$\ln(N_r) = \alpha - \beta\epsilon_r$$

або

$$N_r = \exp(\alpha - \beta\epsilon_r).$$

Оскільки має місце умова нормування

$$N = \sum_r N_r,$$

то

$$N = \exp(\alpha) \sum_r \exp(-\beta\epsilon_r),$$

або

$$N_r = NZ^{-1} \exp(-\beta\epsilon_r),$$

де так звана статистична сума

$$Z = \sum_r \exp(-\beta\epsilon_r).$$

Даний розподіл називається канонічним. Очевидно, що показниковий розподіл є частинним випадком канонічного розподілу. Він відповідає випадку, коли підсумовування за станами просто замінюється інтегруванням за енергіями цих станів. У свою чергу, це можливо лише у разі, коли стани утворюють континуальну множину, всі вони рівноправні і у кожному стані може

знаходиться лише одна підсистема – людина. Здиференціювавши статистичну суму за параметром β ми отримаємо внутрішню енергію системи

$$N \frac{d \ln(Z)}{d\beta} = - \frac{N}{\sum_r \exp(-\beta \varepsilon_r)} \sum_r \varepsilon_r \exp(-\beta \varepsilon_r) = - \sum_r \varepsilon_r N_r = -E.$$

Ентропію системи можна визначити через статистичну вагу довільного стану системи, коли у першому стані знаходиться N_1 , у другому - N_2 , у довільному стані r - N_r підсистем. Цю кількість підсистем можна $N!$ різних способів розмістити у тих станах, що вони займають. При цьому підсистеми у різних станах не є рівноправними і різні їх розміщення дають інші, хоча і еквівалентні з точки зору енергії, стани всієї системи. Підсистеми в одному стані якраз є рівноправними і стан системи не зміниться, якщо підсистеми в кожному стані окремо довільним чином переставляти між собою, тому статистична вага стану системи – кількість різних, але еквівалентних з точки зору енергії станів, матиме вигляд

$$W = \frac{N!}{N_1 N_2 \dots N_r \dots}.$$

Ентропія визначається як логарифм статистичної ваги стану системи

$$S = \ln(W) = N \ln(N) - \sum_r N_r \ln(N_r)$$

Тут ми використали формулу Стирлінга. Оскільки

$$\ln(N_r) = \ln(N) - \ln(Z) - \beta \varepsilon_r,$$

то ентропію можна пов'язати із внутрішньою енергією

$$S = N \ln(Z) + \beta \sum_r \varepsilon_r N_r = N \ln(Z) + \beta E.$$

Також, виходячи з означення, можна визначити і температуру

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_V.$$

Ентропія залежить від внутрішньої енергії доволі складним чином, тому повна її похідна за енергією визначиться так

$$\frac{dS}{dE} = \frac{\partial S}{\partial E} + \left(\frac{\partial S}{\partial \beta} + \frac{\partial S}{\partial Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial E} = \beta + \left(E + \frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} \right) \frac{\partial \beta}{\partial E}.$$

Враховуючи, що

$$N \frac{d \ln(Z)}{d\beta} = \frac{N}{Z} \frac{dZ}{d\beta} = -E,$$

отримаємо

$$T^{-1} = \beta.$$

Тобто параметр β безпосередньо пов'язаний з температурою системи. Якщо випадковою величиною вважати наявні у людини гроші, то у найпростішій моделі (дивись попередній параграф) температура – це середня кількість грошей у пересічної людини. Тепер кількість підсистем, що перебувають у довільному стані визначиться так

$$N_r = \frac{N}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_r}{T}\right)$$

або, мовою ймовірностей,

$$P_r = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\varepsilon_r}{T}\right).$$

Такий розподіл у фізиці називається розподілом Больцмана. Вільна енергія системи визначиться так

$$F = E - TS = -T \ln(Z).$$

Тут скрізь температуру ми вимірюємо у тих же одиницях, що і енергію, маючи на увазі її застосування не лише для фізичних систем. Подальша конкретизація всіх термодинамічних характеристик системи можлива лише при конкретизації її енергетичних станів у разі їх дискретності, і переходу від підсумовування за ними при обчисленні статистичної суми до інтегрування для неперервних з точки зору енергії станів.

13. Модель Ізинга. Формування суспільної думки

У цьому параграфі проаналізоване питання свободи виявлення волі громадян під час референдуму або виборів. В якості математичної моделі суспільства з інформаційної точки зору обрана модель Ізинга. В рамках цієї моделі проаналізовані всі термодинамічні характеристики системи: внутрішня і вільна інформаційні енергії, інформаційні ентропія і температура, інформаційна теплоємність і тиск. Результати отримані в аналітичному вигляді і пов'язують між собою три ключові інформаційні чинники, що керують поведінкою людини: інформаційне спілкування між людьми, вплив на людей засобів масової інформації і рівня освіти людей. Зроблений висновок про вирішальне значення на рівень свободи виявлення громадян саме рівня їх освіти.

Одним з ефективних застосувань розподілу Больцмана є модель Ізинга. Вона розглядає нескінчену кількість об'єктів, довільним чином розташованих у просторі. Кожний об'єкт може перебувати лише у двох станах. Для системи спінів у квантовій механіці – ці стани: спін, спрямований вверху, і спін, спрямований донизу. Для людської спільноти – це точка зору на референдумі, що передбачає відповідь так або ні. Варіантів фізичної реалізації двох станів для різних систем багато. Гамільтоніан системи N спінів – оператор енергії має вигляд

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_{ij} \mu_i \mu_j - \sum_{i=1}^N \mu_i h.$$

Тут h - напруженість зовнішнього магнітного поля, v_{ij} - енергія взаємодії між спінами, μ_i - оператор i -го спіну. Множник $1/2$ введений для того, щоб двічі не враховувати взаємодію між кожною парою спінів. Спін може набувати лише двох значень $+1$ або -1 . Якщо застосовувати термінологію людської спільноти,



Ернст Ізінг

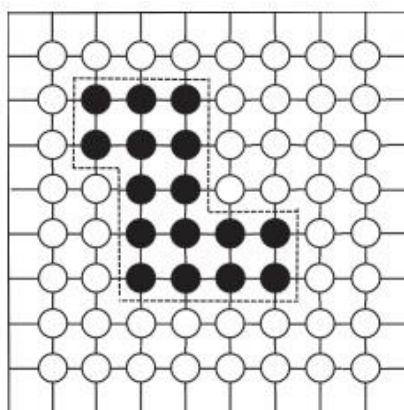
(1883-1960)

Видатний німецький фізик

то h - напруженість результуючого зовнішнього інформаційного поля, v_{ij} - енергія інформаційної взаємодії між людьми, μ_i - оператор стану i -ї людини. Людина може або підтримати тезу – стан +1 або підтримати антитезу – стан -1. Для фізичної системи одиниці вимірювання всіх величин традиційні, а для людської спільноти ми обговоримо їх пізніше.

Щодо зовнішнього інформаційного поля слід зауважити, що це алгебраїчна сума всіх полів, спрямованих як на підтримку тези, так і антитези. Якщо вони обидві підтримуються однаково активно, то результуюче інформаційне поле дорівнює нулю.

Гамільтоніан є відправною точкою у побудові функції розподілу ймовірностей мікроскопічних станів системи. За наявності такої функції, а це буде якраз розподіл Больцмана, вже можна знайти всі термодинамічні характеристики системи з мікроскопічних міркувань. Точно це можна зробити лише для ряду простих випадків. По-перше, система має бути упорядкованою, тобто мати ідеальну кристалічну структуру. По-друге, вона мусить бути



Модель Ізінга

одновимірною або двовимірною. В усіх інших випадках можливий лише наближений розв'язок із застосуванням як додаткових модельних припущень, так і числових методів. У цьому параграфі ми використаємо наближений метод - метод молекулярного поля Вейса. Цей метод враховує лише далекосяжні міжспінові кореляції і не враховує близькосяжні. Крім того, розмірність системи не грає принципової ролі. Суть його полягає у тому, що кожний спін взаємодіє з іншими спінами не безпосередньо, а через середнє поле, створюване всіма іншими спінами в місці розташування даного. Тоді гамільтоніан системи можна записати так

$$H = - \sum_{j=1}^N \mu_j H_j ,$$

де множник $1/2$ зникає через те, що енергія взаємодії кожного спіну з самоузгодженим полем враховується двічі. Один раз даний спін взаємодіє з усередненим полем, створюваним усіма іншими спінами, інший раз він сам приймає участь у створенні цього поля при взаємодії з ним всіх інших спінів. Самоузгоджене поле має вигляд

$$H_j = \sum_{i=1}^N v_{ij} \langle \mu_i \rangle + h .$$

Кутові дужки означають усереднення оператора спіну за всіма можливими значеннями всієї сукупності спінів, крім даного, тобто середній спін у системі. Очевидно, що $-1 \leq \langle \mu_i \rangle \leq 1$.

Середнє значення спіну для аналізу результатів референдуму – це різниця між значенням долі голосів поданих і проти пропозиції, що виносилась на референдум. З іншого боку середнє значення спіну – це математичне очікування спіну, знайдене за допомогою розподілу Больцмана

$$\langle \mu_i \rangle = \sum_{i=1}^2 \mu_i P_i,$$

де ми врахували, що кожний спін може набувати лише два значення +1 або -1, а ймовірність знаходження спіну у одному з станів

$$P_i = Q^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_i H_i}{T}\right).$$

Тут T - температура системи. Її сенс і одиниці вимірювання для кожної системи фізичної або соціальної свої. Статистична сума

$$Q^{-1} = \sum_{i=1}^2 \exp\left(-\frac{\mu_i H_i}{T}\right) = \exp\left(\frac{H_i}{T}\right) + \exp\left(-\frac{H_i}{T}\right).$$

Таким чином, для знаходження середнього значення окремого спіну слід розв'язати наступне трансцендентне рівняння

$$\langle \mu_i \rangle = \frac{\exp\left(\frac{H_i}{T}\right) - \exp\left(-\frac{H_i}{T}\right)}{\exp\left(\frac{H_i}{T}\right) + \exp\left(-\frac{H_i}{T}\right)}.$$

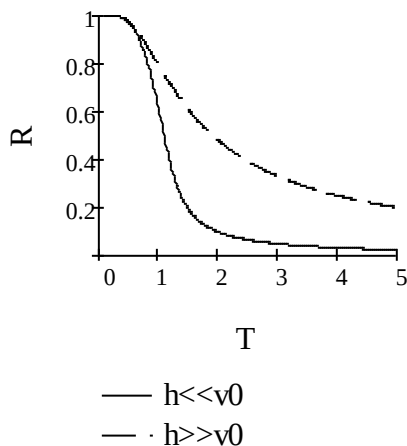
Середнє значення спіну входить в обидві частини рівняння. Якщо система спінів неупорядкована, то середнє значення спіну залежатиме від порядкового номера спіну. Якщо ж спіни розташовані у вузлах кристалічної ґратки, то така залежність зникає і середнє значення спіну є числом. Розглянемо випадок упорядкованих спінів. Модель Ізинга звичайно розглядає саме такі фізичні системи. Людські спільноти також з часом стають все більше впорядкованими.

На початковому етапі розвитку суспільства мисливці і збирачі хаотично блукали поверхнею Землі. Менш хаотично цією поверхнею блукали номади зі своїми отарами. Селяни вже жили доволі упорядковано і на рівній місцевості їх житла розташовувались або у вигляді концентричних кіл – трипільці, або вздовж осей Декартової системи координат – усі інші. Такими ж упорядкованими були і їх поля – місця праці. Більшість сучасних мешканців міст живе у дуже упорядкованих квартирах в межах велетенських багатоквартирних житлових будинках, у подібних будинках вони і працюють. Так що і для людської спільноти в більшості випадків припущення про високий ступінь упорядкування носіїв спіну є адекватним. Отже, введемо позначення $\langle \mu_i \rangle = R$, а самоузгоджене поле спростимо до вигляду $H_j = v_0 R + h$, де стала v_0 , що описує взаємодію між спінами, буде конкретизована пізніше. Отже, рівняння щодо середнього спіну матиме вигляд

$$R = \tanh(v_0 R + h).$$

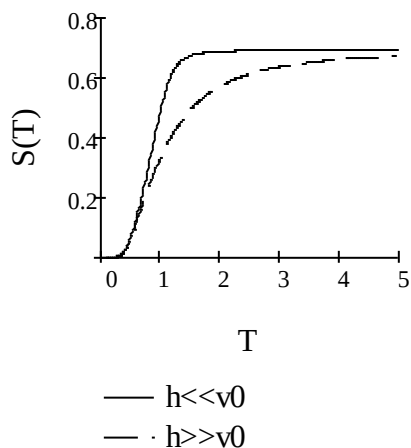
Для людської спільноти параметр h визначає напруженість інформаційного поля держави, в якому знаходиться конкретна людина. Її можна вимірювати середньою долею від часу, відпущеною людині на життя, який людина витрачає на перегляд телевізійних програм політичного характеру. Параметр v_0 може бути середньою долею часу, що людина витрачає на спілкування з іншими людьми. Температуру T слід пов'язувати з рівнем освіти людини, тобто визначати як середню долю часу, що людина витрачає на освіту і самоосвіту протягом життя від тривалості самого життя. Тут маються на увазі і всі види навчання, через які людина пройшла протягом життя. Оскільки наш аналіз має переважно якісний характер, то ми поклали $v_0 = 1$.

Залежність рівня схвалення (несхвалення) певної пропозиції – числовий розв'язок рівняння, наведеного вище, що виноситься на референдум, в залежності від рівня освіти і з врахуванням інших факторів подано на



наступному малюнку. Як видно з малюнку, ця залежність має монотонний спадний характер. Межовим значення такого спадання є нуль, що означає вирівнювання кількостей голосів за і проти внесеної на референдум пропозиції. На малюнку наведені два крайні випадки. Перший, коли час, витрачений на спілкування між людьми значно перевищує час, витрачений на перегляд політичних програм. Другий – протилежний випадок. У першому випадку при малому рівні освіти (низька температура) ступінь одностайності у голосуванні практично максимальний, а тоді із зростанням рівня освіти швидко прямує до нуля. У другому протилежному випадку спадання до нуля відбувається надзвичайно повільно. Більшу інформацію про процес голосування на референдумі можна отримати, проаналізувавши основні термодинамічні функції, що характеризують даний процес.

Кожний стан системи характеризується певною кількістю спінів, спрямованих вгору і вниз. Кожний з таких станів вироджений за енергією, оскільки спіни, спрямовані вгору, можуть бути по різному розміщені у вузлах кристалічної ґратки. Ступінь виродження станів із заданою енергією визначається за допомогою комбінаторики як кількість сполучень з N елементів по n



$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

У цьому співвідношенні зручно замінити змінну величину n на змінну величину R , яка за абсолютною величиною означає, фактично, долю спінів спрямованих у напрямку, що є для спінів переважаючим

$$R = \frac{n - (N - n)}{N} = \frac{2n - N}{N}.$$

Тепер

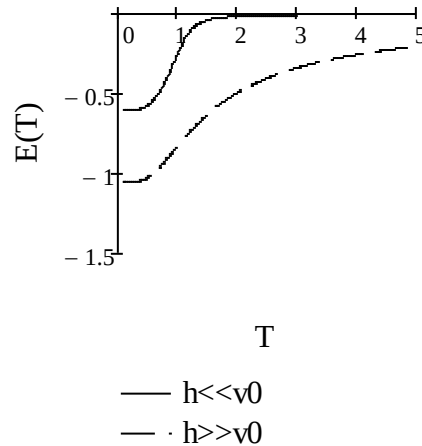
$$C_N^n = \frac{N!}{(RN)![N(1-R)]!}.$$

З виродженістю стану або статистичною вагою стану тісно пов'язана така енергетична характеристика системи як ентропія

$$S(T) = \ln(C_N^n) = -N \left[\frac{1+R}{2} \ln \left(\frac{1+R}{2} \right) + \frac{1-R}{2} \ln \left(\frac{1-R}{2} \right) \right].$$

Ентропія характеризує ступінь неупорядкованості у фізичній системі або рівень інформаційної свободи для людської спільноти. Її графік наступний (дивись вище).

Отже рівень свободи у суспільстві прямує до максимального значення, якщо кількість голосів на обидва варіанти відповіді приблизно однакові. При цьому, у разі малої напруженості зовнішнього інформаційного поля рівень максимальної свободи досягається набагато швидше, ніж у разі великої



величини напруженості. У першому випадку максимальне значення досягається майже відразу після того, як час, витрачений на самоосвіту, перевищує час, витрачений на спілкування з людьми. Наявність потужного зовнішнього інформаційного поля суттєво сповільнює досягнення максимальної свободи волевиявлення.

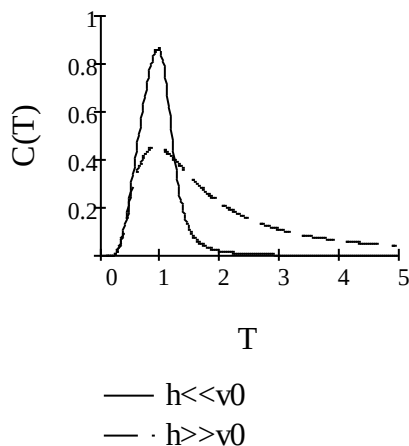
Інформаційна внутрішня енергія знаходиться усередненням гамільтоніан системи за всіма можливими станами системи, що відповідають тій же енергії

$$E(T) = -\frac{1}{2} v_0 R^2 N - RhN.$$

Ця функція має графік, з якого видно, що мінімальний рівень інформаційної внутрішньої енергії досягається при мінімальному рівні освіти. Людина знаходиться у потенційній інформаційній ямі, з якої неможливо вибратись не підвищивши свій рівень освіти. При цьому у разі сильного зовнішнього інформаційного поля глибина потенційної значно більша, ніж у разі інтенсивного спілкування з іншими людьми. Тепер можна знайти інформаційну теплоємність для сталого об'єму системи. За означенням

$$C_V(T) = \left(\frac{\partial E(T)}{\partial T} \right)_V.$$

Графік цієї функції наступний.



Графік теплоємності має характерний вигляд для того випадку, коли при певному значенні температури – температурі Кюрі спостерігається фазовий перехід другого роду. Це фазовий перехід відбувається в точці, де час, що витрачається людиною на освіту, дорівнює часу, що витрачає людина на спілкування з іншими людьми.

Важливою характеристикою системи є її вільна енергія

$$F(T) = E(T) - TS(T).$$

Знаючи інформаційну вільну енергію ми можемо знайти інформаційний тиск на людську спільноту

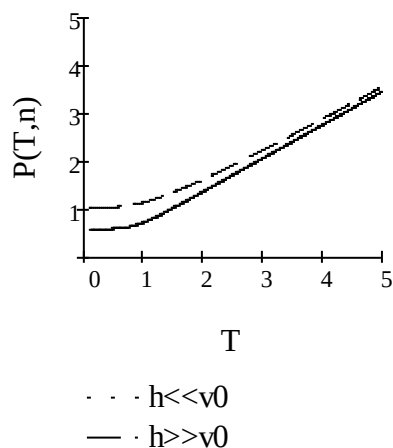
$$P = - \left(\frac{\partial F(T)}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{\partial F(T)}{\partial N} \right)_T \left(\frac{dN}{dV} \right)_T.$$

Видно, що тиск монотонно зростає із зростанням рівня освіченості людей. У разі слабого зовнішнього інформаційного поля тиск зростає швидше.

Висновки:

1. Модель Ізинга є адекватною математичною моделлю для аналізу формування суспільної думки, що висловлюється шляхом голосування на референдумі.

2. Ключовим фактором референдуму є рівень свободи виявлення людьми своєї точки зору. Математично цей рівень визначається величиною



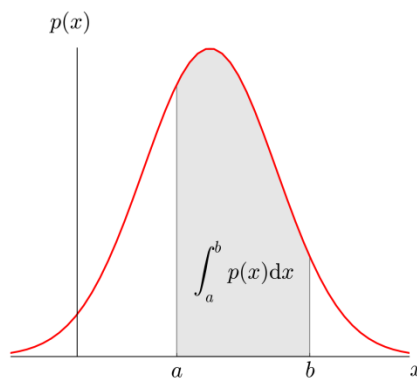
інформаційної ентропії. Остання досягає максимального значення у разі приблизно однакової кількості голосів за і проти.

3.Вирішальним фактором, що впливає на свободу вибору під час референдуму є інформаційна температура суспільства, напряду пов'язана з рівнем освіченості громадян.

4.Переход суспільства у стан з максимальною інформаційною свободою передую фазовий перехід другого роду у системі, що відбувається при певній температурі – температурі Кюрі.

14.Інформаційна ентропія і свобода вибору

Статистична фізика впевнено завойовує нові позиції в царинах, що здавалося б не мають до неї жодного стосунку. Одним з засадничих понять статистичної фізики є поняття ентропії. У 1877 році геніальний австрійський фізик Людвіг Едуард Больцман першим зрозумів зв'язок ентропії фізичної системи з ймовірністю її перебування в тому, чи іншому макроскопічному стані, пов'язаною з кількістю мікростанів, які реалізують даний макроскопічний стан У 1948 році знаменитий американський електротехнік і математик Клод Елвуд Шеннон запропонував використовувати поняття ентропії для оцінки



Ймовірність і густина ймовірності

невизначеності інформації про ту, чи іншу подію. Тим самим він започаткував нову математичну дисципліну – теорію інформації, де ентропія отримала назву інформаційної ентропії. Зв'язок інформаційної ентропії з ймовірністю настання тої, чи іншої події він запропонував у такому ж вигляді як і зв'язок перебування системи в тому, чи іншому макроскопічному стані, тобто, фактично використав для інформаційної ентропії формулу Больцмана. Розглянемо формулу для інформаційної ентропії. Нехай ми проводимо випадковий експеримент з наслідками $E_1, E_2, \dots, E_n$, що можуть реалізовуватися з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$. Тоді інформація, отримана нами у висліді цього експерименту є випадковою величиною, що приймає значення $I(E_i)$ при настанні наслідку експерименту E_i . При цьому

$$I(E_i) = -\log_2(p_i).$$

Математичне очікування інформації (інформаційна ентропія) - середня кількість інформації, що припадає на один наслідок експерименту, визначається стандартним чином

$$M(I(E_i)) = \sum_{i=1}^n p_i I(E_i)$$

Останній результат можна записати і у формі, прийнятій для теорії інформації

$$S = - \sum_{i=1}^m p_i \log_2(p_i).$$

Багато політичних процесів нагадують випадковий експеримент. Зокрема, на нашу думку, таким процесом є вибори різних рівнів. Якщо можливими наслідками цього політичного процесу вважати перемогу того, чи іншого кандидату, тобто події $E_1, E_2, \dots, E_n$ з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_n$, то для оцінки результатів виборів можна використати попередню формулу. Тепер було б доцільно використовувати замість терміну інформаційна ентропія терміну ентропія виборів, або індекс свободи виборів. Ентропія виборів залежить від двох основних факторів: кількості кандидатів і ймовірностей обрання того, чи іншого кандидата. Ентропія виборів при фіксованій кількості кандидатів досягає максимуму, якщо голоси між різними кандидатами розподілилися порівно, тобто $p_1 = p_2 = \dots = p_n$. Цю універсальну властивість ентропії застеріг ще Людвіг Едуард Больцман. У цьому разі формула для ентропії виборів матиме вигляд

$$S = \log_2(n).$$

Тобто із зростанням кількості кандидатів ентропія виборів зростає, як логарифм їх кількості. Це є ніщо інше, як знаменита формула Ральфа Гартлі [6].

Таким чином, ентропія виборів характеризує рівень невизначеності результатів виборів. Чим більше кандидатів на вибірну посаду і чим рівномірніше розподілені ймовірності перемоги різних кандидатів, тим більшою є ентропія виборів, або індекс свободи виборів. У разі двох кандидатів, що мають рівні шанси на перемогу, тобто у найпростішому політичному випадковому експерименті для ентропії виборів, так само, як і для інформаційної ентропії, ми отримуємо результатом 1. В теорії інформації така кількість інформації називається бітом. У нашому випадку її доцільніше було б назвати інакше, наприклад, фрід – від перших літер англійського слова freedom

– свобода. Саме для того, щоб у найпростішому політичному експериментів ми отримали відповідь одиницю, логарифм у формулі для ентропії виборів доцільно брати за основою два.

Принагідно зауважимо, що у деяких країнах, рівень демократії у яких вважається високим, фактично вибори і відбуваються між двома кандидатами з приблизно рівними шансами на перемогу. Ясно, що у цьому разі ентропія вибору буде доволі малою, порівняно наприклад, з Україною.

У Радянському Союзі вибори завжди проводились на безальтернативній основі. Це означає, що одна з ймовірностей, наприклад, $p_1=1$, а всі інші дорівнюють нулю. У такому разі формула для ентропії виборів дає нульовий результат.

Якщо вибори проходять у два тури, то для другого туру слід використати ту саму формулу для ентропії виборів, а результати, відповідно до універсальної властивості ентропії двох незалежних підсистем однієї системи, скласти

$$S = S_1 + S_2,$$

де

$$S_1 = -\sum_{i=1}^m p_i \log_2(p_i),$$

$$S_2 = -\sum_{i=1}^2 P_i \log_2(P_i).$$

З нашої точки зору ступінь невизначеності результатів виборів свідчить про рівень свободи виборця на таких виборах, тобто про рівень свободи самих виборів. Тому, оскільки конкуруючих варіантів означення з очевидних причин немає, ми пропонуємо ентропію виборів називати індексом свободи виборів. При цьому, якщо виборець голосує за i -го кандидата, то він реалізує свою свободу вибору у кількісному вимірі як $-\log_2(p_i)$.

Застосуємо запропоновані нами формули для оцінки індексу свободи виборів у провідних країнах Євросоюзу, а також в Україні і Московії. Для

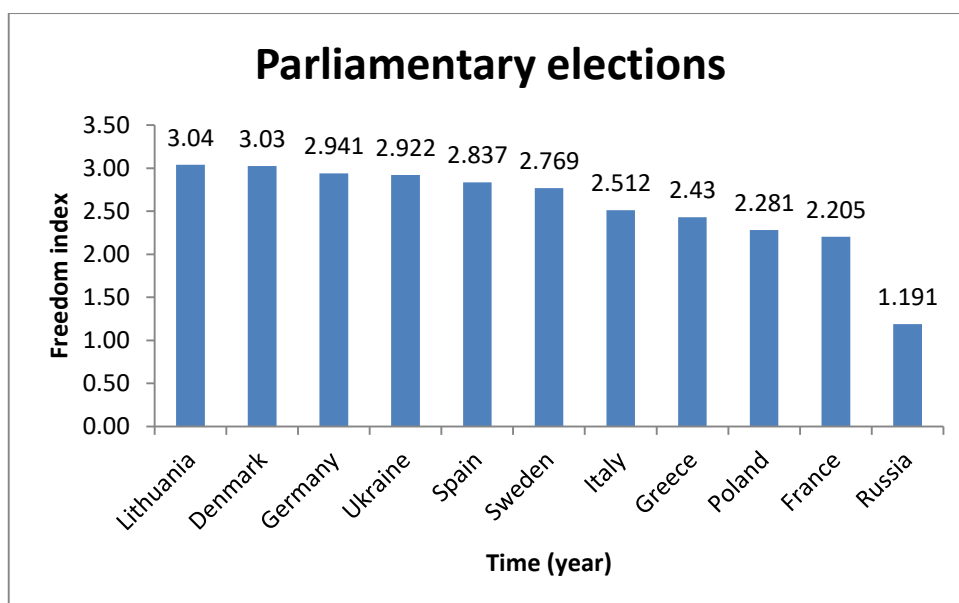


Рис. 1.

простоти візьмемо лише останні вибори у країнах Європи. Для парламентських виборів матимемо наступний результат. З наведеної діаграми видно, що для всіх розглянутих країн, а це провідні країни Євросоюзу, характерні високі значення індексу свободи виборів. Різниця між найбільшим і найменшим значеннями цього індексу порівняно невелика. Приємно, що лише три країни Євросоюзу мають значення індексу свободи вищі за його значення для України, а решта шість – нижчі. Росія ж у цьому переліку країн посідає останнє місце з великим відривом від країни Євросоюзу з найменшим значенням індексу свободи виборів – Франції. Причому, індекси свободи виборів для Франції і Росії відрізняються майже вдвічі на користь Франції.

Не в усіх країнах Євросоюзу президенти обираються шляхом прямих і загальних виборів. Серед вже розглянутих країн Євросоюзу таких країн є лише чотири. Відповідна діаграма щодо президентських виборів має наступний вигляд.

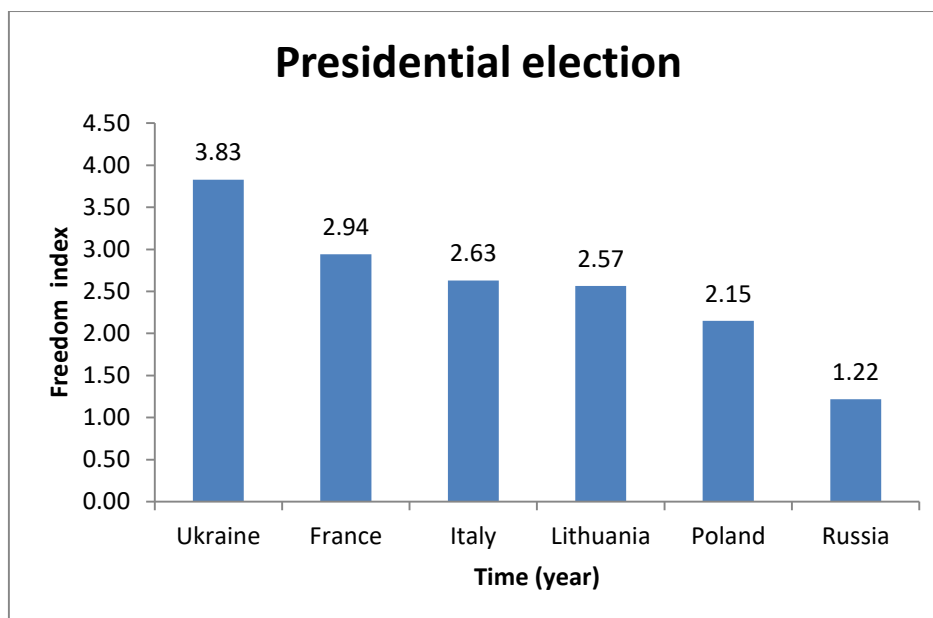


Рис. 2.

Тут уже безперечним лідером є Україна, причому з великим відривом від решти країн. Інші країни Євросоюзу знову демонструють невелику розкиданість відповідних значень індексу свободи виборів, рівень якого в цілому є доволі високим. На останньому місці за значенням індексу свободи виборів знову опинилась Росія. І знову індекси свободи виборів для країни Євросоюзу з найменшим індексом свободи виборів – Польщі і Росії відрізняються майже вдвічі тепер уже на користь Польщі.

Зауважимо, що необхідні для побудови діаграм данні легко доступні з інтернету і ми не робили на них спеціальних посилань.

Для того, щоб зрозуміти, чи величина індексу свободи виборів відображає менталітет народів і, чи може вона суттєво змінюватись у часі, потрібно проаналізувати поведінку індексу за тривалий проміжок часу в одній і тій самій країні, або у декількох країнах із спільним минулим. Для такого порівняння ми обрали Україну і Росію. Вони сотні років входили до складу однієї імперії, їх мови належать до однієї мовної групи – слов'янської, в кожній з цих країн ще присутній значний відсоток населення, що ідеологічно сформувалось в однакових політичних умовах.

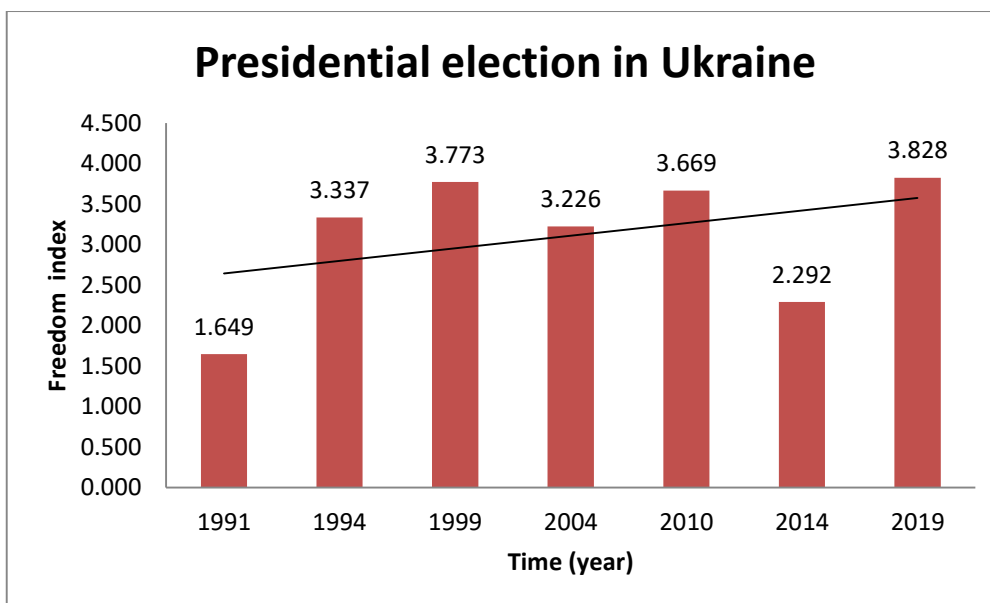


Рис. 3.

На наступній діаграмі наведені результати президентських виборів в Україні за роки незалежності.

З діаграми видно, що індекс свободи виборів в Україні є надзвичайно високим за весь період незалежності. Найнижчим цей рівень був на перших виборах в новітній історії України. На нашу думку це зумовлювалось інерцією мислення виборців, а також і кандидатів, внаслідок ще недавнього радянського минулого. Відносно малим цей рівень був і на виборах у 2014 році. Тоді на Україну насувалась неминуха війна з Російською федерацією. Бажання очолити державу у цей трагічний для України час було порівняно небагато. Вибори у два тури були б занадто небезпечними для країни. Відповідальність виборців за долю держави визначила саме такий результат. Один з кандидатів впевнено переміг уже у першому турі. Найвищим рівень свободи виборів був на останніх виборах у 2019 році. Тут вибори відбувались у два тури. Кількість кандидатів була безпрецедентно високою. Переможець другого туру у першому набрав лише трохи більше тридцяти відсотків голосів виборців. Якщо ж прослідкувати всі президентські вибори у незалежній Україні, то спостерігається чітка

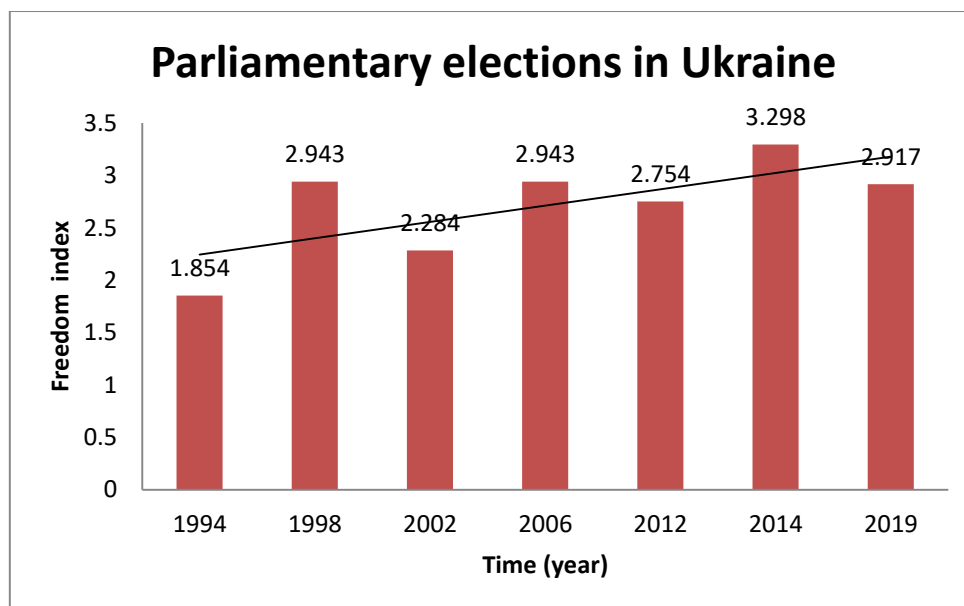


Рис. 4.

тенденція до зростання індексу свободи виборів (пряма лінія, що визначає довготривалий у часі тренд). На наступній діаграмі наведені аналогічні результати парламентських виборів в Україні за роки незалежності.

Індекс свободи на парламентських виборах також доволі високий і добре корелює з рівнем свободи президентських виборів. Він також має тенденцію до зростання. Найнижчою свобода виборів була на перших парламентських виборах у 1994 році, що узгоджується з найнижчим показником президентських виборів. Проте найвищою вона була у найважчий для України 2014 рік. Реальні шанси на перемогу отримала більша кількість політичних партій, а голоси рівномірніше, ніж на інших парламентських виборах, розподілились між ними. Обравши у травні місяці президента український виборець на патріотичній хвилі завів у парламент величезну кількість національно свідомих депутатів. Зайшли також і партії, що за інших умов не мали такого шансу. У парламенті не з'явилась велика кількість депутатів від окупованих Російською федерацією областей України, традиційно ортогональна до українських цінностей. Ще ніколи парламент не працював так ефективно, як у період з 2014 по 2019 роки.

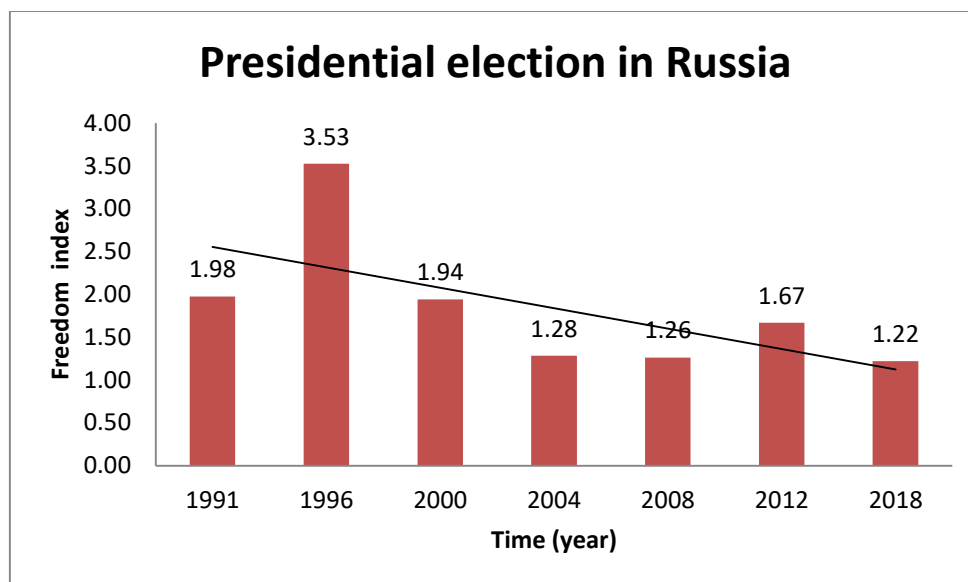


Рис. 5.

Як ми вже казали, українські вибори найдоцільніше порівнювати з виборами у країнах, що виникли на руїнах Радянського Союзу. Важливим фактором тут є спільність стартових політичних і економічних умов. Також важливим вирівнюючим фактором є менталітет радянської людини, присутній у всіх, навіть найвіддаленіших куточках колишнього Радянського Союзу на момент його розвалу. Якби результатів виборів у різних країнах виявили суттєві відмінності, то ці відмінності, у першу чергу, були б зумовлені відмінностями етнічного походження. З діаграми видно, що рівень свободи президентських виборів у Російській федерації відразу стартував з доволі високого рівня у 1991 році. У 1996 році він досяг максимуму, а останні майже двадцять років він демонструє очевидну тенденцію до зменшення. З математичної точки зору безпосередніми причинами такої поведінки рівня свободи виборів є як зменшення кількості кандидатів, так і збільшення нерівномірності розподілу голосів між ними. Тобто велика кількість кандидатів отримує символічно малу кількість голосів, зате один з кандидатів отримує безпрецедентно високу їх кількість.

Результати парламентських виборів подаються на наступній діаграмі.

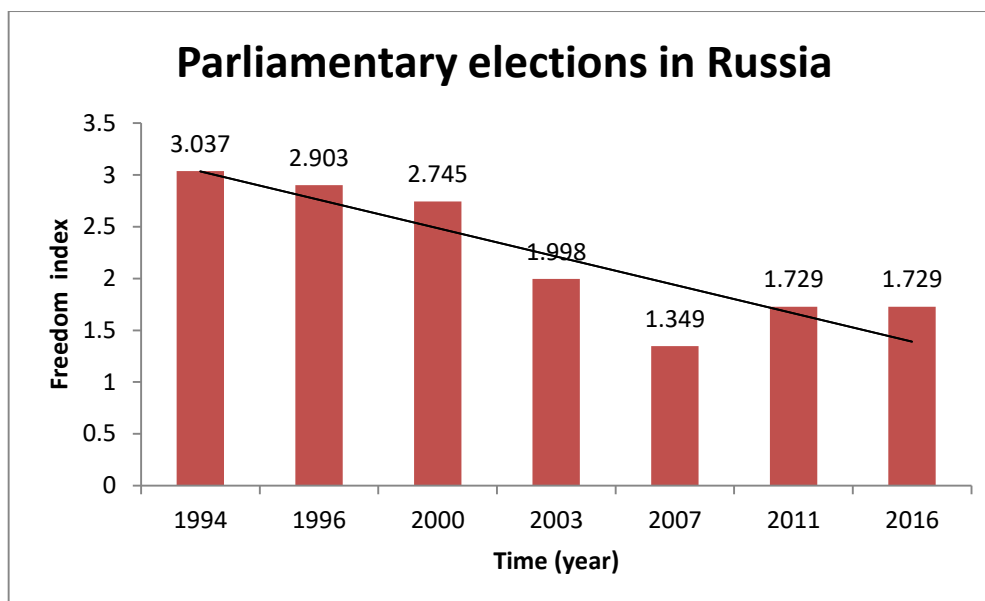


Рис. 6.

Ця діаграма також демонструє високий рівень свободи парламентських виборів у Російській федерації у 1994, 1996, 2000 роках. Проте демонструє також і потужну тенденцію до зменшення цього рівня за всі проаналізовані роки. Спостерігається також сильна кореляція між результатами президентських і парламентських виборів. Така кореляція, як і у разі України, свідчить, на нашу думку, про об'єктивний характер процесу виборів для кожного народу, як би вибори не називались. Тобто характер виборів є відбитком менталітету того, чи іншого народу, його засадничих етнічних цінностей.

Тільки порівняння результатів виборів у різних країнах дає можливість визначитись з нашим власним місцем у сучасному світовому політичному процесі. На наступній діаграмі таке порівняння наведене для президентських виборів в Україні і Російській федерації.

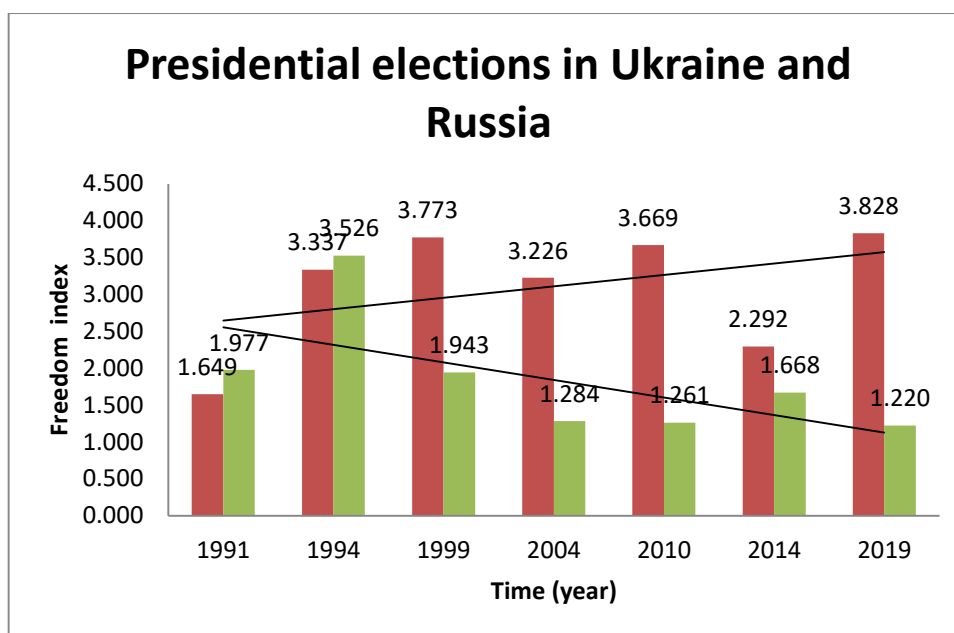


Рис. 7.

З діаграми видно, що рівень свободи виборів у 1991 році стартував в обох країнах практично з одного рівня. Це цілком можна пояснити інерцією мислення українців і мешканців Російської федерації. Покоління виборців в обох країнах переважно сформувались в умовах однієї політичної реальності - Радянському Союзі. Але з часом розбіжності почали наростати. Це відбувалось в міру того, як до виборчих урн в Україні почали приходити покоління виборців, що сформувались політично, або навіть і народились в незалежній українській державі. Відповідно почала суттєво зменшуватись з природних причин кількість виборців, світогляд яких сформувався у Радянському Союзі. Така ж еволюція почалась і серед виборців Російської федерації але у прямо протилежному напрямку. Складається враження, що радянське виховання було певним компромісом для різноманітних етнічних груп, що населяли Радянський Союз. Розпад Радянського Союзу був одночасно і зникненням цього компромісу. Далі почалась еволюція кожної етнічної групи до свого, характерного саме їй ментально світосприйняття. У висліді ми отримали на останніх президентських виборах в Україні найвищий за всю її історію рівень

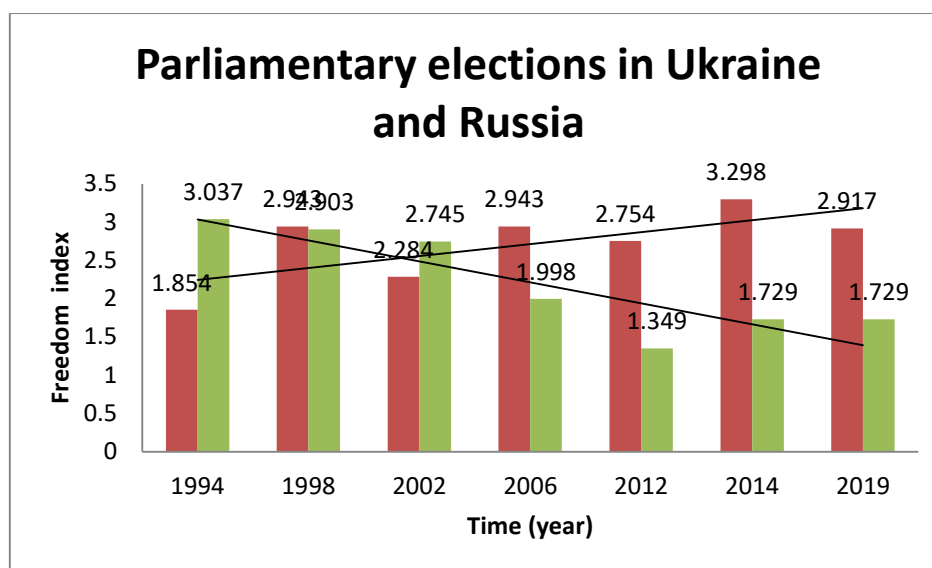


Рис. 8.

свободи вибору, а на президентських виборах в Російській федерації, відповідно – найнижчий. При цьому ці результати відрізняються у рази.

На наступній діаграмі ми навели порівняльний аналіз парламентських виборів в обох країнах.

Свобода парламентських виборів в Україні і Російській федерації також суттєво відрізняється на користь більшої свободи виборів в Україні порівняно з Російською федерацією. Для України спостерігається чітка тенденція до зростання свободи виборів, для Російської федерації – чітка тенденція до її зменшення. Проте є і певні відмінності. Свобода парламентських виборів в Російській федерації стартувала з вищих порівняно з Україною значень. Тенденція до суттєвого зменшення свободи парламентських виборів у Російській федерації стала виразною за останні двадцять років, коли помітно зросла концентрація влади в руках президента.

Висновки:

1. Як і у разі президентських виборів, результати всіх останніх парламентських виборів в обох країнах суттєво відрізняються між собою на користь більшої свободи виборів в Україні.

2.3 наведеного аналізу президентських і парламентських виборів в Україні і Російській федерації впливає, на нашу думку, твердження, що суттєва відмінність результатів виборів в обох країнах протягом майже тридцяти років свідчить про суттєву ментальну відмінність українців і мешканців Російської федерації. Швидше за все, ця відмінність запрограмована на генетичному рівні.

3.Індекс свободи виборів в Україні цілком відповідає значенню індексу свободи виборів у провідних країнах Євросоюзу, а інколи навіть і перевищує його. Це, на нашу думку, свідчить про ментальну близькість українців з народами Євросоюзу.

4.Свобода виборів у Російській федерації є суттєво нижчою, ніж у провідних країнах Євросоюзу і Україні. Це, на нашу думку, свідчить про ментальну відмінність народів Євросоюзу вкупі з Україною, від народів Російської федерації.

5.Всі характерні особливості поведінки індексу свободи виборів, як видно на прикладі двох країн із спільною історією, мають сталий у часі характер і свідчать про наявність глибоких внутрішніх причин такої відмінності.

6.Сама можливість помітити найдрібніші деталі як президентських, так і парламентських виборах в обох країнах на рівні чисел свідчить, на нашу думку, про те, що формули, запропоновані автором для аналізу виборів, є ефективним інструментом кількісного дослідження даного політичного процесу.

7.Основні ідеї роботи вже пройшли певну апробацію серед наукової спільноти.

15. Формул влади і вибори в Україні

Свобода особистості і влада над нею довільного походження є взаємно пов'язаними категоріями. Ми стверджуємо більше: сума влади V над особистістю і її свободи S є величиною сталою E . Збільшення влади призводить до зменшення свободи і навпаки. Максимуму влади відповідає нульова свобода. Максимуму свободи відповідає нульова влада. Отже,

$$V + S = VS.$$

Фізичною величиною, що легко піддається математичному моделюванню, є свобода. Алгоритм обчислення ентропії з нашої точки зору є алгоритмом обчислення свободи особистості. Відповідно, ми здатні легко обчислити максимальне значення свободи, що відповідає нульовій владі. Тобто,

$$VS = S_{\max}.$$

Розглянемо окрему довільну людину. Нехай вона приймає рішення щодо досягнення певної мети, що її можна реалізувати N способами. Реальні обставини такі, що ці способи можуть здійснюватись з ймовірностями $p_1, p_2, \dots, p_N$. Середня свобода, що припадає на один спосіб визначається аналогічно визначенню кількості інформації, статистичній ентропії тощо

$$S = - \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i).$$

В якості основи логарифму ми обрали число 2 з тих же міркувань що і в теорії інформації, де використовують біт для кількісного підрахунку кількості інформації. Аналог біта у разі аналізу свободи доцільно назвати фвід від англійського слова freedom – свобода. У тих же одиницях можна вимірювати і владу. Влада – це теж свобода, але лише для того, хто її здійснює. Вибір числа 2 зумовлений надзвичайно простим результатом щодо найпростішого варіанту вибору, коли ми маємо всього два варіанти вибору. При цьому якоюсь владою

один з варіантів заблокований і ймовірність його реалізації 0, а інший повністю розблокований з ймовірністю його реалізації 1. Тоді середня кількість свободи на один варіант є 0. Якщо обидва варіанти людині доступні в однаковій мірі, тобто з ймовірностями $\frac{1}{2}$, то середня кількість свободи на один варіант дій буде максимальною і дорівнюватиме 1. Для довільної кількості варіантів поведінки $S=0$ і у разі, якщо всі варіанти реалізуються з ймовірностями 0, а один з ймовірністю 1. При цьому влада обставин або іншої людини, що звузила кількість можливих способів поведінки з N до 1, максимальна $V=S_{\max}$.

Максимальне значення свободи легко знайти. Воно виникає тоді, коли ймовірності всіх варіантів дій людини рівноправні і дорівнюють $p_i = 1/N$. Тоді

$$S_{\max} = \log_2(N).$$

Відповідно, для максимальної влади маємо той самий вираз

$$V_{\max} = \log_2(N).$$

У разі довільного розподілу ймовірностей для влади маємо

$$V = \log_2(N) + \sum_{i=1}^N p_i \log_2(p_i).$$

Приклад: Дівчині запропонували руку і серце два хлопці. Знайти її свободу вибору і владу батьків: 1. Батьки заборонили їй навіть думати про одного з них. 2. Батькам однаково подобаються обидва претендента.

Розв'язання. У першому випадку ймовірність вибору одного претендента $p_1=1$, іншого $p_2=0$. Відповідно, $S_{\max}=1$, $V=1$, $S=0$. У другому випадку $V=0$, $S=1$.

Приклад: У одного випускника середньої школи шкільний аттестат дозволяє вступати у будь-який з провідних 64 вузів країни. У іншого - лише у 8 з них. Яка свобода вибору у кожного з них і яка влада якості їх освіти над кожним.

Розв'язання. Максимальна свобода вибору у першого з випускників. Для нього $S = \log_2(64) = 6$, $VS = S_{\max} = S = 6$, $V = 0$. Для іншого $S = \log_2(8) = 3$, $VS = S_{\max} = S = 6$, $V = 3$.

Цікаво застосувати представлену методику обчислення влади над особистістю і її свободи до аналізу політичного ситуації в країні. Вище наведені формули стосуються окремої людини. Так, якщо за одного з двох претендентів у президенти проголосувало $A\%$ виборців, а за іншого $B\%$ і $A > B$, то з ймовірністю $p = A\%/100\%$ пересічний громадянин країни підтримає будь-яке рішення президента і з ймовірністю $1 - p = B\%/100\%$ він його не підтримає. Під час виборів фіксується як свобода особистості, так і делегована нею влада переможцю виборів. Нехай долі виборців, що проголосували на виборах за різних претендентів у президенти становила $p_1, p_2, \dots, p_N$. Тоді свобода вибору для виборця визначатиметься вище наведеною формулою для ентропії, а влада, делегована виборцем переможцю виборів – відповідною формулою для влади.

А якщо вибори відбуваються у два тури? Єдино числового алгоритму тут немає, але можна, наприклад, взяти до уваги результати для часток виборців, що проголосували за кожного з двох кандидатів, що вийшли у другий тур P_1, P_2 . При такому підході ми надаємо пріоритетну вагу виборцям, що послідовно підтримують свого кандидата в обох турах. В Україні у кожному турі виборів існує ще можливість голосувати проти всіх з ймовірністю для другого туру P_3 . Ми також включили окремим пунктом виборців, що не прийняли участь в голосуванні, як таких, що проголосували ні за кого і їх частка P_4 .

Врахувати одночасно результати голосування у двох турах можна використавши теорему множення ймовірностей для визначення часток виборців, що в обох турах проголосували за одного і того ж кандидата $p_i P_i$, $i = 1, 2, 3, 4$. Взявши до уваги лише суму цих ймовірностей, можна визначити

долю виборців, що у кожному турі проголосували за одного і того ж кандидата, серед всіх виборців, що проголосували за одного і того ж кандидата

$$P_i = \frac{p_i P_i}{\sum_{i=1}^4 p_i P_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

А далі для цих ймовірностей використовуються вище наведені формули для свободи виборів і влади, делегованої перемогою виборів.

При цьому ми враховували виборців, що не прийняли участь в голосування, як таких, що проголосували ні за кого. Ми також врахували окремим пунктом виборців, що голосували проти всіх кандидатів.

У таблиці наведені результати всіх президентських виборів в Україні і останніх виборів у Сполучених штатах.

Президент	Свобода вибору	Делегована влада
Кравчук (1991)	2.0	1.0
Кучма (1994)	1.6	0.4
Кучма (1999)	1.6	0.5
Ющенко 2004	1.8	0.2
Янукович 2010	1.5	0.5
Порошенко 2014	2.6	2.1
Зеленський 2019	1.2	0.8
Сполучені штати, Байден 2022	1.7	0.9

Видно, що свобода виборів в Україні цілком відповідає в середньому свободі виборів у Сполучених штатах. Ми тут не навели результати виборів в багатьох країнах Європи з президентською формою правління, але необхідні

обчислення виконали і їх результати подібні до результатів в Україні. Найвільніші вибори в Україні, як видно з таблиці, - це вибори, де переможцем став Петро Порошенко. Він переміг у першому турі серед великої кількості кандидатів. Напередодні виборів Україна стала жертвою неспровокованої агресії. Московія захопила частину її території і український народ поступив дуже мудро надавши беззаперечну перевагу одному з кандидатів і уникнувши таким чином другого туру виборів. Політична і військова ситуація для України була надто загрозлива, щоб дозволити собі це задоволення. На другому місці виявився Леонід Кравчук. Це були перші президентські вибори в Україні. Від них залежала майбутня доля незалежної держави. І ця доля визначилась на виборах з надзвичайно високим рівнем свободи.

В обох зазначених випадках на виборах з високим рівнем свободи влада, делегована виборцями переможцю виборів, також була високою. Вона цілком відповідала владі, делегованій президенту Сполучених штатів на останніх виборах. Найвищою влада була для Петра Порошенко, коли країна вже перебувала у стані війни із споконвічним ворогом. Війні, яка загрожувала самому факту існуванню країни. Ця влада дозволила президенту досягти величезних успіхів у зміцненні державності України: безвіз з країнами Європи, Томос для православної української церкви Київського патріархату, асоціація з Європейським союзом, становлення нової української армії тощо. На другому місці знову виявився Леонід Кравчук у доленосний час перших кроків незалежної української держави. Але в таблиці проглядається і цілком очевидне третє місце – це Володимир Зеленський. На початках ця влада не була спрямована на військовий захист України, що спровокувало нашого споконвічного ворога на катастрофічне загострення військового конфлікту.

Аутсайдером списку делегованої влади виявився Віктор Ющенко. З великим відривом від інших президентів його влада виявилась надзвичайно малою. Своєю практичною діяльністю Віктор Ющенко міг би закреслити

теоретичний прогноз, але «вчасно» виконане ворогами України отруєння президента, перетворило його президентську каденцію на його особисту боротьбу між життям і смертю, що залишала мало енергії і часу для власне президентської діяльності. Проте, якби не Віктор Ющенко, то питання геноциду українського народу можливо ніколи б не стало на порядок денний української нації. А місце цієї трагедії - бути визначальним чинником всього державного і національного будівництва України на сотні років вперед.

Наступний рубіж нашого демократичного поступу – це десакралізація влади. Влада – це наше дзеркальне відображення і ставитись до неї слід так, як ми ставимось до себе і до оточуючих нас людей: критично і з розумінням. Згадайте, одного з американських президентів піддали імпічменту лише за те, що він нібито був причетним до встановлення підслуховуючої апаратури в штаб-квартирі конкуруючої партії. Чи можливе таке в Україні?

Серед багатьох проаналізованих країн світу є такі, що не піддаються числовому аналізу – це Московія, Північна Корея, Китай і деякі інші країни третього світу. Це країни, де загальні вибори або не відбуваються взагалі, як то Китай і Північна Корея, або повністю контрольовані наявною владою, як то Московія. Тут математика безсила.

16.Статистики Фермі і Бозе

Нехай наша система складається з N підсистем. Кожна підсистема може знаходитись в одному з $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_r, \dots$ станів. Кількість підсистем у довільному стані r гзначимо через N_r . Вважатимемо, що перехід підсистеми з одного стану в інший можливий лише у разі, якщо як мінімум одна інша підсистема також змінить свій стан. Надалі обмежимося не дуже густою системою, в якій в кожному акті такого переходу приймають участь лише дві підсистеми.



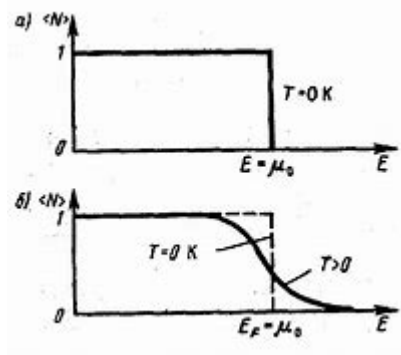
Позначимо через $W(r,s|r',s')$ ймовірність того, що дві підсистеми у висліді взаємодії за одиницю часу перейдуть зі станів r,s у стани r',s' .

У попередньому розгляді ми ніяк не враховували ступінь заповнення станів системи, між якими здійснювались переходи. Насправді, це не важко зробити. Вважатимемо, що ймовірність таких переходів не залежатиме від ступеню заповнення кінцевих станів. Знову розглянемо кількість переходів зі r,s станів у стани r',s' . Кількість таких переходів за одиницю часу визначиться як

$$W(r,s|r',s')N_r f_r N_s f_{s'},$$

де додаткові множники враховують певні статистичні властивості системи і пов'язані із ступенем заповнення її енергетичних станів. $f_r, f_{s'}$ - кількість кінцевих станів, у які може перейти частинка. У фізиці можливі лише два варіанта систем: системи Бозе-частинок і системи Фермі-частинок. У першому випадку

$$f_r = g_r + N_r,$$



Розподіл Фермі

де g_r - ступінь виродження енергетичних рівнів системи. Тут у будь-якому стані може знаходитись довільна кількість частинок. Для частинки, яка переходить у r -ий стан доступні не лише вільні стани, кількість яких дорівнює ступеню виродження стану з даною енергією, але і стани, у яких вже знаходяться інші частинки. Тобто кількість можливих станів для переходу ніби зростає ще більше на кількість вже заповнених станів.

У разі Фермі-частинок

$$f_r = g_r - N_r.$$

Тут у будь-якому стані може знаходитись не більше, ніж одна частинка і для частинки, яка переходить у r ий стан доступні лише не зайняті стани з даною енергією. Тобто кількість можливих станів для переходу зменшується на кількість вже заповнених станів. Кількість зворотних переходів визначиться аналогічно

$$W(r', s' | r, s) N_r f_r N_s f_s.$$

Через повну рівноправність початкових і кінцевих станів має місце рівність

$$W(r, s | r', s') = W(r', s' | r, s).$$

За час dt кількість підсистем у довільному стані r зміниться на величину

$$dN_r = \sum_{s, r', s'} W(r, s | r', s') (N_{r'} f_{r'} N_s f_s - N_r f_r N_s f_{s'}) dt.$$

Умовою стаціонарного стану системи є нульова зміна цієї кількості, що можливо лише за умови

$$\frac{N_{r'}}{f_{r'}} \frac{N_{s'}}{f_{s'}} = \frac{N_r}{f_r} \frac{N_s}{f_s}.$$

Цього рівняння виявляється достатньо для знаходження кількості підсистем у кожному стані при умові, що ця кількість залежить лише від енергії відповідного стану і виконується закон збереження енергії

$$\varepsilon_{r'} + \varepsilon_{s'} = \varepsilon_r + \varepsilon_s.$$

У разі, коли підсистемами є електрони, атоми, молекули, енергія має традиційний у фізиці сенс. Якщо ж ми маємо справу з людською спільнотою, то підсистемою можна вважати окрему людину. Роль енергії тут відграватиме нерухомість або гроші тощо. Важливо, щоб зазначена субстанція при взаємодії людей зберігалась.

Наше функційне рівняння можна спростити, злогарифмувавши його

$$\ln\left(\frac{N_{r'}}{f_{r'}}\right) + \ln\left(\frac{N_{s'}}{f_{s'}}\right) = \ln\left(\frac{N_r}{f_r}\right) + \ln\left(\frac{N_s}{f_s}\right).$$

Така рівність має місце лише у разі, якщо кожний з логарифмів є лінійною функцією енергії. Тоді

$$\alpha - \beta\varepsilon_{r'} + \alpha - \beta\varepsilon_{s'} = \alpha - \beta\varepsilon_r + \alpha - \beta\varepsilon_s$$

і це рівняння автоматично виконується при виконанні закону збереження енергії. Мінус у лінійній залежності обрано для зручності. Отже,

$$\ln\left(\frac{N_r}{f_r}\right) = \alpha - \beta\varepsilon_r$$

або

$$N_r = f_r \exp(\alpha - \beta\varepsilon_r),$$

або

$$N_r = (g_r + N_r) \exp(\alpha - \beta\varepsilon_r)$$

для Бозе-систем і

$$N_r = (g_r - N_r) \exp(\alpha - \beta \varepsilon_r)$$

для Фермі-систем. Звідси можна знайти самі кількості частинок для Бозе-частинок

$$N_r = \frac{g_r}{\exp(-\alpha + \beta \varepsilon_r) - 1}$$

і для Фермі-частинок

$$N_r = \frac{g_r}{\exp(-\alpha + \beta \varepsilon_r) + 1}.$$

Параметр $\alpha = \mu$ у статистичній фізиці називається хімічним потенціалом і визначається з умови нормування

$$N = \sum_r N_r.$$

Для обох статистик не можна отримати вирази для хімічних потенціалів в усьому інтервалі значень температури. Аналітичні вирази існують лише у разі високих і низьких температур. Звичайно для кожного значення температури слід розв'язувати доволі складне трансцендентне рівняння щодо хімічного потенціалу. Для параметру $\beta = 1/T$ знаходиться універсальне значення виходячи з означення температури фізичної системи через ентропію і внутрішню енергію. Цей параметр виявляється оберненою температурою.

Ентропію системи можна визначити через статистичну вагу довільного стану системи. Тут нам доведеться розглянути окремо випадки статистики Бозе і Фермі. Нехай у випадку Бозе у стані r , виродженому g_r раз, знаходяться N_r частинок. Вони займають один із станів, а решта $g_r - 1$ станів залишаються вільними. Кількість різних станів, що відповідають тій самій енергії, дорівнює кількості всіх можливих перестановок вільних станів між собою, частинок у одному стані між собою і частинок у зайнятих станах з вільними станами між собою. Остання перестановка відповідає не еквівалентним станам, що мають ту

саму енергію, а перші два еквівалентним. Кількість перестановок, що відповідають еквівалентним станам будуть $(g_r - 1)!$ і $N_r!$. Отже, ентропія дорівнюватиме

$$\begin{aligned} S &= \ln \left(\prod_r \frac{(g_r + N_r - 1)!}{N_r! (g_r - 1)!} \right) = \sum_r \ln \left(\frac{(g_r + N_r - 1)!}{N_r! (g_r - 1)!} \right) = \\ &= \sum_r [\ln(g_r + N_r - 1)! - \ln(N_r!) - \ln((g_r - 1)!)] = \\ &= \sum_r [(g_r + N_r - 1) \ln(g_r + N_r - 1) - N_r \ln(N_r) - (g_r - 1) \ln(g_r - 1)]. \end{aligned}$$

Для останнього перетворення ми використали формулу Стирлінга, справедливу для великих значень чисел заповнення і для великих значень виродження. Якщо це не так, то слід використовувати передостанню формулу. Якщо стани не є виродженими, тобто $g_r = 1$, то

$$S = 0$$

для будь-якої кількості частинок у кожному стані. Якщо кожний стан вироджений двічі, тобто $g_r = 2$, то

$$S = \sum_r [\ln((N_r + 1)!) - \ln(N_r!)] .$$

Тут якісному аналізу легко піддаються два випадки – високих і низьких температур. У разі високих температур $N_r \gg 1$ і

$$S = - \sum_r \ln(N_r!) .$$

У разі низьких температур всі частинки сконцентровані у стані з найнижчою енергією. Тут

$$S = \sum_r [\ln((N_r + 1)!) - \ln(N_r!)] = \ln((N + 1)(N)!) - \ln(N!) \approx \ln(N) .$$

Очевидно, що із зростанням ступеня виродження енергетичних рівнів ентропія зростає. Також ентропія зростає і при збільшенні температури.

У разі статистики Фермі еквівалентним станам з заданою енергією відповідають перестановки вільних станів $(g_r - N_r)!$ і перестановки зайнятих



Шат'єндранат Бозе
(1892-1974)

Видатний індійський фізик, один з творців квантової статистики

станів $N_r!$. Тут слід зауважити, що для статистики Фермі у кожному стані може знаходитись не більше однієї частинки. Нееквівалентним станам з даною енергією відповідають перестановки всіх можливих станів безвідносно до того, зайняті вони, чи ні. Отже,

$$S = \ln \left(\prod_r \frac{g_r!}{N_r!(g_r - N_r)!} \right) = \sum_r \ln \left(\frac{g_r!}{N_r!(g_r - N_r)!} \right) = \\ = \sum_r [\ln(g_r!) - \ln(N_r!) - \ln((g_r - N_r)!)] .$$

Для низьких температур будуть зайняті всі стани від найнижчого до певного межового, який відповідає енергії Фермі. Решта станів буде вільними. Якщо при цьому ступінь виродження всіх станів дорівнюватиме 1, то $\ln(N_r!) = 0$ і $S = 0$. Якщо ступінь виродження дорівнюватиме 2, то для низьких температур

$$S = \sum_r [\ln(2) - \ln((2 - N_r)!)] = \sum_{r=1}^{r_{Fermi}} [\ln(2) - \ln((2 - N_r)!)] = \sum_{r=1}^{r_{Fermi}} \ln(2) = N \ln(2) / 2 .$$

Це значення ентропії для Фермі-системи суттєво перевищує аналогічне значення температури для Бозе-системи. У разі високих температур $N_r \gg 1$

$$S = -\sum_r \ln(N_r!).$$

У цьому разі ентропія Фермі-систем і ентропія Бозе-системи збігаються. Це результат справедливий для будь-якого ступеню виродження. Фактично при високих температурах поведінка Фермі і Бозе-систем стає класичною, тобто такою, що описується законом Больцмана.

17.Ідеальний класичний газ

У теорії електронного газу використовують різні функції розподілу. Розглянемо деякі з них. У невзаємодіючому електронному газі електрон має лише кінетичну енергію $\varepsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$, де хвильовий вектор електрона $\mathbf{k}$ є добрим квантовим числом, що характеризує стан електрона. Разом із спіновим квантовим числом $s = \pm 1/2$ хвильовий вектор утворює повний набір квантових чисел для стану електрона. Оскільки енергія електрона у даному разі не залежить від спінового квантового числа, то останнє ми явно враховувати не будемо.

Розглянемо функцію $n(k)$, що має сенс кількості електронів у стані з хвильовим вектором $\mathbf{k}$. Нехай загальна кількість електронів N , тоді

$$\sum_{\mathbf{k}} n(k) = N.$$

З загальних принципів статистичної фізики випливає, що функція $n(k)$ для класичного електронного газу має вигляд розподілу Больцмана

$$n(k) = C \exp\left(-\frac{\varepsilon_k}{k_B T}\right).$$

Сталу величину C можна визначити з попередньої формули

$$\sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) = \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi C \int_0^\infty dk k^2 \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) = N,$$

де ми перейшли від підсумовування до інтегрування у сферичній системі координат, V - об'єм системи. Для обчислення інтегралу використаємо відомий результат для інтегралу Пуассона

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Здиференціюємо обидві частини цього виразу за α . Матимемо

$$\int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) x^2 dx = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Якщо покласти $\alpha = \hbar^2 / 2mk_B T$, то

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right) k^2 dk = \frac{\pi^{1/2} (2mk_B T)^{3/2}}{4\hbar^3}.$$

Звідки

$$C = \frac{4\pi^3 \hbar^3 n}{(2\pi mk_B T)^{3/2}}.$$

Густина електронів матиме вигляд

$$n(k) = \frac{4\pi^3 \hbar^3 n}{(2\pi mk_B T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}\right).$$

Перейшовши від хвильового вектора електрона до його швидкості з класичної точки зору електронний газ можна описувати густиною, що залежить від швидкості

$$n(v) = \frac{n}{2} \left(\frac{2\pi\hbar}{mk_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right).$$

Оскільки швидкість електрона змінюється неперервно, то статистичні властивості електронного газу доцільно описувати за допомогою густини розподілу $f(v)$. За означенням

$$dp(\mathbf{v}) = f(\mathbf{v})d\mathbf{v}$$

- ймовірність знаходження електрону у стані з швидкістю $\mathbf{v}$, що належить інтервалу $[\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}]$. З загальних принципів статистичної фізики випливає, що густина розподілу

$$f(v) = C \exp\left[-\frac{\varepsilon(v)}{k_B T}\right],$$

де кінетична енергія

$$\varepsilon(v) = \frac{mv^2}{2}.$$

Стала C може бути знайдена з умови нормування. У сферичній системі координат

$$4\pi \int f(v)v^2 dv = 1.$$

Абсолютно аналогічно попередньому знаходимо

$$f(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right).$$

Ця густина у статистичній фізиці називається густиною розподілу Максвелла. З математичної точки зору – це нормальний розподіл або розподіл Гауса з нульовим математичним очікуванням і дисперсією $k_B T / m$.

Знайдемо деякі властивості електронного газу. Середня швидкість електрона у Декартовій системі координат визначається так

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{i} \langle v_x \rangle + \mathbf{j} \langle v_y \rangle + \mathbf{k} \langle v_z \rangle.$$

Тут v_x, v_y, v_z - координати вектора швидкості $\mathbf{v}$, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ - одиничні орти Декартової системи координат. За означенням математичного очікування

$$\langle v_x \rangle = \int v_x f(v) d\mathbf{v} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_x v_x f(v).$$

Оскільки інтегранда є непарною функцією v_x , то відповідний інтеграл у симетричних межах дорівнює нулю. Отже,

$$\langle v_x \rangle = 0.$$

Аналогічно

$$\langle v_y \rangle = \langle v_z \rangle = 0.$$

Знайдемо тепер середню величину абсолютної швидкості електрона

$$\langle v \rangle = \int v f(v) d\mathbf{v}.$$

Тут доцільно використати сферичну систему координат. Для обчислення інтеграла зручно перейти до нової змінної інтегрування $x = v^2$. Тоді

$$\langle v \rangle = 2\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mx}{2k_B T}\right) x dx = \frac{2}{\pi^{1/2}} \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2}.$$

За означенням математичного очікування середня кінетична енергія електрона

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \int \frac{mv^2}{2} f(v) d\mathbf{v} = 2\pi m \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^4 dv.$$

Для обчислення останнього інтеграла знову використаємо інтеграл Пуассона

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Здиференціювавши його двічі за параметром отримаємо

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \frac{3}{8\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Отже,

$$\langle \varepsilon_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

або

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3k_B T}{m}.$$

Середня квадратична швидкість

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{2}{m} \varepsilon_{kin}} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

або

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3\pi}{8}} v.$$

За означенням дисперсії дисперсія швидкості електрона

$$\langle [v - \langle v \rangle]^2 \rangle = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2.$$

Очевидно

$$\langle [v - \langle v \rangle]^2 \rangle = \frac{k_B T}{m} \left(3 - \frac{8}{\pi} \right).$$

Для дисперсії кінетичної енергії електрона маємо

$$\langle (\varepsilon_{kin} - \langle \varepsilon_{kin} \rangle)^2 \rangle = \langle \varepsilon_{kin}^2 \rangle - \langle \varepsilon_{kin} \rangle^2 = \frac{m^2}{4} [\langle v^4 \rangle - \langle v^2 \rangle^2].$$

Обчислимо $\langle v^4 \rangle$. За означенням

$$\langle v^4 \rangle = \int v^4 f(v) d\mathbf{v} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) v^6 dv.$$

Для обчислення останнього інтегралу знову використаємо інтеграл Пуассона. .

Здиференціювавши його тричі за α отримаємо

$$-\frac{d^3}{d\alpha^3} \int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) dx = \int_0^\infty \exp(-\alpha x^2) x^6 dx = \frac{15\pi^{1/2}}{16\alpha^{7/2}}.$$

Отже, поклавши $\alpha = \hbar^2 / 2mk_B T$, маємо

$$\langle v^4 \rangle = 15 \left(\frac{k_B T}{m} \right).$$

Остаточно

$$\left\langle \left(\varepsilon_{kin} - \langle \varepsilon_{kin} \rangle \right)^2 \right\rangle = \frac{3}{2} (k_B T)^2.$$

Знайдемо рівняння стану ідеального газу. Тиск газу – це імпульс, переданий молекулами газу за одиницю часу ділянці стіни одиничної площини. Нехай стіна розташована перпендикулярно осі x . З розподілу Максвелла, що описує розподіл всіх компонент швидкості молекул, перейдемо до розподілу Максвелла, що описує лише розподіл v_x складової швидкості молекул. Для цього обчислимо наступний інтеграл

$$f(v_x) = \int_{-\infty}^{\infty} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} dv_z f(v_x, v_y, v_z).$$

Очевидно

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_y^2}{2k_B T}\right) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{mv_z^2}{2k_B T}\right) dv_z.$$

Кожний з цих інтегралів є інтегралом Пуассона. Отже, для кожної з компонент швидкості ми також отримали нормальний або Гаусів закон розподілу

$$f(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T}\right).$$

Помноживши обидві частини рівності на середню густину молекул отримаємо

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} dn(v_x),$$

де

$$dn(v_x) = n f(v_x) dv_x$$

- кількість молекул одиниці об'єму, компонента швидкості v_x яких в інтервалі $[v_x, v_x + dv_x]$. Кількість молекул з швидкістю v_x , що за одиницю часу досягти стінки і передати свій імпульс одиничній площадці, очевидно визначається об'ємом паралелепіпеда висотою v_x і одиничною площиною основи, що лежить

на стінці $V = v_x$. Тоді $v_x dn(v_x)$ очевидно і буде визначати ту кількість молекул з швидкістю v_x , що зіткнеться з одиничною площадкою стінки за 1 секунду. Кожна молекула передасть при зіткненні імпульс $2mv_x$. Тиск же визначиться наступним інтегралом

$$P = n \int_{-\infty}^{\infty} v_x f(v_x) 2m v_x dv_x$$

або

$$P = 2m \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} n \int_{-\infty}^{\infty} v_x^2 \exp \left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right) dv_x f(v_x) = .$$

Оскільки

$$\int_0^{\infty} \exp(-\alpha x^2) x^2 dx = \frac{\pi^{1/2}}{4\alpha^{3/2}},$$

то

$$P = 2m \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} n \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{3/2} .$$

Після спрощення

$$P = nk_B T .$$

Внутрішня енергія або енергія одиниці об'єму системи

$$\varepsilon = n \frac{3}{2} k_B T .$$

18. Термодинаміка ідеального класичного газу

Знайдемо ентропію класичного невзаємодіючого електронного газу. За означенням ентропії одиниці об'єму системи

$$S = -\frac{1}{V} k_B \sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) \ln[n(\mathbf{k})] .$$

Після переходу від підсумовування до інтегрування і використанні при цьому сферичної системи координат, матимемо

$$S = -\frac{1}{V} \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi k_B \int_0^\infty dk k^2 n(k) =$$

$$-nk_B \ln \left[\frac{4\pi^3 \hbar^3 n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \right] + k_B \frac{\hbar^2}{2\pi^2 m k_B T} \int n(k) k^4 dk.$$

При обчисленні першого доданку у правій частині рівняння ми використали умову нормування

$$\sum_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}) = N.$$

Інтеграл у другому доданку ми вже обчислювали у попередньому параграфі, тому для ентропії електронного газу матимемо

$$S = \frac{3}{2} nk_B \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{mk_B T}{(\pi \hbar^2 n)^{2/3}} \right) \right].$$

Знайдемо внутрішню енергію газу. За означенням енергії одиниці об'єму системи

$$E = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} n(\mathbf{k}).$$

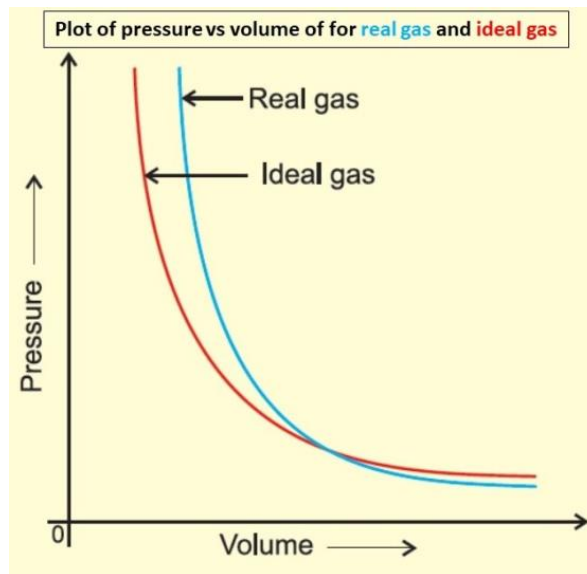
Знову ж таки, переходячи від підсумовування до інтегрування і використовуючи сферичну систему координат, матимемо

$$E = \frac{1}{V} \frac{2V}{(2\pi)^3} 4\pi \frac{\hbar^2}{2m} \int_0^\infty dk k^4 n(k) = \frac{3}{2} nk_B T.$$

Тут ми знову використали результат обчислення інтегралу, отриманий вище. Цей результат, очевидно, збігається з аналогічним результатом попереднього параграфу. Знаючи ентропію і внутрішню енергію ми легко можемо знайти вільну енергію газу. За означенням

$$F = E - TS,$$

або



Ідеальний і реальний гази

$$F = \frac{3}{2} n k_B T \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{\pi \hbar^2 n^{2/3}}{m k_B T} \right) \right].$$

Тут у нас вільна енергія одиниці об'єму системи. Вільна енергія всієї системи

$$F = FV = \frac{3}{2} N k_B T \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{\pi \hbar^2 n^{2/3}}{m k_B T} \right) \right].$$

Тепер можна у спосіб, відмінний від способу попереднього параграфу, базованого на безпосередньому обчисленні, знайти рівняння стану ідеального газу. За означенням

$$p = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T.$$

Результат диференціювання дасть вже отриманий вище результат

$$p = n k_B T.$$

19. Розподіл χ^2 -квадрат

Часто випадкові величини розподілені за нормальним законом, але нас цікавлять закони розподілу функцій цих випадкових величин. Аналітичні результати тут можна отримати лише у разі найпростіших випадків. Одним таким випадком є закон розподілу випадкової величини, що є квадратом випадкової величини, розподіленої за нормальним законом

$$\eta = \xi^2.$$

При цьому

$$P_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Обернена функція є двозначною, тобто існують дві обернені функції

$$x_1(y) = \sqrt{y}, \quad x_2(y) = -\sqrt{y}.$$

Вони мають наступні похідні

$$\frac{dx_1(y)}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \frac{dx_2(y)}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Функція розподілу ймовірностей для нашої функції визначиться так

$$\begin{aligned} P_{\eta}(y) &= P_{\xi}(x_1) \left| \frac{dx_1}{dy} \right| + P_{\xi}(x_2) \left| \frac{dx_2}{dy} \right| = \\ &= P_{\xi}(\sqrt{y}) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + P_{\xi}(-\sqrt{y}) \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right). \end{aligned}$$

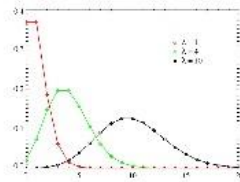
Отриманий розподіл можна розглядати як частинний випадок гама-розподілу

$$P_{\eta}(y) = \frac{1}{\alpha! \beta^{\alpha+1}} y^{\alpha} \exp\left(-\frac{y}{\beta}\right),$$

де $\alpha = -1/2$, $\beta = 2$. Твірна функція початкових моментів цього розподілу відома і є

$$M_{\eta}(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}}$$

"Основні закони розподілу ймовірностей випадкових величин"



● Розподіл Пуассона:

$$P_{n,m} = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$



Пуассон, Сімеон Дені (1781–1840) – французький механік, фізик і математик. Народився у Пітів'є (департамент Луара, Франція). У 1798р. вступив до Політехнічної школи. На його здібності звернули увагу П.Лаплас, Ж.Лагранж та інші професори. Після закінчення курсу він був залишений в цьому навчальному закладі. В 1816р. Пуассона призначили професором раціональної механіки в Сорбонну. Написав більше 300 праць. В галузі небесної механіки найважливіші роботи Пуассона стосуються деяких спеціальних задач місячної та планетної теорій, а також стійкості Сонячної системи. Суттєве значення мають роботи Пуассона, присвячені певним інтегралам, рівнянням у скінчених різницях, диференціальним рівнянням з частинними похідними, теорій ймовірності, варіаційному численню, рядам і т.д. Вчений ґрунтовно покращив способи застосування теорії ймовірностей взагалі, і зокрема до питань статистики, а також довів теорему, що стосувалася закону великих чисел (закон Пуассона), вперше скориставшись терміном „закон великих чисел”.

Розглянемо тепер випадкову величину, що є сумою квадратів незалежних випадкових величин типу проаналізованої вище

$$\zeta = \sum_{i=1}^n \xi_i^2 = \sum_{i=1}^n \eta_i.$$

Оскільки твірна функція суми однаково розподілених випадкових величин є добутком твірних функцій окремих випадкових величин, то матимемо

$$M_{\zeta}(t) = [M_{\eta}(t)]^n = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}.$$

Для знайденої твірної функції відповідна функція розподілу має вигляд

$$P_{\zeta}(z) = \frac{1}{(n/2-1)!2^{n/2}} z^{n/2-1} \exp\left(-\frac{z}{2}\right)$$

і називається густиною розподілу хі-квадрат, число n називається кількістю ступенів вільності. Математичне очікування і дисперсія для розподілу хі-квадрат дорівнюють відповідно

$$M\zeta = n, \quad D\zeta = 2n.$$

20. Пуассонівський процес

Пуассонівський процес настільки важливий для практичного використання, що ми розглянемо два способи його отримання: один, базований на фізичних міркуваннях, і другий, базований на використанні основних засад теорії ймовірностей і математичної статистики.

Нехай нас цікавить ймовірність того, що за проміжок часу $[0, t]$ відбудеться r подій, що задовольняють наступним умовам: Всі події є незалежними одна від одної. Ймовірність однієї події $P_1(dt)$ за малий проміжок часу dt прямо пропорційна цьому проміжку часу $P_1(dt) = \mu dt$. Ймовірність відсутності події за проміжок часу dt $P_0(dt) = 1 - \mu dt$. Ймовірність декількох подій за проміжок часу dt дорівнює нулю $P_2(dt) = \dots = P_r(dt) = 0$.

Наведених умов достатньо для знаходження закону розподілу дискретної випадкової величини r . В якості простору елементарних подій візьмемо множину точок проміжку $[0, \infty)$. В цьому просторі елементарних подій розглянемо дві незалежні події $[0, t]$ і $[t, t + dt]$. Розглянемо випадкову функцію – ймовірність того, що випадкова величина r , визначена на даному просторі елементарних подій, дорівнює нулю, тобто функцію $P_0(t + dt)$. Аргумент цієї функції можна виразити через введені вище події, які мають відбутись одночасно $P_0(t + dt) = P_0([0, t][t, t + dt])$. Оскільки події незалежні, то за теоремою множення ймовірностей маємо

$$P_0(t + dt) = P_0(t)P_0(dt) = P_0(t)(1 - \mu dt).$$

Останнє рівняння можна записати у вигляді

$$P_0(t + dt) - P_0(t) = dP_0(t) = -\mu P_0(t)dt$$

або у вигляді диференційного рівняння

$$\frac{dP_0(t)}{dt} + \mu P_0(t) = 0.$$

Загальним розв'язком цього рівняння є

$$P_0(t) = A \exp(-\mu t).$$

Довільну сталу можна знайти з очевидної початкової умови $P_0(0)=1$, яка означає, що у початковий момент часу не могло відбутись жодної події з ймовірністю 1. Отже, шуканий частинний розв'язок матиме вигляд

$$P_0(t) = \exp(-\mu t).$$

Таким чином ймовірність того, що за проміжок часу $[0, t]$ не відбудеться жодної події, експоненційно спадає до нуля із зростанням цього проміжку часу.

Нехай тепер за проміжок часу $[0, t+dt]$ відбудеться лише одна подія $r=1$. Тут можливі дві гіпотези: ця подія відбулась за проміжок часу $[0, t]$ і не відбулась за проміжок часу $[t, t+dt]$ та ця подія відбулась за проміжок часу $[t, t+dt]$ і не відбулась за проміжок $[0, t]$. Ймовірність реалізації першої гіпотези є $P_1(t)P_0(dt)$. Ймовірність реалізації другої гіпотези - $P_0(t)P_1(dt)$. Відповідно до формули повної ймовірності

$$P_1(t+dt) = P_1(t)P_0(dt) + P_0(t)P_1(dt),$$

або

$$P_1(t+dt) = P_1(t)(1 - \mu dt) + P_0(t)\mu dt.$$

Це рівняння зручно записати так

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \mu P_1(t) = \mu P_0(t)$$

або

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \mu P_1(t) = \mu \exp(-\mu t).$$

Тут початкова умова також очевидна, це $P_1(0)=0$, у початковий момент ймовірність відбутись одній події не може бути відмінною від нуля, оскільки це

протиричить раніше виписаній початковій умові $P_0(0)=1$. Можна показати, що шуканим частинним розв'язком цього рівняння є

$$P_1(t) = \mu t \exp(-\mu t).$$

Дійсно, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд

$$P_1(t) = A \exp(-\mu t).$$

Шукатимемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої, тобто у вигляді

$$P_1(t) = A(t) \exp(-\mu t).$$

Після підстановки його у вихідне рівняння, отримаємо

$$\frac{dA(t)}{dt} = \mu.$$

Звідси

$$A(t) = \mu t,$$

а частинний розв'язок неоднорідного рівняння матиме вигляд

$$P_1(t) = \mu t \exp(-\mu t).$$

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння

$$P_1(t) = A \exp(-\mu t) + \mu t \exp(-\mu t).$$

Початкова умова для шуканої функції дасть значення довільної сталої $A=0$ і матимемо той самий частинний розв'язок неоднорідного рівняння

$$P_1(t) = \mu t \exp(-\mu t).$$

Рівняння для ймовірності того, що за проміжок часу $[0, t + dt]$ відбудеться дві події для $P_2(t)$ матиме вигляд

$$\frac{dP_2(t)}{dt} + \mu P_2(t) = \mu^2 t \exp(-\mu t).$$

Розв'язавши його аналогічно попередньому, матимемо

$$P_2(t) = \frac{\mu^2 t^2}{2!} \exp(-\mu t).$$



Мар'ян Смолуховський
(1872-1917)

Видатний польський фізик-теоретик, став наймолодшим професором в Австро-Угорській імперії. 14 років був професором Львівського університету

Продовжуючи цей процес отримання і розв'язання рівнянь до розгляду за проміжок часу $[0, t + dt]$ r подій, отримаємо

$$P_r(t) = \frac{\mu^r t^r}{r!} \exp(-\mu t).$$

21.Рівняння Смолуховського

Як ми вже відмічали, випадковий процес Пуасона має ту особливість, що знання функції розподілу випадкової величини ξ_t гарантує знання функції розподілу довільного набору випадкових величин ξ_{t_m} . Типовою є ситуація, коли така властивість відсутня. В загальному випадку потрібно задавати ієрархію функцій розподілу все більшої кількості величин ξ_{t_m} і лише у межі $n \rightarrow \infty$ вони дозволяють як завгодно точно описати випадковий процес ξ_t . Будемо називати функцію розподілу $F_{\xi_t}(x)$ одноточковою, а функцію розподілу

$F_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -точковою. Одноточкова функція розподілу задає ймовірність знайти значення випадкової функції в момент часу t такі, що $\xi_t \leq x$. Багатоточкова функція розподілу задає ймовірність знайти значення випадкового процесу в момент часу t_1 такі, що $\xi_{t_1} \leq x_1$, в момент часу t_2 такі, що $\xi_{t_2} \leq x_2$, ... , в момент часу t_n такі, що $\xi_{t_n} \leq x_n$. Багатоточкова функція розподілу пов'язана з густиною розподілу очевидним співвідношенням

$$F_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dy_1 \int_{-\infty}^{x_2} dy_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} dy_n P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

За своїм змістом

$$dp_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

є ймовірністю того, що в момент часу t_1 значення випадкової величини ξ_{t_1} лежать в інтервалі $(x_1, x_1 + dx_1)$, в момент часу t_2 значення випадкової величини ξ_{t_2} лежать в інтервалі $(x_2, x_2 + dx_2)$, ... , в момент часу t_n значення випадкової величини ξ_{t_n} лежать в інтервалі $(x_n, x_n + dx_n)$. Ієрархія функцій розподілу має наступні властивості:

1. Густина розподілу завжди невід'ємна

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0.$$

2. Густина розподілу симетрична відносно перестановки будь-якої пари своїх аргументів, наприклад,

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{\xi_{t_2}, \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}}(x_2, x_1, \dots, x_n).$$

3. Густина розподілу задовольняє умові узгодженості

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, y_n) dy_n = P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_{n-1}}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

4. Одноточкова густина розподілу нормована

$$\int_{-\infty}^x P_{\xi_i}(y) dy = 1.$$

5. Якщо деякі часи збігаються, наприклад $t_1 = t_2$, то

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \delta(x_1 - x_2) P_{\xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_2, \dots, x_n).$$

Можна ввести і поняття багатоточкової умовної густини ймовірностей. Для цього набір випадкових величин $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}$ слід розділити на дві групи. Перша з них $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k}$ задовольняє умові $\xi_{t_1} \leq x_1, \xi_{t_2} \leq x_2, \dots, \xi_{t_k} \leq x_k$. Для другої групи $\xi_{t_{k+1}}, \xi_{t_{k+2}}, \dots, \xi_{t_{k+l}}$ ми шукатимемо густину розподілу ймовірностей при умові, що перша група випадкових величин задовольняє зазначеним умовам. Ця густина розподілу і називатиметься умовною багато точковою густиною ймовірностей. Між умовною густиною розподілу ймовірностей і безумовними густинами існує, за означенням, наступний зв'язок

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_{k+l}}}(x_1, x_2, \dots, x_k) = P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k}}(x_1, x_2, \dots, x_k) \times \\ \times P_{\xi_{t_{k+1}}, \xi_{t_{k+2}}, \dots, \xi_{t_{k+l}} | \xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k}}(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+l} | x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Умова узгодженості для умовної густини ймовірностей така

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_{k+1}}, \xi_{t_{k+2}}, \dots, \xi_{t_{k+l}} | \xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k}}(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, y_{k+l} | x_1, x_2, \dots, x_k) dy_l = \\ = P_{\xi_{t_{k+1}}, \xi_{t_{k+2}}, \dots, \xi_{t_{k+l-1}} | \xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_k}}(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+l-1} | x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Двоточкова умовна густина ймовірностей ще називається функцією переходу

$$P_{\xi_{t_i}, \xi_{t_j}}(x_i, x_j) = P_{\xi_{t_i}}(x_i) P_{\xi_{t_i} | \xi_{t_j}}(x_i | x_j).$$

Умова узгодженості для неї, або умова нормування має вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_i} | \xi_{t_j}}(x_i | x_j) dx_i = 1.$$

У разі, якщо аргументи функції переходу збігаються, то

$$\lim_{x_j \rightarrow x_i + 0} P_{\xi_i | \xi_j} (x_i | x_j) = \delta(x_i - x_j).$$

Для стаціонарних випадкових процесів, або як ми раніше їх називали, однорідних у часі

$$P_{\xi_{t_1+\tau}, \xi_{t_2+\tau}, \dots, \xi_{t_n+\tau}} (x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}} (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Якщо випадковий процес задовольняє умові

$$P_{\xi_{t_{k+1}}} (x_{k+1} | x_1, x_2, \dots, x_k) = P_{\xi_{t_{k+1}}} (x_{k+1} | x_k),$$

то він називається Марківським. Очевидно такий процес в момент часу t_{k+1} залежить лише від його значення в момент часу t_k . Іншими словами, майбутнє залежить лише від теперішнього часу, але не від минулого.

Марківський процес є складнішим за процес Пуасона і Вінерівський процес, оскільки він визначається двома одноточковими густинами розподілу: умовною і безумовною: $P_{\xi_{t_{k+1}}} (x_{k+1} | x_k)$ і $P_{\xi_{t_k}} (x_k)$. Двоточкова функція розподілу визначається через них так

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}} (x_1, x_2) = P_{\xi_{t_2} | \xi_{t_1}} (x_2 | x_1) P_{\xi_{t_1}} (x_1).$$

Триточкова визначиться наступним чином

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_3}} (x_1, x_2, x_3) = P_{\xi_{t_3} | \xi_{t_2}} (x_3 | x_2) P_{\xi_{t_2} | \xi_{t_1}} (x_2 | x_1) P_{\xi_{t_1}} (x_1).$$

.....

Нарешті,

$$P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}} (x_1, x_2, \dots, x_n) = P_{\xi_{t_n} | \xi_{t_{n-1}}} (x_n | x_{n-1}) \dots P_{\xi_{t_2} | \xi_{t_1}} (x_2 | x_1) P_{\xi_{t_1}} (x_1).$$

Випадкові процеси також можна описувати за допомогою числових характеристик. Такими популярними величинами є кореляційні функції - аналоги моментів випадкових величин,

$$K(t_1, t_2, \dots, t_n) = \langle \xi_{t_1} \xi_{t_2} \dots \xi_{t_n} \rangle.$$

Сенс введеного позначення розкривається наступним чином

$$K(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n x_1 x_2 \dots x_n P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Для отримання рівняння Смолуховського, заінтегруємо вираз для триточної функції розподілу за середнім аргументом

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \xi_{t_3}}(x_1, x_2, x_3) dx_2 = P_{\xi_{t_1}}(x_1) \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_3}|\xi_{t_2}}(x_3|x_2) P_{\xi_{t_2}|\xi_{t_1}}(x_2|x_1) dx_2.$$

Далі розділимо обидві частини цього співвідношення на $P_{\xi_{t_1}}(x_1)$

$$\frac{P_{\xi_{t_1}, \xi_{t_3}}(x_1, x_3)}{P_{\xi_{t_1}}(x_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_3}|\xi_{t_2}}(x_3|x_2) P_{\xi_{t_2}|\xi_{t_1}}(x_2|x_1) dx_2.$$

У лівій частині цього рівняння міститься функція переходу. Тому остаточний вигляд рівняння Смолуховського для довільного Марківського процесу такий

$$P_{\xi_{t_3}|\xi_{t_1}}(x_3|x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi_{t_3}|\xi_{t_2}}(x_3|x_2) P_{\xi_{t_2}|\xi_{t_1}}(x_2|x_1) dx_2.$$

Якщо випадкова величина набуває дискретного набору значень, то рівняння Смолуховського має вигляд

$$P_{\xi_{t_3}|\xi_{t_1}}(x_3|x_1) = \sum_{x_2} P_{\xi_{t_3}|\xi_{t_2}}(x_3|x_2) P_{\xi_{t_2}|\xi_{t_1}}(x_2|x_1).$$

22.Процес Орнштейна-Уленбека

Одновимірний Броунівський рух описується рівнянням Ньютона, де невідомою функцією є координата частинки. Якщо це рівняння записати відносно швидкості, то воно називається рівнянням Ланжевена і має вигляд

$$\frac{d\xi_t}{dt} + \nu \xi_t = f(t),$$

$$\xi_{t=t_0} = x_0.$$



*Джордж Юджин Угленбек
(1900-1988)*

Видатний американський фізик-теоретик

Тут ξ_t - швидкість Броунівської частинки, ν - числовий параметр, що визначає макроскопічну силу, яка діє на Броунівську частинку з боку рідини. Це сила опору рідини руху частинки. $f(t)$ - випадкова сила, що діє на броунівську частинку, у висліді зіткнення з нею окремих молекул рідини. Оскільки рівняння лінійне, то його загальний розв'язок є сумою загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного. Загальний розв'язок однорідного рівняння, очевидно, такий $\xi_t = A \exp(-\nu t)$. Тут A – довільна стала. Частинний розв'язок неоднорідного знайдемо методом варіації довільної сталої. Нехай $A = A(t)$. Тоді шуканий частинний розв'язок запишемо так

$$\xi_t = A(t) \exp(-\nu t).$$

Після підстановки його у рівняння матимемо

$$\frac{dA(t)}{dt} \exp(-\nu t) = f(t).$$

Інтегруючи це рівняння отримаємо

$$A(t) = \int_B^t \exp(\nu\tau) f(\tau) d\tau.$$

Сам частинний розв'язок тепер можна записати так

$$\xi_t = \int_B^t \exp(-\nu(t-\tau)) f(\tau) d\tau.$$

Тут B – довільна стала. Оскільки мова йде про довільний частинний розв'язок, то цю довільну сталу можна обрати довільним чином, наприклад, $B = t_0$.

Загальний розв'язок матиме вигляд

$$\xi_t = A \exp(-\nu t) + \int_{t_0}^t \exp(-\nu(t-\tau)) f(\tau) d\tau.$$

Підстановка загального розв'язку у початкову умову дає шуканий частинний розв'язок вихідної задачі Коші

$$\xi_t = x_0 \exp(-\nu(t-t_0)) + \int_{t_0}^t \exp(-\nu(t-\tau)) f(\tau) d\tau.$$

Якщо сила $f(\tau) = \overline{f(\tau)}$ є не випадковою функцією, а цілком визначеною, то не випадковою функцією буде і функція $\xi_t = \overline{\xi_t}$. У цьому разі мова йтиме не про ймовірність того, що $\xi_t \leq x$, а про те, що $\overline{\xi_t} = x$. Ймовірність останньої рівності – єдина, відмінна від нуля. Всі інші ймовірності дорівнюють нулю. Так само має бути $\overline{\xi_{t_0}} = x_0$. Оскільки функція переходу є нормованою, то єдиним шляхом задовольнити зазначені умови, є функція переходу у вигляді дельта-функції Дірака

$$\overline{P_{\xi_t|\xi_{t_0}}}(x|x_0) = \delta(x - \overline{\xi_t}).$$

Очевидно, що при $t = t_0$ автоматично виконуватиметься умова $\overline{\xi_{t_0}} = x_0$. Випадок стохастичної сили можна отримати узагальненням виразу для нестохастичної сили. Кожний варіант стохастичної сили породжуватиме функцію переходу з

дельта-функцією, що обирає з усіх можливих траєкторій таку, що відповідає даній реалізації стохастичної сили. Для урахування всіх реалізацій стохастичної сили і породжених нею траєкторій, потрібно лише усереднити отриманий вище вираз за всіма реалізаціями стохастичної сили

$$P_{\xi_t|\xi_{t_0}}(x|x_0) = \langle \delta(x - \xi_t) \rangle.$$

Для виконання заявленого усереднення використаємо представлення дельта-функції інтегралом Фур'є

$$\delta(x-a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x-a)k] dk.$$

Тоді для функції переходу дістанемо наступний вираз

$$P_{\xi_t|\xi_{t_0}}(x|x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(x - x_0 \exp(-\nu(t-t_0)))k] dk \times \\ \times \left\langle \exp \left(ik \int_{t_0}^t \exp[-\nu(t-\tau)] f(\tau) d\tau \right) \right\rangle.$$

Розглянемо найпростіший варіант стохастичної функції. Це так званий білий шум – максимально можливий випадковий характер функції. Білий шум найкраще задається своїми числовими характеристиками – кореляційними функціями. Всі непарні кореляційні функції, починаючи з першої, дорівнюють нулю

$$\langle f(t_1) f(t_2) \dots f(t_{2n+1}) \rangle = 0.$$

Всі парні кореляційні функції відмінні від нуля і цілком визначаються через двоточкову

$$\langle f(t_1) f(t_2) \rangle = \sigma_f \delta(t_1 - t_2),$$

$$\langle f(t_1) f(t_2) \dots f(t_{2n-1}) f(t_{2n}) \rangle = \sigma_f^n \delta(t_1 - t_2) \delta(t_3 - t_4) \dots \delta(t_{2n-1} - t_{2n}).$$

Експоненту під знаком середнього представимо рядом Маклорена

$$\begin{aligned}
\left\langle \exp \left(ik \int_{t_0}^t \exp(-\nu(t-\tau)) f(\tau) d\tau \right) \right\rangle &= \left\langle \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[ik \int_{t_0}^t \exp(-\nu(t-\tau)) f(\tau) d\tau \right]^m \right\rangle = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[ik \left\langle \int_{t_0}^t \exp(-\nu(t-\tau)) f(\tau) d\tau \right\rangle \right]^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ik)^m}{m!} \langle f(\tau_1) f(\tau_2) \dots f(\tau_m) \rangle \times \\
&\quad \times \int_{t_0}^t d\tau_1 \exp(-\nu(t-\tau_1)) \int_{t_0}^t d\tau_2 \exp(-\nu(t-\tau_2)) \dots \int_{t_0}^t d\tau_m \exp(-\nu(t-\tau_m)).
\end{aligned}$$

Наявність дельта-функцій під знаком інтегралів дозволяє їх легко обчислити і остаточний результат буде таким

$$P_{\xi|t_0}^{\xi}(x|x_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma\nu^{-1}(1-\exp(-2\nu(t-t_0)))}} \exp\left(-\frac{1}{\nu^{-1}\sigma} \frac{(x-x_0 \exp(-\nu(t-t_0)))}{1-\exp(-2\nu(t-t_0))}\right).$$

Випадковий процес, що описується дано формулою називається випадковим процесом Орнштейна-Уленбека. Якщо опір руху Броунівських частинок відсутній $\nu=0$, то ми отримуємо випадковий процес Вінера.

23. Закон розподілу неприємностей

У своєму житті людина зустрічається з неприємними подіями. У зв'язку з цим знайдемо густину розподілу ймовірності життя людини без неприємних подій. В якості простору елементарних подій візьмемо додатну піввісь t . Нехай $\overline{[0,t]}$ - подія, що полягає у тому, що за проміжок часу $[0,t]$ відбулась неприємна подія. Подібною до неї є і подія $\overline{(t,t+dt]}$ та $\overline{[0,t+dt]}$. Очевидно

$$\overline{[0,t+dt]} = \overline{[0,t]} \cup \overline{(t,t+dt]}$$

і події $\overline{[0,t]}$ та $\overline{(t,t+dt]}$ є незалежними. Відповідно $[0,t]$, $(t,t+dt]$, $[0,t+dt]$ - події, які полягають у тому, що за відповідні проміжки часу неприємні події не відбудуться. Очевидно

$$[0, t + dt] = [0, t] \cup (t, t + dt]$$

і події у правій частині рівняння також є незалежними.

Нехай тепер $w(t) = P(0 \leq \xi \leq t)$ є ймовірністю того, що за проміжок часу $[0, t]$ неприємна подія не відбудеться. Відповідно до теореми множення ймовірностей двох незалежних подій.

$$W([0, t + dt]) = W([0, t])W([0, t + dt])$$

або

$$W(t + dt) = W(t)W(dt).$$

Функції $W(t + dt)$ і $W(dt)$ зручно розвинути в ряд Тейлора за степенями dt , обмежившись при цьому лінійними за dt членами. Отже

$$W(dt) = W(0) + W'(0)dt,$$

або

$$W(dt) = 1 - a dt.$$

В останній рівності було враховано, що за нульовий проміжок часу неприємна подія не відбудеться і мова йде про достовірну подію. Відповідно до однієї з аксіом ймовірності ймовірність достовірної події є одиницею $W(0) = 1$. Оскільки за іншою аксіомою ймовірності остання не перевищує одиниці $W(dt) \leq 1$, то $W'(0) = -a \leq 0$ для $a \geq 0$. Аналогічно розвинемо і функцію $W(t + dt)$

$$W(t + dt) = W(t) + W'(t)dt.$$

Після підстановки обох розвинень в основне рівняння отримаємо

$$W'(t) = -aW(t).$$

Це звичайне диференціальне рівняння має загальний розв'язок

$$W(t) = A \exp(-at).$$

Сталу A можна знайти із умови $W(0) = 1$, отже $A = 1$. Таким чином ймовірність відсутності неприємних подій описується наступним законом

$$W(t) = \exp(-at)$$

і швидкість спадання з часом цієї ймовірності визначається сталою a . Визначимо її сенс. Для цього розглянемо функцію

$$F_{\xi}(t) = 1 - W(t) = 1 - \exp(-at),$$

яка є функцією розподілу ймовірностей для неприємних подій, тобто ймовірністю того, що неприємна подія ξ відбудеться за проміжок часу $[0, t]$. Знайдемо математичне очікування цієї неприємної події, тобто середній проміжок часу за який відбудеться хоча б одна подія. За означенням

$$\tau = M\xi = a \int_0^{\infty} t P_{\xi}(t) dt,$$

де густина ймовірності

$$P_{\xi}(t) = \frac{dF_{\xi}(t)}{dt} = a \exp(-at).$$

Отже,

$$\tau = a \int_0^{\infty} t \exp(-at) dt = \frac{1}{a}.$$

Таким чином,

$$P_{\xi}(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau)$$

і

$$W(t) = \tau^{-1} \exp(-t/\tau).$$

Зрозуміло, що конкретне значення часу релаксації, або середній проміжок часу між неприємностями τ залишається невизначеним. Останнє потребує додаткової інформації про перебіг життя конкретної людини.

Математичні додатки

1. Інтеграл Пуассона-Гауса

Розглянемо нормальний розподіл

$$P_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

і обчислимо наступний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx.$$

Якщо виконати заміну змінної інтегрування $z = (x - \mu) / \sigma\sqrt{2}$, $dz = dx / \sigma\sqrt{2}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2) dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx.$$

Візьмемо арифметичний корінь з квадрату останнього виразу

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx &= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(y) dy} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) dx \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy}. \end{aligned}$$

У подвійному інтегралі перейдемо від Декартових координат до полярних

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x^2 + y^2)] dx dy = \int_0^{\infty} dr r \exp(-r^2) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^{\infty} dr r \exp(-r^2).$$

Заміна змінних у останньому інтегралі $z = r^2$, $dz = 2r dr$ дає

$$2\pi \int_0^{\infty} \exp(-r^2) r dr = \pi \int_0^{\infty} \exp(-z) dz = \pi.$$

Остаточно

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) dx = 1$$

у повній відповідності з умовою нормування. Відповідно,



Жозеф Фур'є
(1768-1830)

Видатний французький фізик і математик

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = \sigma\sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

2. Фур'є-образ одновимірного розподілу Гауса

Фур'є-образ густини розподілу ймовірностей називається характеристичною функцією випадкової величини. Остання у такій же мірі характеризує випадкову величину, як і функція розподілу або густина розподілу, або вся сукупність моментів випадкової величини. За означенням характеристична (твірна) функція початкових моментів випадкової величини має вигляд

$$\varphi_{\xi}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \exp(y_i x) P_i$$

для дискретної випадкової величини,

$$\varphi_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(xy) P_{\xi}(y) dy$$

для неперервної випадкової величини. В подальшому для економії викладу детально зупинимось лише на неперервних випадкових величинах. Якщо експоненту розвинути в ряд Маклорена

$$\exp(xy) = 1 + xy + \frac{(xy)^2}{2!} + \dots + \frac{(xy)^n}{n!} + \dots,$$

то для характеристичної функції отримаємо аналогічне розвинення

$$\varphi_{\xi}(x) = 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + \alpha_n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Порівнюючи останній ряд з рядом Маклорена для функції $\varphi_{\xi}(x)$

$$\varphi_{\xi}(x) = 1 + \frac{d\varphi_{\xi}(0)}{dx} x + \frac{d^2\varphi_{\xi}(0)}{dx^2} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{d^n\varphi_{\xi}(0)}{dx^n} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

отримаємо диференціальний зв'язок між початковими моментами і характеристичною функцією початкових моментів

$$\alpha_n = \int_{-\infty}^{\infty} y^n P_{\xi}(y) dy = \frac{d^n \varphi_{\xi}(0)}{dx^n}.$$

За означенням характеристична функція центральних моментів випадкової величини має вигляд

$$\Phi_{\xi}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \exp[x(y_i - \alpha_1)] P_i$$

для дискретної випадкової величини,

$$\Phi_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[x(y - \alpha_1)] P_{\xi}(y) dy$$

для неперервної випадкової величини, де α_1 - перший початковий момент випадкової величини. Якщо експоненту розвинути в ряд Маклорена

$$\exp[x(y - \alpha_1)] = 1 + (y - \alpha_1)x + (y - \alpha_1)^2 \frac{x^2}{2!} + \dots + (y - \alpha_1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

то для характеристичної функції отримаємо аналогічне розвинення

$$\Phi_{\xi}(x) = 1 + \mu_1 x + \mu_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + \mu_n \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Порівнюючи останній ряд з рядом Маклорена для функції $\Phi_{\xi}(x)$

$$\Phi_{\xi}(x) = 1 + \frac{d\Phi_{\xi}(0)}{dx} x + \frac{d^2\Phi_{\xi}(0)}{dx^2} \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{d^n\Phi_{\xi}(0)}{dx^n} \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

Отримаємо диференціальний зв'язок між центральними моментами і характеристичною функцією центральних моментів

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha_1)^n P_{\xi}(y) dy = \frac{d^n \Phi_{\xi}(0)}{dx^n}.$$

Характеристичну функцію початкових моментів можна задати і інакше

$$g_{\xi}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i P_i$$

для дискретної випадкової величини,

$$g_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^y P_{\xi}(y) dy$$

для неперервної випадкової величини. Таку функцію прийнято називати характеристичною функцією ймовірностей. Легко бачити, що

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\infty} y P_{\xi}(y) dy = \frac{dg_{\xi}(1)}{dx},$$

$$\alpha_2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 P_{\xi}(y) dy = \frac{d^2 g_{\xi}(1)}{dx^2} + \frac{dg_{\xi}(1)}{dx},$$

$$\alpha_3 = \int_{-\infty}^{\infty} y^3 P_{\xi}(y) dy = \frac{d^3 g_{\xi}(1)}{dx^3} + 3 \frac{d^2 g_{\xi}(1)}{dx^2} + \frac{dg_{\xi}(1)}{dx},$$

.....

Характеристична функція ймовірностей для центральних моментів така

$$G_{\xi}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (x - \alpha_1)^i P_i$$

для дискретної випадкової величини,

$$G_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \alpha_1)^y P_{\xi}(y) dy$$

для неперервної випадкової величини. Легко бачити, що

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha_1) P_{\xi}(y) dy = \frac{dG_{\xi}(1 + \alpha_1)}{dx},$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha_1)^2 P_{\xi}(y) dy = \frac{d^2 G_{\xi}(1 + \alpha_1)}{dx^2} + \frac{dG_{\xi}(1 + \alpha_1)}{dx},$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{\infty} (y - \alpha_1)^3 P_{\xi}(y) dy = \frac{d^3 G_{\xi}(1 + \alpha_1)}{dx^3} + 3 \frac{d^2 G_{\xi}(1 + \alpha_1)}{dx^2} + \frac{dG_{\xi}(1 + \alpha_1)}{dx},$$

.....

Існують і інші варіанти представлення характеристичної функції моментів.

Розглянемо нормальний розподіл з дисперсією σ і математичним очікуванням μ

$$P_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Знайдемо його Фур'є-образ або характеристичну функцію моментів.

Використаємо наступний варіант цього перетворення

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(-ikx) dx.$$

Тоді

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} P_{\xi}(x) \exp(-ikx) dx = \frac{1}{2\pi\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} - ikx\right) dx.$$

У показнику експоненти інтегранда виділимо повний квадрат за x

$$\begin{aligned} \frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} + ikx &= \frac{1}{2\sigma^2} \left[x^2 - 2x\mu + \mu^2 + i2xk\sigma^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2\sigma^2} \left[(x - \mu + ik\sigma^2)^2 - (\mu - ik\sigma^2)^2 + \mu^2 \right]. \end{aligned}$$

Далі врахуємо, що

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu+ik\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) dx = 1.$$

Тоді

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\mu k - \frac{1}{2}k^2\sigma^2\right).$$

Якщо ми візьмемо у координатному просторі нормальний розподіл з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією, то матимемо нормальний розподіл за хвильовим вектором з нульовим математичним очікуванням і одиничною дисперсією

$$P_{\xi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2}\right).$$

Якщо дисперсія розподілу довільна, а математичне очікування дорівнює нулю, то отриманий Фур'є-образ може бути густиною розподілу лише при відповідному нормуванні. Тоді

$$P_{\xi}(k) = \frac{1}{(1/\sigma)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2(1/\sigma^2)}\right).$$

Дисперсія для хвильового вектора тут буде оберненою щодо дисперсії за координатою. Цікаво, що у разі нормального розподілу добуток дисперсій для координати і для хвильового вектора в точності дорівнює одиниці

$$D(x)D(k) = \sigma^2(1/\sigma^2) = 1$$

Для відмінного від нуля математичного очікування у вихідному нормальному розподілі його Фур'є-образ є комплексною функцією і не може вважатись густиною розподілу навіть за умови її нормування.



Вернер Карл Гайзенберг

(1901-1976)

*Геніальний німецький фізик-теоретик, один з творців
квантової механіки*

У квантовій механіці координата мікрочастинки вважається випадковою величиною. Кожній вільній мікрочастинці ставиться у відповідність плоска хвиля. Хвильовий вектор цієї плоскої хвилі безпосередньо пов'язаний з імпульсом цієї частинки

$$p = \hbar k$$

Якщо координата мікрочастинки має нормальну густину розподілу, то дисперсія цього розподілу є ефективними розмірами області, де локалізована ця мікрочастинка. Тоді між розмірами області локалізації її координати і імпульсу



Колін Маклорен

(1698-1746)

Видатний англійський математик, учень Ісаака Ньютона

існує наступне співвідношення, яке називається співвідношення невизначеності Гайзенберга

$$\Delta x \Delta k = 1$$

Суть його в тому, що координата і імпульс мікрочастинки не можуть одночасно мати певне значення. Чим точніше ми знаємо координату частинки, тим менш точно ми знаємо її імпульс і навпаки.

Якщо в якості Фур'є-перетворення візьмемо такий його варіант

$$g(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ikx) dx,$$

то характеристична функція моментів матиме вигляд



Ервін Шредінгер

(1887-1933)

*Геніальний австрійський фізик-теоретик, один з творців
квантової механіки, основне рівняння квантової механіки
носить його ім'я*

$$g(k) = \exp\left(i\mu k - \frac{1}{2}k^2\sigma^2\right).$$

3. Фур'є-образ хвильової функції

Насправді, найточніший опис мікрочастинок у квантовій механіці здійснюється мовою хвильових функцій або амплітуд ймовірності, а не густин розподілу ймовірностей. Амплітуда ймовірності є, у загальному випадку, комплексною функцією. Квадрат її модуля визначає ймовірність

$$dP(x) = |\Psi(x)|^2 dx = \Psi^*(x)\Psi(x)dx$$

мікрочастинки мати координату в інтервалі $[x, x+dx]$. Розглянемо хвильову функцію мікрочастинки, що залежить від координати мікрочастинки і має наступний вигляд

$$\Psi(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}\right].$$

У загальному випадку хвильова функція є комплексною, але може бути і дійсною. Ця функція задовольняє умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1.$$

Густиною ймовірності за координатою, що відповідає цій хвильовій функції є густина нормального розподілу

$$P_{\xi}(x) = |\Psi(x)|^2 = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Виконуючи математичні викладки, аналогічні викладкам попереднього параграфу, отримаємо наступний Фур'є-образ хвильової функції

$$\Psi(k) = \frac{2^{1/2}\sigma}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \exp\left[\frac{(\mu + i2k\sigma^2)^2 - \mu^2}{4\sigma^2}\right].$$

Квадрат модуля цієї функції, що грає роль густини розподілу за хвильовим вектором, має вигляд

$$P_{\xi}(k) = |\Psi(k)|^2 = \frac{1}{(1/2\sigma)\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2}{2(1/4\sigma^2)}\right).$$

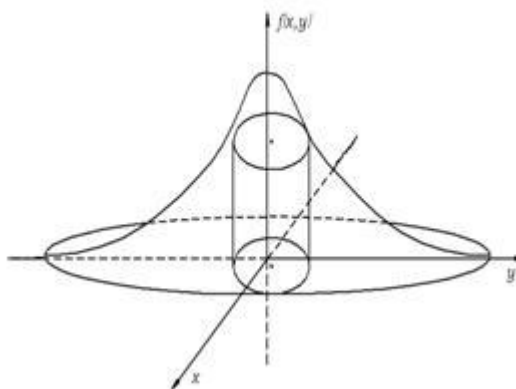
Тобто він знову є густиною нормального розподілу з нульовим математичним очікуванням і практично оберненою дисперсією щодо вихідної дисперсії. При цьому добуток дисперсій розподілу координати і хвильового вектора мікрочастинки знову є сталою величиною

$$D(x)D(k) = \sigma^2(1/4\sigma^2) = 1/4.$$

Тобто і тут ми маємо справу з співвідношення невизначеності Гайзенберга. Правда добуток дисперсій тут дорівнює іншій сталій.

Розглянемо хвильову функцію мікрочастинки, що має вигляд

$$\Psi(x) = \alpha^{1/2} \exp[-\alpha x/2], \quad x \geq 0.$$



Двовимірний нормальний розподіл

Ця функція задовольняє умові нормування

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \exp[-\alpha x] dx = 1.$$

Густиною ймовірності за координатою, що відповідає цій функції є густина показникового розподілу із скінченими математичним очікуванням і дисперсією.

$$P_{\xi}(x) = |\Psi(x)|^2 = \alpha \exp[-\alpha x], \quad x \geq 0.$$

Фур'є-образ цієї хвильової функції буде наступним

$$\begin{aligned} \Psi(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \exp(-ikx) dx = \frac{\alpha^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \exp(-\alpha x/2) \exp(-ikx) dx = \\ &= \frac{\alpha^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^{\infty} \exp[-(\alpha/2 + ik)x] dx = \frac{\alpha^{1/2}}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\alpha/2 + ik}. \end{aligned}$$

Квадрат модуля цієї функції, що грає роль густини розподілу за хвильовим вектором, має вигляд розподілу Коші із нульовим математичним очікуванням і нескінченною дисперсією

$$P_{\xi}(k) = |\Psi(k)|^2 = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha/2}{\alpha^2/4 + k^2}.$$

При цьому добуток дисперсій розподілу координати і хвильового вектора мікрочастинки знову є сталою величиною

$$D(x)D(k) = \alpha^2 \infty = \infty.$$

Тобто хвильовий вектор мікрочастинки буде цілком невизначеним за будь-якої невизначеності її координати.

4. Фур'є-образ тривимірного нормального розподілу

Розглянемо тривимірний нормальний розподіл

$$P_{\xi}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2\sigma^2}\right).$$

У сферичній системі координат він матиме вигляд

$$P_{\xi}(r) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad r = x^2 + y^2 + z^2.$$

Його Фур'є-образ

$$f(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} dr r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) \exp[-ikr \cos(\theta)] \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Інтегруючи за азимутальним і полярним кутами матимемо

$$f(k) = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \int_0^{\infty} dr r^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \frac{\sin(kr)}{kr}.$$

Використаємо далі формулу Ейлера

$$\sin(kr) = \frac{1}{2i} [\exp(ikr) - \exp(-ikr)]$$

Представимо інтеграл різницею двох простіших інтегралів

$$f(k) = \frac{2\pi}{ik(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left[\int_0^\infty dr r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(ikr) - \int_0^\infty dr r \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) \exp(-ikr) \right]$$

або, виділяючи повні квадрати в показниках експонент матимемо

$$f(k) = \frac{2\pi}{ik(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left[\int_0^\infty dr r \exp\left(-\frac{(r-ik\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) - \int_0^\infty dr r \exp\left(-\frac{(r+ik\sigma^2)^2}{2\sigma^2}\right) \right] \exp\left[-\frac{k^2}{2(1/\sigma^2)}\right]$$

Очевидна підстановка спрощує інтеграли до наступних

$$f(k) = \frac{2\pi}{ik(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{3/2}} \left[\int_{-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dz (z+ik\sigma^2) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) - \int_{ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz (z-ik\sigma^2) \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \right] \exp\left[-\frac{k^2}{2(1/\sigma^2)}\right]$$

Розкриваючи дужки під знаком інтегралу перегрупуємо інтеграли наступним чином

$$\begin{aligned} & \int_{-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dz z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) - \int_{ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \\ & = \int_{ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) - \int_{ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \\ & = - \int_{-\infty+ik\sigma^2}^{ik\sigma^2} dz z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) - \int_{ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz z \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = \end{aligned}$$

$$= - \int_{-\infty+ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = - \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = 0.$$

Тут ми врахували ту обставину, що первісна для непарної функції є парною, а підстановка симетричних меж дає нуль. Відповідно,

$$\begin{aligned} ik\sigma^2 \left[\int_{-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) - \int_{ik\sigma^2}^{\infty+ik\sigma^2} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \right] = \\ = ik\sigma^2 \left[\int_{-ik\sigma^2}^{\infty-ik\sigma^2} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) + \int_{-\infty-ik\sigma^2}^{-ik\sigma^2} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) \right] = \\ = ik\sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} dz \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right) = ik\sigma^3 \sqrt{2\pi}. \end{aligned}$$

Остаточно

$$f(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp\left[-\frac{k^2}{2(1/\sigma^2)}\right].$$

Наклавши на отриману функцію умову нормування, отримаємо тривимірний нормальний розподіл для хвильового вектора

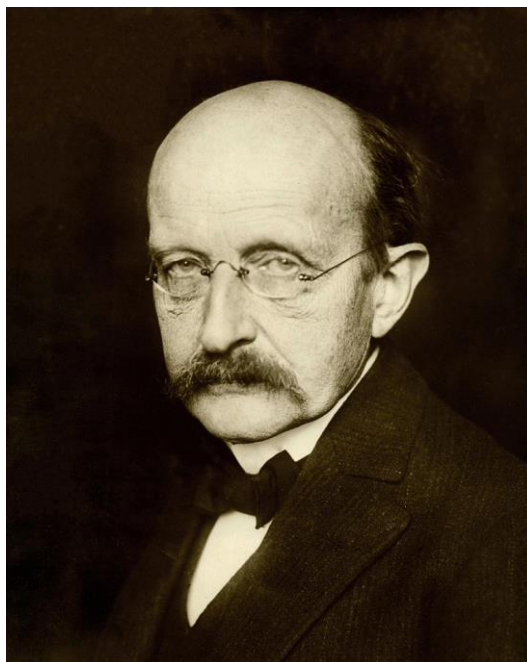
$$P_{\xi}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}(1/\sigma)} \exp\left[-\frac{k^2}{2(1/\sigma^2)}\right].$$

Добуток дисперсій для координати і хвильового вектора, так само як і для одновимірного випадку, дорівнює одиниці

$$D(r)D(k) = \sigma^2(1/\sigma^2) = 1.$$

Можна розглянути і Фур'є-образ хвильової функції, тоді умова нормування для густини розподілу за хвильовим вектором виконуватиметься автоматично.

Таким чином, ми маємо ще один випадок, коли координата і імпульс (хвильовий вектор) мікрочастинки не можуть бути задані однаково точно. Чим більше локалізована мікрочастинка у просторі, тим менш визначеним є її



*Макс Карл Ернст Людвіг Планк
(1858-1947)*

*Геніальний німецький фізик-теоретик, один з
творців квантової механіки*

імпульс, і навпаки. В нашому випадку цей висновок є наслідком використання нормального розподілу, але, насправді, ця властивість поведінки мікрочастинок має універсальний характер і не залежить від конкретного вигляду її амплітуди ймовірності (густини розподілу ймовірностей).

Квантова механіка є унікальною фізичною наукою у тому сенсі, що вона описує навколишній світ на найбільш фундаментальному мікроскопічному рівні і цілком базується на ймовірнісному підході до опису поведінки мікрочастинок і їх систем. Рівняння Шредінгера і співвідношення невизначеностей Гайзенберга є серцем квантової механіки і їх інтерпретація і досі викликає певні дискусії в науковому світі.

5. Розподіл Бернуллі і нормальний розподіл

Покажемо, що розподіл Бернуллі при дотриманні певних умов може з великою точністю збігатись з нормальним розподілом. Розподіл Бернуллі описує вислід випадкового експерименту з двома наслідками: герб – решка, добро – зло, біле – чорне тощо. Зупинимось на першому варіанті

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Тут випадковою величиною є кількість випадень, наприклад, герба при заданій серії підкидань монети. Цю випадкову величину зручно виразити через іншу випадкову величину

$$m = np + x_m \sqrt{np(1-p)}.$$

Різниця між кількістю підкидань і кількістю випадень гербу буде

$$n - m = n(1-p) - x_m \sqrt{np(1-p)}.$$

Оскільки

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

то для спрощення обчислення цієї величини доцільно розглянути її логарифм, а для кожного множника у правій частині використати формулу Стірлінга

$$\ln(C_n^m) = \ln(n!) - \ln(m!) - \ln(n-m)!.$$

У свою чергу, для великої кількості підкидань, з високою точністю

$$\ln(n!) = \ln(\sqrt{2\pi n}) + n \ln(n) - n,$$

$$\ln(m!) = \ln(\sqrt{2\pi m}) + m \ln(m) - m,$$

$$\ln[(n-m)!] = \ln(\sqrt{2\pi(n-m)}) + (n-m) \ln(n-m) - (n-m).$$

Тут ми використали точніший варіант формули Стірлінга, знехтувавши у ній членами, що асимптотично прямують до нуля. Подальше спрощення наведених

виразів для факторіалів, можна отримати, розвинувши логарифм в ряд Маклорена,

$$\ln(1+x) = x - x^2/2, \quad |x| \ll 1.$$

Тепер

$$\begin{aligned} \ln(m) &= \ln \left[np + x_m \sqrt{np(1-p)} \right] = \ln \left[np(1 + x_m \sqrt{(1-p)/np}) \right] = \\ &= \ln(np) + x_m \sqrt{(1-p)/np} - \frac{x_m^2}{2} \frac{1-p}{np}, \\ \ln(n-m) &= \ln \left[n(1-p) - x_m \sqrt{np(1-p)} \right] = \ln \left[n(1-p) \left(1 - x_m \sqrt{p/n(1-p)} \right) \right] = \\ &= \ln \left[n(1-p) \right] - x_m \sqrt{p/n(1-p)} - \frac{x_m^2}{2} \frac{p}{n(1-p)} \end{aligned}$$

У висліді

$$\begin{aligned} \ln(m!) &= \ln(\sqrt{2\pi m}) + \left[np + x_m \sqrt{np(1-p)} \right] \times \\ &\times \left[\ln(np) + x_m \sqrt{(1-p)/np} - \frac{x_m^2}{2} \frac{1-p}{np} \right] - \left[np + x_m \sqrt{np(1-p)} \right], \\ \ln[(n-m)!] &= \ln(\sqrt{2\pi(n-m)}) + \left[n(1-p) - x_m \sqrt{np(1-p)} \right] \times \\ &\times \left[\ln \left[n(1-p) \right] - x_m \sqrt{p/n(1-p)} - \frac{x_m^2}{2} \frac{p}{n(1-p)} \right] - \left[n(1-p) - x_m \sqrt{np(1-p)} \right]. \end{aligned}$$

Далі повернемося до логарифму кількості сполучень

$$\begin{aligned} \ln(C_n^m) &= \ln(n!) - \ln(m!) - \ln(n-m)! = \\ &= -\frac{x_m^2}{2} - \ln(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \ln \left[\frac{m(n-m)}{n} \right] - m \ln(p) - (n-m) \ln(1-p) \end{aligned}$$

і логарифму ймовірності

$$\ln[P_n(m)] = \ln \left[C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \right] = -\frac{x_m^2}{2} - \ln(\sqrt{2\pi}) - \ln \left[\sqrt{n \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n} \right)} \right].$$

Остаточний результат буде таким

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{n \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}\right).$$

Ця формула працює, якщо кількість підкидань достатньо велика і кількість підкидань і кількість випадень герба одного порядку величини, а ймовірність випадення герба є величиною порядку одиниці. В перекладі на числа це означає, що кількість підкидань має перевищувати 100, а знаменник у показнику експоненти – 40. Саме у цьому випадку використані нами асимптотичні розвинення ля факторіалу і логарифму мають достатньо високу точність.

Отриманий нами межовий випадок формули для ймовірності в значній мірі збігається з нормальним розподілом з тими обмеженнями, що кількість випадень герба є суттєво невід’ємною величиною, математичне сподівання для випадень гербу (добуток кількості підкидань на ймовірність випадень гербу) є також невід’ємною величиною. Повний збіг відповідних формул був би у тому разі, якби була справедлива рівність

$$n \frac{m}{n} \left(1 - \frac{m}{n}\right) = np(1-p).$$

Проте різниця у передекспоненційному множнику набагато менш суттєва, ніж збіг показника експоненти. При достатньо великій кількості випробувань з високою точністю

$$m = np + x_m \sqrt{np(1-p)} \approx np,$$

$$n - m = n(1-p) - x_m \sqrt{np(1-p)} \approx n(1-p)$$

і ми матимемо нормальний розподіл

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left(-\frac{(m-np)^2}{2np(1-p)}\right).$$

Література:

1. Є Маделунг. Математический аппарат физики. Москва: Главная редакция физико-математической литературы. - 1968. – С. 620.
2. П. М. Якібчук, М. М. Клим. Молекулярна фізика. Львів: ЛНУ імені Івана Франка. – 2015. – С. 584.
3. Турчин В. М. Математична статистика. Київ: Видавничий центр "Академія". – 1999. – С. 240.
4. Барковський В. В., Барковська Н. В., Лопатін О. К. Теорія ймовірностей та математична статистика. Київ: ЦУП. – 2002 – С. 448.
5. Валєєв К. Г., Джалладова І. А. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики. Київ: КНЕУ. - 2008, 352с.
6. Мармоза А. Т. Практикум з математичної статистики. Київ: Кондор. – 2004 – С. 258.
7. Наконечний С.І., Терещенко Т. О., Романюк Т. П. Економетрія. Київ: КНЕУ – 2004. – С. 524.
8. Жураковський Ю. П., Полтораки В. П. Теорія інформації та кодування. Київ: Вища школа. – 2001. – С. 256.
9. Тарасов Л. В. Мир построенный на вероятности. Москва: Просвещение. – 1984. – С. 92.
10. Худсон Д. Статистика для физиков. Москва: Мир. – 1970. – С. 296.
11. Королюк В. С., Портенко Е. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. Москва: Наука. – 1985. – С. 640.
12. Коваленко И. Н., Филиппова А.А. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Высшая школа. – 1982. – С. 256.
13. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. Москва: Наука. – 1987. – С. 240.
14. Боровков А. А. Теория вероятностей. Москва: Наука. – 1976. – С. 352.

15. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и приложения. Том 1. Москва: Мир. – 1984. – С. 528.
16. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и приложения. Том 2. Москва: Мир. – 1984. – С. 748.
17. Рудавський Ю. А., Понеділок Г. В. Функціональні інтеграли, та їх застосування. Львів: Львівська політехніка. – 2002. – С. 314.
18. Кособуцький П. С., Лобур М. В. Статистичне моделювання. Львів: Львівська політехніка. – 2013. – С. 328.
19. Свідзинський А. Математичні методи фізики. Том. 1. Київ: Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України. – 2009. – С. 396.
20. Свідзинський А. Математичні методи фізики. Том. 2. Київ: Інститут теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України. – 2009. – С. 436.
21. Вакарчук І. О. Квантова механіка. Львів: Львівський національний університет імені Івана Франка. – 2007. – С. 848.
22. Браут Р. Фазовые переходы. Москва: Мир. – 1967. – С. 288.
23. Швець В. Т. Формула влади і вибори в Україні. – Світогляд – 2022. - №5. – С. 20 - 21.
24. Швець В. Т. Ентропія і вибори. - Світогляд. – 2019. - № 6. – С. 56 – 61.
25. Швець В. Т. Формула свободи. - Бінтел – журнал геополітичної аналітики. – 2019. - № 3. – С. 50 – 54.
26. Shvets V. T. The Formula of Freedom. - Bintel – Geopolitical Analitics Journal. – 2019. - № 3. – P. 105 – 109.
27. Shvets V. T. Entropy and freedom of choice. - Bintel – Geopolitical Analitics Journal. – 2019. - № 4. – P. 94 – 99.
28. Швець В. Т. Ентропія і свобода вибору. - Бінтел – журнал геополітичної аналітики. – 2019. - № 4. – С. 43 – 47.

- 29.** Швець В. Т. Свобода особистості в країнах Європи з точки зору математики. - Вища школа. – 2021. - № 12. – С. 40 – 44.
- 30.** Shvets V. T. The Whitest People of the White Race, or Entropy of Blood. - Bintel – Geopolitical Analitics Journal. – 2022. - № 3. – Р. 124 – 134.
- 31.** Швець В. Т. Теорія ймовірностей і математична статистика. Одеса: ВМВ. – 2014. – С. 200.
- 32.** Больцман Л. Очерки по методологии физики. Москва: изд. Тимирязевского научно-исследовательского института. – 1929. – С. 133.
- 33.** Больцман Л. Кинетическая теория материи. Москва: Гос. изд. техн.-теорет. лит. – 1939. – С. 552.