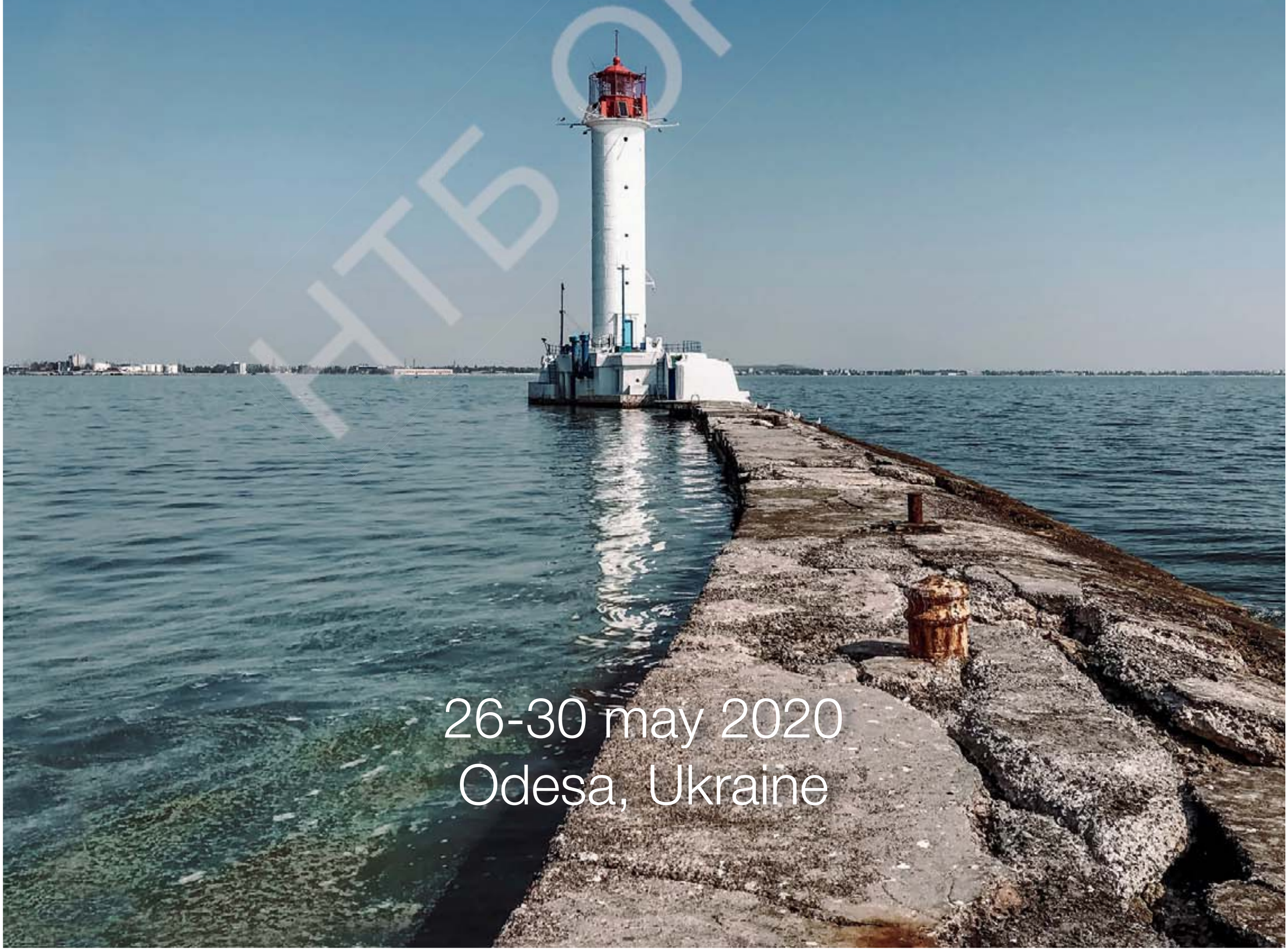
International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis



26-30 may 2020
Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- International Geometry Center
- Kyiv Mathematical Society

Program Committee

Chairman: Prishlyak A.
(*Kyiv, Ukraine*)
Balan V.
(*Bucharest, Romania*)
Banakh T.
(*Lviv, Ukraine*)
Bolotov D.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Borysenko O.
(*Kharkiv, Ukraine*)
Cherevko Ye.
(*Odesa, Ukraine*)
Fedchenko Yu.
(*Odesa, Ukraine*)
Karlova O.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V.
(*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N.
(*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V.
(*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S.
(*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K.
(*Yamagata, Japan*)
Mormul P.
(*Warsaw, Poland*)
Mykhailyuik V.
(*Chernivtsi, Ukraine*)
Plachta L.
(*Krakov, Poland*)
Pokas S.
(*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E.
(*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I.
(*Moscow, Russia*)
Savchenko A.
(*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A.
(*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A.
(*Tver, Russia*)
Volkov V.
(*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M.
(*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Kotlik S., Director of the P.M. Platonov Educational-scientific institute of computer systems and technologies “Industry 4.0”;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.
Konovenko N.
Fedchenko Yu.
Maksymenko S.
Cherevko Ye.
Osadchuk E.
Prus A.

Конечномерные динамики и точные решения уравнения возникновения молний

И. В. Жеребятников
(Московский Государственный Университет М. В. Ломоносова, Москва, Россия)
E-mail: zherebiatnikov.iv16@physics.msu.ru

В работе [1] была предложена математическая модель для объяснения возникающих в облаках скачков напряжённости электрического поля, приводящих к возникновению молний. В основе этого подхода лежит предположение о том, что заряженную часть облака можно описать с помощью основных уравнений гидродинамики заряженной среды, движущейся под действием внешних сил (потоки ветра, конвекция и т. д.). Там же приведено нелинейное дифференциальное уравнение для описания распределения электрического поля для одномерного движения заряженного газа:

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \xi^2} - (u(\xi,\tau)-\alpha)\,\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi}, \tag{1}$$

где $u(\xi,\tau)$ – безразмерная напряжённость электрического поля, ξ,τ – безразмерные пространственная и временная координаты, α – постоянная.

В докладе представлен метод построения точных решений уравнения (1) с использованием теории конечномерных динамик [2]. Правая часть этого уравнения порождает функцию

$$\varphi\,(y_0,y_1,y_2) = y_2 - (y_0-\alpha)\,y_1 \tag{2}$$

на пространстве джетов $J^2(\mathbb{R})$ с каноническими координатами x, y_0, y_1, y_2. Эту функцию мы рассматриваем как производящую функцию симметрий для некоторого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (так называемой *динамики*) [2]. Будем искать такое ОДУ в виде:

$$F := y_1 - h(y_0) = 0. \tag{3}$$

Применяя стандартную технику (см. [2, 3]), находим, что функция h имеет вид квадратичной функции

$$h(y_0) = \frac{1}{2}y_0^2 + ay_0 + b,$$

где a, b – произвольные постоянные. Решая уравнение (3), находим

$$y(\xi) = -a - \operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}\sqrt{a^2-2b}\right)\sqrt{a^2-2b}, \tag{4}$$

где a, b, c – произвольные постоянные. Соответствующее эволюционное векторное поле, которое является инфитезимальной симметрией для уравнения (1), имеет вид

$$S = (a+\alpha)\left(\frac{1}{2}y_0^2 + ay_0 + b\right)\frac{\partial}{\partial y_0}. \tag{5}$$

Преобразование сдвига Φ_τ, отвечающее этому полю, имеет вид

$$\xi \longmapsto \xi,$$

$$y_0 \longmapsto -a - \operatorname{th}\left[\frac{a+\alpha}{2}\tau\sqrt{a^2-2b} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{a^2-2b}-a-y_0}{\sqrt{a^2-2b}+a+y_0}\right]\sqrt{a^2-2b},$$

где τ – параметр сдвига вдоль траектории. Применяя обратное преобразование Φ_τ^{-1} к решению уравнения (3), приходим к точному решению уравнения (1):

$$u(\xi,\tau) = (\Phi_\tau^{-1})^*(y(\xi)) = \frac{(a+d)\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]e^{\tau(a+\alpha)d} + (a-d)\left[1-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]}{\left[1+\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]e^{\tau(a+\alpha)d} + \left[1-\operatorname{th}\left(\frac{\xi+c}{2}d\right)\right]}, \qquad (6)$$

где $d = \sqrt{a^2-2b}$. Здесь произвольные постоянные выбраны так, чтобы выполнялось неравенство $a^2 - 2b > 0$. На рис. 0.1 представлен график решения уравнения (1). На нем выделена область,

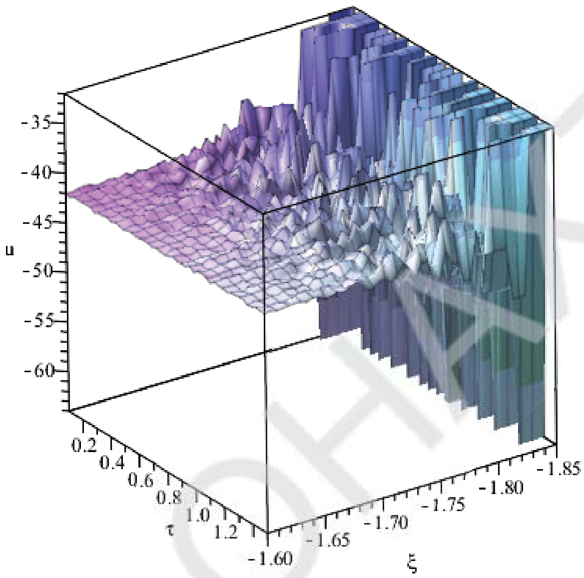


Рис. 0.1. График напряжённости электрического поля $u(\xi,\tau)$ при $a = 22$, $b = 42$, $c = 0$, $\alpha = 1$.

в которой наблюдаются резкие скачки напряжённости электрического поля в облаке, что может привести к возникновению разряда.

Литература

[1] V.I. Pustovojt. About the mechanism of lightning. Radio engineering and electronics, 2006. Vol. 51(8). P. 996-1002.

[2] Kruglikov B. S., Lychagina O. V. Finite dimensional dynamics for Kolmogorov – Petrovsky – Piskunov equation. Lobachevskii Journal of Mathematics, 19: 13–28, 2005.

[3] Kushner A. G., Matviichuk R.I. Exact solutions of the Burgers – Huxley equation via dynamics. Journal of Geometry and Physics 151, 2020.

[4] Kushner A. G., Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Contact geometry and nonlinear differential equations, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications. **101**. Cambridge: Cambridge University Press, xxii+496 pp., 2007.