

International scientific conference  
**«Algebraic and geometric  
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,  
Odesa,  
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

## Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі

Хомич Юлія

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)  
E-mail: khomych.yuliia@gmail.com

Піструїл Маргарита

(Одеський національний університет імені І. І. Мечникова)  
E-mail: margaret.pistruil@gmail.com

Поверхня Гауді широко застосовується в сучасній архітектурі. Надзвичайно важливо визначити можливість її неперервного деформування за умови тих чи інших обмежень. В роботах [1], [2] доведено існування нетривіальних нескінченно малих згинань та встановлено їх довільність. У цій роботі для поверхні Гауді досліджується більш широкий клас нескінченно малих деформацій, а саме таких, при яких варіація елемента площі  $\delta d\sigma$  є заданою функцією. Такі деформації називаються квазіареальними [3]. Запропоновано варіант математичної моделі зазначеної деформації для поверхні Гауді, за допомогою якої знайдено її поля зміщення квазіареальної деформації та встановлено деякі властивості. Поверхня Гауді допускає ареальну нескінченно малу деформацію, при якій існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини.

Припустимо, що векторно-параметричне рівняння поверхні Гауді задано у вигляді:

$$S : \bar{r}(x^1, x^2) = \left\{ x, y, mx \sin \frac{y}{a} \right\}, \quad (1)$$

де  $a$  і  $m$  – довільні відмінні від нуля константи,  $x \neq 0$ ,  $\frac{y}{a} \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Наведемо деякі її диференціально-геометричні характеристики:

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a}; & g_{12} &= \frac{1}{2a} m^2 x \sin \frac{2y}{a}; & g_{22} &= 1 + \frac{1}{a^2} m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a}; \\ g^{11} &= \frac{1}{a^2 g} \left( a^2 + m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right); & g^{12} &= -\frac{1}{2ag} m^2 x \sin \frac{2y}{a}; \\ g^{22} &= \frac{1}{g} \left( 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} \right); & g &= 1 + m^2 \sin^2 \frac{y}{a} + \frac{1}{a^2} m^2 x^2 \cos^2 \frac{y}{a}; \\ K &= -\frac{m^2}{a^2 g^2} \cos^2 \frac{y}{a}; & 2H &= -\frac{mx \sin \frac{y}{a}}{a^2 g \sqrt{g}} \left( 2 + m^2 \cos^2 \frac{y}{a} \right). \end{aligned}$$

Варіація елемента площі  $\delta d\sigma$  виражається через перший тензор деформації  $2\varepsilon_{ij} = \delta g_{ij}$ :

$$\delta d\sigma = \varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} d\sigma$$

при нескінченно малій деформації поверхні

$$\bar{r}^*(x^1, x^2, t) = \bar{r}(x^1, x^2) + t\bar{U}(x^1, x^2), \quad (2)$$

де  $\bar{U}(x^1, x^2)$  – поле зміщення,  $t \rightarrow 0$ . Очевидно, величину  $\delta d\sigma$  можна вважати заданою тоді і лише тоді, коли є заданою функція  $\varphi(x^1, x^2) \in C^1$  точки поверхні, яка задовольняє умову

$$\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\varphi.$$

Поле зміщення  $\bar{U}$  розкладемо через вектори  $\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^\alpha}$ ,  $\bar{n}$ :

$$\bar{U} = U^\alpha \bar{r}_\alpha + U^\circ \bar{n}, \quad (3)$$

де  $U^\alpha$  – деяке поле контраваріантного вектора на  $S$ , а  $U^\circ$  – поле інваріанта.

**Теорема 1.** Нескінченно мала деформація поверхні Гауді є квазіареальною тоді і лише тоді, коли компоненти поля зміщення та функція  $\varphi$  класу  $C^1$  задовольняють диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^1}{\partial x} + \frac{\partial U^2}{\partial y} + \frac{1}{ga^2} m^2 x \cos^2 \frac{y}{a} U^1 + \frac{1}{2a^3 g} m^2 (a^2 - x^2) \sin \frac{2y}{a} U^2 + \\ + \frac{1}{a^2 g \sqrt{g}} m x (2 + m^2 \cos^2 \frac{y}{a}) \sin \frac{y}{a} U^0 = 2\varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

**Теорема 2.** Поверхня Гауді ( $a = m = 1$ ) допускає нескінченно малу деформацію з заданою варіацією елемента площі. При цьому поле зміщення через довільну функцію  $\varphi \in C^1$  виражається явно:

$$\bar{U}(x, y) = \left\{ \frac{-\varphi g}{2x(2 + \cos^2 y)}, \frac{-\varphi g \sqrt{g} \operatorname{ctg} y - 2 \cos^2 y - 4}{2\sqrt{g}(2 + \cos^2 y)}, \frac{\varphi g \sqrt{g} - x^2(2 + \cos^2 y) \sin 2y}{2x\sqrt{g}(2 + \cos^2 y) \sin y} \right\}.$$

За умови  $\varphi = 0$  нескінченно мала квазіареальна деформація є аральною. Вона зберігає елемент площі поверхні.

**Теорема 3.** Поверхня Гауді ( $a = m = 1$ ) допускає аральну нескінченно малу деформацію з полем зміщення

$$\bar{U}(x, y) = \left\{ 0, \frac{-1}{\sqrt{g}}, \frac{-x \cos y}{\sqrt{g}} \right\}. \quad (5)$$

**Теорема 4.** При аральній нескінченно малій деформації з полем зміщення (5) на поверхні Гауді існує дійсна ортогональна сітка ліній стаціонарної довжини, диференціальне рівняння якої має вигляд:

$$(1 + \sin^2 y) \cos y dx^2 - x(1 + \sin^2 y) \sin y dx dy - (1 + x^2) \cos y dy^2 = 0.$$

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic *Gaudi surfaces and curvature based functional variations*// Applied Mathematics and Computation, №228, P. 377-383, (2014).
- [2] L. S. Velimirovic, M. D. Cvetkovic, M. S. Ciric, N. Velimirovic. *Analysis of Gaudi surfaces at small deformations*// Applied Mathematics and Computation, №218(13), P. 6999-7004, (2012).
- [3] Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич. *Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в  $E_3$* // Proc. Intern. Geom. Center, №7(2), С. 6-19, (2014).

<b>Damian Wi</b> <del>an</del> <b>iewski</b> <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	<b>66</b>
<b>Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M.</b> <i>History of formation of the decimal number concept</i>	<b>68</b>
<b>Yildiz S.</b> <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	<b>70</b>
<b>Yildiz S.</b> <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	<b>72</b>
<b>Безкоровайна Л.</b> <i>Про <math>A</math>-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	<b>73</b>
<b>Гречнёва М. О., Стеганцева П. Г.</b> <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грасмановим образом</i>	<b>74</b>
<b>Кузь А. М.</b> <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем <math>p</math>-адичних чисел</i>	<b>76</b>
<b>Маркітан В., Працьовитий М.</b> <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	<b>77</b>
<b>Подоусова Т. Ю.</b> <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	<b>80</b>
<b>Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В.</b> <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	<b>81</b>
<b>Працьовитий М. В., Лисенко І. М.</b> <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	<b>83</b>
<b>Пришляк О. О., Прус А. А.</b> <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	<b>86</b>
<b>Сердюк А. С., Соколенко І. В.</b> <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів <math>L_p</math> на класах періодичних цілих функцій</i>	<b>87</b>
<b>Синюкова О. М.</b> <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	<b>89</b>
<b>Скуратовський Р. В.</b> <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	<b>90</b>
<b>Черевко Є. В., Чепурна О. Є.</b> <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	<b>91</b>
<b>Федченко Ю. С.</b> <i>Про <math>P</math>-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	<b>93</b>
<b>Хомич Ю., Піструїл М.</b> <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	<b>94</b>
<b>Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.</b> <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	<b>96</b>
<b>Бологова Т. Н., Макаров В. И.</b> <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	<b>97</b>