

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях

Ольга Починка

(HSE, Russia, 603105, N.Novgorod, B.Pecherskaya, 25)

E-mail: opochinka@hse.ru

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траектория на поверхностях заключается в разбиении несущего многообразия на области с предсказуемым поведением траекторий – *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], опубликованной в 1937 году. В этой статье они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad (1)$$

где $v(x)$ это C^1 -векторное поле на 2-диске, ограниченном кривой без контакта на плоскости, и нашли критерий грубости системы (1).

Более общий класс потоков на 2-сфере рассмотрен в работах Е. А. Леонтович-Андроновой и А. Г. Майера [5, 6], где топологическая классификация таких потоков тоже была основана на разбиении на ячейки, поскольку описание их типов и взаимного расположения (*схема Леонтович-Майера*) полностью определяет качественное разбиение фазового пространства на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения – незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А.Г. Майером [7] в 1939 году и позже М. Пейшото [10, 11] для структурно устойчивых потоков на поверхностях любого рода. В 1971 в работе [12] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант – *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера.

В 1976 году Д. Нейманом и Т. О’Брайеном [8] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А.А. Ошемков и В.В. Шарко [9] ввели новый инвариант для потоков Морса на поверхностях – *трехцветный граф*. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул, введённых в работе А.В. Болсинова, С.В. Матвеева, А.Т. Фоменко [2].

Структурно устойчивые (грубые) потоки на поверхностях имеют только конечное число особых точек и конечное число замкнутых траекторий, каждая из которых гиперболична; кроме того такие потоки не имеют траекторий, соединяющих седла. Нарушение последнего условия приводит к Ω -устойчивым потокам на поверхностях, которые не являются структурно устойчивыми. Однако, топологическая классификация таких потоков также сводится к комбинаторному решению. Полным топологическим инвариантом является мультиграф.

Несущая поверхность разбивается на так называемые *элементарные области* удалением из поверхности предельных циклов. Компонента связности получившегося множества и есть элементарная область. Области подразделяются на типы в зависимости от наличия или отсутствия предельных циклов, седловых точек и элементов неблуждающего множества в целом. Затем каждой области ставится в соответствие вершина графа, а граничной окружности – ребро, направленное в соответствии с направлением движения траекторий через граничную окружность. Вершина,

соответствующая области, содержащей седловые точки, оснащается *четырёхцветным мультиграфом*, являющимся обобщением трёхцветного графа Ошемкова-Шарко [9], а вершина, соответствующая области, не содержащей элементов неблуждающего множества, оснащается *весом* “+” или “−” в зависимости от взаимной ориентации предельных циклов в областях, прилегающих к рассматриваемой области. Далее, рёбра, инцидентные вершине, соответствующей области с седловыми точками, оснащаются специальными ориентированными циклами четырёхцветного мультиграфа, с помощью которых сможем потом распознать ориентации предельных циклов потока (см. Рисунок 0.1).

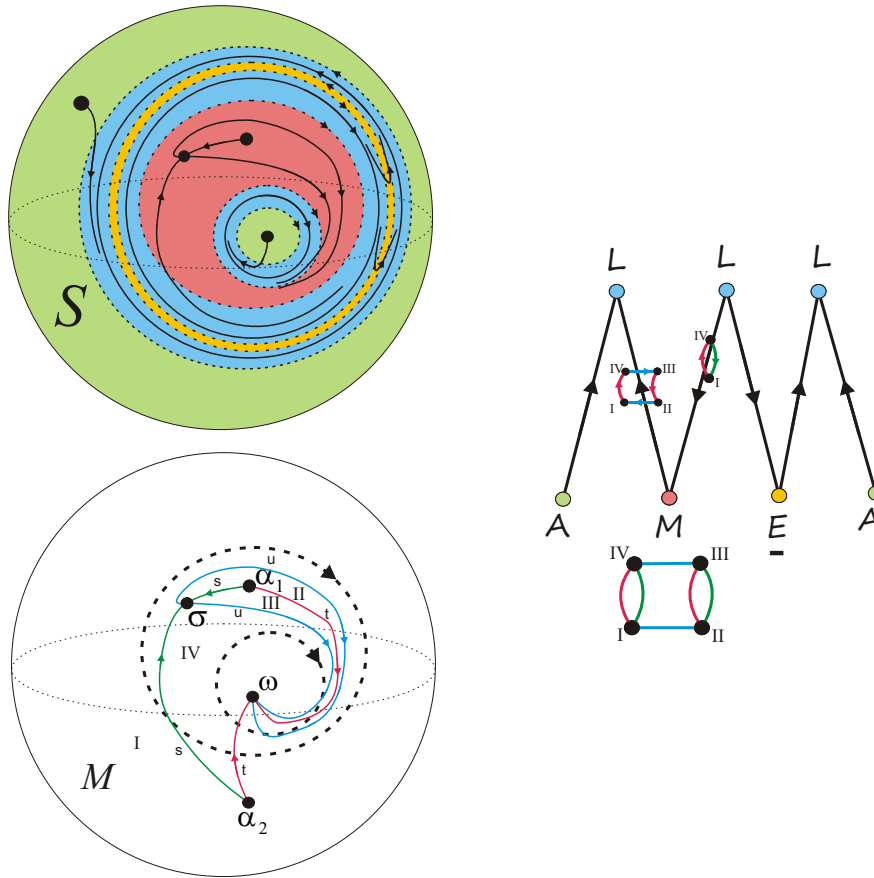


Рис. 0.1. Построение графа омега-устойчивого потока

Теорема 1. *Класс изоморфности оснащенного графа омега-устойчивого потока является полным топологическим инвариантом. Каждый класса изоморфности допустимого оснащенного графа реализуется омега-устойчивым потоком на поверхности.*

Принято считать, что алгоритм решения задачи распознавания изоморфности графов (в каком-нибудь классе графов) является эффективным, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое определение эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму [3]. Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи [4]. Сложностной статус задачи распознавания изоморфизма графов не известен до сих пор, т.е. в классе всех графов для этой задачи не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни

НР-полнота. А.А. Ошемков и В.В. Шарко [9] описали алгоритм распознавания изоморфности графов потоков Морса-Смейла, который, однако, не является эффективным, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Вместе с тем, многоцветные графы не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им омега-устойчивые потоки. Используя этот факт, для омега-устойчивых потоков удалось построить эффективный алгоритм.

Теорема 2. *Изоморфизм оснащённых графов омега-устойчивых потоков может быть распознан за полиномиальное время. Ориентируемость несущей поверхности может быть проверена за линейное время и эйлерова характеристика поверхности может быть вычислена за квадратичное время.*

Благодарности. Результаты были получены в соавторстве с В.Е. Кругловым и Д.С. Малышевым при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-11-01041).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы / Андронов А.А., Понтрягин Л.С. // Доклады Академии наук СССР. —1937. —Т. 14, № 5. —С. 247–250.
- [2] Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности / Болсинов А.В., Матвеев С.В., Фоменко А.Е. // УМН. —1990. —Т. 45, № 2(272). —С. 49–77.
- [3] Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Proceedings of the 1964 international congress for logic, methodology, and philosophy of science, North-Holland, Amsterdam. 1964. P. 24–30.
- [4] Гэри М., Джонсон Д., Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир. 1982.
- [5] Леонтович Е.А., Майер А.Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории / Леонтович Е.А., Майер А.Г. // Докл. Акад. АН СССР. —1937. —Т. 14, № 5. —С. 251–257.
- [6] Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории / Леонтович Е.А., Майер А.Г. // Докл. Акад. АН СССР. —1955. —Т. 103, № 4. —С. 557–560.
- [7] Майер А.Г. Грубые преобразования окружности / Майер А.Г. // Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ —1939. —Т. 12. —С. 215–229.
- [8] Neumann D., O'Brien T. Global structure of continuous flows on 2-manifolds / Neumann D., O'Brien T. // J. Diff. Eq. —1976. —V. 22, № 1. —P. 89–110.
- [9] Ошемков А.А., Шарко В.В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях / Ошемков А.А., Шарко В.В. // Математический сборник. —1998. —Т. 189, № 8. —С. 93–140.
- [10] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds / Peixoto M. // Topology —1962. —V. 1, № 2. —P. 101–120.
- [11] Peixoto M. Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks) / Peixoto M. // Topology —1963. —V. 2, № 2. —P. 179–180.
- [12] Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds / Peixoto M. // Dynamical systems Proc. —1971.

Бондарь О. П. <i>Об изотопности некоторых функций</i>	98
Герега А.Н., Кривченко Ю.В. <i>Управление структурой кластеров в перколяционных задачах с самоорганизацией</i>	99
Заитов А. А., Холтураев Х. Ф. <i>Функтор идемпотентных вероятностных мер с конечным носителем и метризуемость компактов</i>	100
Калинина Т. И., Покась С. М., Цехмейструк Л. Г. <i>Инфинитезимальные конформные преобразования в римановом пространстве второго приближения</i>	102
Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р., Харитонов С. В. <i>Свойства кривизны почти $C(\lambda)$-многообразий</i>	104
Клищук Б., Салимов Р. <i>Нижняя оценка для объёма образа шара</i>	105
Кузина Ю.В., Лавренюк И.В. <i>О решениях некоторых гибридных систем функционально-дифференциальных уравнений</i>	107
Курбатова И. Н., Хаддад М., Пересторонева Е. <i>Об одном типе квадриструктур на римановом пространстве</i>	108
Лозиенко Д. В., Курбатова И. Н. <i>Рекуррентно-параболические пространства, допускающие канонические квази-геодезические отображения</i>	109
Покась С.М., Червинский Р.В., Цехмейструк Л.Г. <i>Группа Ли движений в симметрическом римановом пространстве 1-го класса</i>	110
Полищук О. Р. <i>Качественный анализ некоторого сингулярного функционально-дифференциального уравнения</i>	111
Починка О. <i>Классификация омега-устойчивых потоков на поверхностях</i>	112
И. Х. Сабитов <i>Бесконечно малые изгибания с нулевой вариацией объёма многогранника</i>	115
Теплицкая Я. <i>Самосжимающиеся кривые, лежащие в компакте, имеют конечную длину</i>	117
Цвентух Е., Курбатова И. Н. <i>Структурные особенности $2F$-планарных отображений римановых пространств с f-структурой</i>	118