X Літня школа

"Алгебра, Топологія, Аналіз"

3 – 15 серпня 2015 року

Одеса, Україна

Тези доповідей

X Літня школа “Алгебра, Топологія, Аналіз”, 3 – 15 серпня 2015 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. — Київ: Інститут математики НАН України, 2015. — 73 с.

Організатори Літньої школи

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса

Інститут математики НАН України, Київ

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Інститут прикладних проблем механіки і математики, імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Благодійний фонд “Наука”, Одеса

Лекції

Короткі доповіді

Компактні топологічні напівгрупи

Олег Гутік
Механіко-математичний факультет, Львівський національний університет ім. І. Франка,
Університецька 1, Львів, 79000, Україна
o_gutik@franko.lviv.ua, ovgutik@yahoo.com

В лекціях планується зробити оглядовий виклад з елементами доведень основ теорії компактних топологічних напівгруп на основі базових монографій [1, 2, 4], оглядів [3, 5] та нових результатів у цьому напрямкові. Лекції будуть присвячені наступним питанням:

- структура максимальних підгруп і мінімального ідеалу компактної топологічної напівгрупи;
- неперервність інверсії в підгрупах та кліффордовій частині компактної топологічної напівгрупи;
- занурення напівгруп (біциклічного моноїда, напівгруп зі щільними ідеальними рядами) в компактні топологічні напівгрупи;
- відношення Гріна на компактних топологічних напівгрупах.

Також буде зроблено короткий огляд нових результатів для топологічних та напівтопологічних напівгруп близьких до компактних, отриманих у цих напрямках.

Примітка. Курс лекцій з основ теорії топологічних напівгруп, який містить докладні доведення даного курсу лекцій, викладено на web-сторінці:
“`http://www.franko.lviv.ua/faculty/mechmat/Departments/Topology/Gutik_Book_ukr.html`”

1. J. H. Carruth, J. A. Hildebrant, and R. J. Koch, *The Theory of Topological Semigroups*, Vol. I, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983; Vol. II, Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
2. K. H. Hofmann, and P. S. Mostert, *Elements of Compact Semigroups*, Charles E. Merril Books, Inc., Columbus, Ohio, 1966.
3. P. S. Mostert, *The structure of topological semigroups – revisited*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 601–618.
4. A. B. Paalman-de Miranda, *Topological Semigroups*, Mathematical Centre Tracts, 11 Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1964.
5 A. D. Wallace, *The structure of topological semigroups*, Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 95—112.

K-теорії та категорії

Володимир Любашенко
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
lub@imath.kiev.ua

K-теорія топологічних просторів X – це, насправді, K-теорія категорії (дійсних або комплексних) скінченновимірних векторних розшарувань на X. Узагальнюючи, можна визначити абелеві групи $K_n(\mathcal{C})$ для (не обов'язково адитивної) категорії Вальдгаузена $\mathcal{C}$. Прикладом такої слугують скінченні CW-комплекси. K-групи $K_n(\mathcal{C})$ є гомотопічними групами $\pi_n(\mathbb{K}(\mathcal{C}))$ деякого топологічного простору $\mathbb{K}(\mathcal{C})$. Виявляється, що $\mathbb{K}(\mathcal{C})$ – нескінченнократний простір петель (спектр).

Ентропія Колмогорова-Синая

Сергій Максименко
Інститут математики НАН України, вул. Терещенківська, 3, 01601, Україна
maks@imath.kiev.ua

1 Вступ

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — вимірний простір, тобто Ω — це деяка множина, $\mathcal{F}$ — σ-алгебра його підмножин, а μ — невід'ємна міра на $\mathcal{F}$.

Відображення $T : \Omega \to \Omega$ називається *вимірним* відносно $\mathcal{F}$, якщо $T^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ для всіх $A \in \mathcal{F}$. Якщо крім того $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ для всіх $A \in \mathcal{F}$, то кажуть, що T *зберігає міру* μ, а пара (Ω, T), або саме відображення T, називається *вимірною динамічною системою.*

Вимірна динамічна система називається ізоморфізмом, якщо $T^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ і існує множина повної міри $Q \subset \Omega$ така, що обмеження $T : T^{-1}(Q) \to Q$ є біекцією.

Дві вимірні динамічні системи (Ω, T) та (Ω, T') називаються *вимірно еквівалентними*, якщо існує ізоморфізм $f : \Omega \to \Omega$ такий, що $f \circ T = T' \circ f$.

Загальна задача теорії динамічних систем полягає в класифікації вимірних динамічних систем з точністю до еквівалентності, або хоча б у розрізненні таких систем.

Аналогічно, (неперервною) динамічною системою називається пара (Ω, T), де Ω — довільний топологічний простір, а $f : \Omega \to \Omega$ — неперервне відображення. Так само дві динамічні системи (Ω, T) та (Ω, T') називаються *топологічно еквівалентними*, якщо існує гомеоморфізм $f : \Omega \to \Omega$ такий, що $f \circ T = T' \circ f$.

Опишемо деякі взаємозв'язки між теоріями вимірних та неперервних динамічних систем.

1) На кожному топологічному просторі Ω можна визначити σ-алгебру, що породжується всіма відкритими підмножинами з Ω. Ця σ-алгебра називається *борелівською.* Тоді кожне неперервне відображення $T : \Omega \to \Omega$ є, очевидно, вимірним, (за означенням прообраз кожної відкритої підмножини є відкритим), хоча не кожне вимірне відображення є неперервним.

Крім того, якщо μ — деяка міра на $\mathcal{B}(\Omega)$, то T, взагалі кажучи, не зберігає μ. Але якщо Ω — компактний метризовний простір, то, згідно теореми Крилова-Боголюбова, для довільного неперервного відображення $T : \Omega \to \Omega$ існує інваріантна міра.

Таким чином динамічні системи на компактних метризовних просторах можна вивчати з точки зору теорії вимірних динамічних систем.

2) Нагадаємо, що кожна незлічена борелівська підмножина сепарабельного метричного простору називається *польським простором.* Добре відомо, що якщо Ω, Ω' — довільні польські простори, то пари $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ та $(\Omega', \mathcal{B}(\Omega'))$ ізоморфні, тобто існує біекція $f : \Omega \to \Omega'$ яка індукує деякий ізоморфізм f між алгебрами $\mathcal{B}(\Omega)$ та $\mathcal{B}(\Omega')$. Але такий ізоморфізм, взагалі кажучи, не буде навіть неперервним.

Зокрема, кожна така пара $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ ізоморфна парі $(I, \mathcal{B}(I))$, де $I = [0, 1]$ — одиничний інтервал.

3) Нагадаємо, що міра μ на σ-алгебрі $\mathcal{F}$ називається *повною*, якщо для довільної підмножини $A \in \mathcal{F}$ такої, що $\mu(A) = 0$, кожна її підмножина B також належить до $\mathcal{F}$.

Злічена сім'я підмножин $\{A_l\}_{l \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ називається *повним базисом* для $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, якщо

(a) для кожного $A \in \mathcal{F}$ існує $B \in \sigma(\{A_i\}_{l=1}^{\infty})$ таке, що $A \subset B$ і $\mu(B \setminus A) = 0$;

(b) для довільних $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ існує $l \in \mathbb{N}$ таке, що $\omega_1 \in A_l$ і $\omega_2 \in \Omega \setminus A_l$;

(c) кожен перетин $\bigcap_{l\in\mathbb{N}} B_l$, де B_l співпадає або з A_l або з $\Omega \setminus A_l$, є непорожнім.

Ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ називається *стандартним*, якщо він має повний базис, а міра μ є повною.

В. Рохлін (1961) довів, що кожен стандартний ймовірнісний простір з неатомарною мірою μ ізоморфний до ймовірнісного простору $(I, \mathcal{B}(I), \lambda)$, де λ — звичайна міра Лебега на I.

Для неперервних відображень існує багато різних інваріантів, наприклад ендоморфізми відповідних гомопічних груп та груп гомологій простору Ω. З іншого боку, вимірні відображення не обов'язково є неперервними і для розривних вимірних відображень гомотопічні інваріанти не працюють. Одним з понять, що дозволяє розрізняти мірозберігаючі динамічні системи є *ентропія*.

Вона була введена А. М. Колмогоровим (1958) і дозволила розрізняти так звані *зсуви Бернуллі* (див. нижче). З іншого боку І. Г. Синай (1962) довів, що зсуви Бернуллі з однаковою ентропією вимірно еквівалентні. Іншими словами ентропія Колмогорова-Синая класифікує зсуви Бернуллі.

Нехай Ω — непорожня множина. Для сім'ї підмножин $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ з Ω позначимо через $\sigma(\mathcal{A})$ — σ-алгебру породжену $\mathcal{A}$. Для відображення $\Theta : \Omega \to X$ в деякий топологічний простір X позначатимемо через $\sigma(\Theta)$ — σ-алгебру на Ω що є прообразом σ-алгебри $\mathcal{B}(X)$ всіх борелівських підмножин з X відносно відображення Θ.

Аналогічно, для довільної сім'ї підмножин $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ позначатимемо через $\sigma(\mathcal{A})$ найменшу σ-алгебру на Ω, що містить всі елементи з $\mathcal{A}$.

Якщо $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in I}$ та $\mathcal{B} = \{B_j\}_{j\in J}$ — два розбиття Ω, то можна визначити нове розбиття $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ множини Ω, що складається з усіх можливих перетинів елементів з $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}$, тобто

$$\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \{A_i \cap B_j \mid A_i \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B}\}.$$

Будемо також писати, що

$$\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$$

якщо кожен елемент $A \in \mathcal{A}$ є скінченним об'єднанням деяких елементів з $\mathcal{B}$. Зокрема, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \prec \mathcal{A}$ та $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \prec \mathcal{B}$.

Для двох під-σ-алгебр $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ писатимемо

$$\mathcal{B} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{A}$$

якщо для кожного $B \in \mathcal{B}$ існує таке $A \in \mathcal{A}$, що $\mu(B \triangle A) = 0$, де $B \triangle A = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$ — *симетрична різниця* A та B. Відповідно, запис

$$\mathcal{B} \overset{\circ}{=} \mathcal{A}$$

означатиме, що одночасно виконуються дві умови: $\mathcal{A} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{B}$ та $\mathcal{B} \overset{\circ}{\subset} \mathcal{A}$.

Нехай $\mathcal{F}$ — σ-алгебра of підмножин з Ω і μ — ймовірнісна міра на $\mathcal{F}$. Скінчене розбиття $\mathcal{A} = \{A_0, \ldots, A_n\}$ множини Ω назвемо *вимірним*, якщо $A_i \in \mathcal{F}$ для всіх $i = 0, \ldots, n$. Позначимо через $\Pi(\mathcal{F})$ множину всіх скінчених вимірних розбиттів множини Ω. Тоді число

$$H_\mu(\mathcal{A}) = -\sum_{i=0}^{n} \mu(A_i) \log \mu(A_i) \tag{1.1}$$

називається *ентропією* розбиття $\mathcal{A} \in \Pi(\mathcal{F})$ відносно міри μ, де $\log$ можна брати за довільною основою > 1.

2 Аксіоматична характеризація функції ентропії

Нехай

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0,\, x_1 + \dots + x_n = 1\}$$

— $(n-1)$-вимірний симплекс в $\mathbb{R}^n$. Вважаючи, що $0 \log 0 = 0$, визначимо функцію

$$H_n : B_n \to \mathbb{R}, \qquad H_n(x_0, \dots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i,$$

де $\log$ береться за довільною фіксованою основою > 1.

Задача 2.1. Як змінюється функція H_n при заміні основи логарифма, скажімо з a на b?

Очевидно, що H_n неперервна і симетрична відносно перестановок змінних. Також легко перевірити, що H_n досягає максимального значення в центрі симплекса $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$, тобто

$$H_n(\tfrac{1}{n}, \dots, \tfrac{1}{n}) = -\sum_{i=1}^{n} \tfrac{1}{n} \log \tfrac{1}{n} = -\tfrac{n}{n} \log \tfrac{1}{n} = -\log \tfrac{1}{n} = \log(n),$$

а мінімального значення в вершинах симплекса:

$$H_n(1, 0, \dots, 0) = -1 \log 1 - 0 \log 0 - \dots - 0 \log 0 = 0.$$

Зауваження 2.2. Відмітимо, що для скінченого вимірного розбиття $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ множини Ω вектор значень мір

$$(\mu(A_1), \dots, \mu(A_n))$$

належить до B_n, а формулу (1.1) можна переписати у такому вигляді:

$$H_\mu(\mathcal{A}) = H_n\big(\mu(A_1), \dots, \mu(A_n)\big).$$

Таким чином ентропія розбиття $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ — максимальна, якщо міри всіх елементів однакові. Якщо ж навпаки, міра одного з елементів A_i близька до 1, а міри всіх інших, відповідно, близькі до 0, то ентропія приймає найменше значення близьке до 0.

Задача 2.3. Перевірте наступні властивості ентропії H.

1) $H_n(p_1, \dots, p_{n-1}, 0) = H_{n-1}(p_1, \dots, p_{n-1})$.

2) $H_n(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}) < H_m(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m})$ при $n < m$.

3) Якщо $(p_1, \dots, p_n) \in B_n$ і $p_1 = \sum_{i=1}^{m} q_i$, де $q_i \in [0, 1]$, то

$$H_{m+n-1}(q_1, \dots, q_m, p_2, \dots, p_n) = H_n(p_1, \dots, p_n) + p_1 H_m\big(\tfrac{q_1}{p_1}, \tfrac{q_2}{p_1}, \dots, \tfrac{q_m}{p_1}\big).$$

Теорема 2.4. $H_n : \Delta^n \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$, — довільна сім'я неперервних невід'ємних функцій, що задовольняють умови (1)-(3) задачі 2.3. Тоді існує $a > 1$ таке, що

$$H_n(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i \log_a x_i \tag{2.1}$$

для всіх $n \geq 1$.

Задача 2.5. Доведіть теорему 2.4 встановивши наступні властивості.

(a) Позначимо $Q(n) = H_n(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$. Тоді $Q(mn) = Q(m) + Q(n)$, для довільних $m, n \in \mathbb{N}$.

(b) Виведіть з (a) існування такого $a > 1$, що $Q(n) = \log_a n$ для $n \geq 1$.

(c) Покажіть, що формула (2.1) виконується для всіх точок $(x_1, \ldots, x_n)$ з раціональними координатами.

(d) Доведіть формулу (2.1) в загальному випадку.

Виходячи з теореми 2.4 можна сформулювати «наївний» зміст ентропії.

Виберемо навмання точку $x \in \Omega$ і поставимо таке питання: *знаючи міри всіх множин розбиття, чи можна сказати до якої з множин A_i ця точка належить?* Ентропію розбиття $\mathcal{A}$ можна розглядати як міру «невизначеності» того, до якої з множин належить точка.

Якщо міри всіх множин A_i майже однакові, то така «невизначеність» є максимальною і це узгоджується з тим, що в даній ситуації ентропія найбільша. Крім того, при подрібненні деяких елементів розбиття ентропія також збільшується (властивість (3) задачі 2.3).

Навпаки, якщо майже вся міра сконцентрована в одній з множин A_i, то «скоріше за все» дана точка належить до A_i, і в цьому випадку ентропія виявляється найменшою.

3 Ентропія Колмогорова-Синая динамічної системи

Нехай тепер $T : \Omega \to \Omega$ — вимірне відображення і $\mathcal{A} \in \Pi(\mathcal{F})$ — скінчене вимірне розбиття Ω. Позначимо через

$$T^{-1}\mathcal{A} = \{T^{-1}(A_1), \ldots, T^{-1}(A_k)\}$$

розбиття Ω, що складається з усіх прообразів елементів з $\mathcal{A}$.

Задача 3.1. Доведіть, що $T^{-1}\mathcal{A} \in \Pi(\mathcal{F})$.

Крім того, для кожного $n \geq 1$ розглянемо нове розбиття Ω:

$$\tau_k(\mathcal{A}) = \mathcal{A} \vee T^{-1}\mathcal{A} \vee \cdots T^{-(k-1)}\mathcal{A}.$$

Задача 3.2. Доведіть, що $\tau_k(\mathcal{A}) \in \Pi(\mathcal{F})$.

Задача 3.3. Доведіть, що для довільних $k, l, n \geq 1$ виконуються співвідношення

$$\tau_k(\tau_l(T, \mathcal{A})) = \tau_{k+l}(T, \mathcal{A}), \tag{3.1}$$

$$\tau_k(T^n, \tau_n(T, \mathcal{A})) \;=\; \tau_{kn}(T, \mathcal{A}) \;\prec\; \tau_k(T^n, \mathcal{A}). \tag{3.2}$$

Зрозуміло, що відображення T періодичне, скажімо періоду p, тобто $T^p = \mathrm{id}_\Omega$, тоді, $T^{-k}\mathcal{A} = T^{-k-mp}\mathcal{A}$ для всіх $k, n \geq 0$, а тому $\tau_{p+1}(T, \mathcal{A}) = \tau_{p+2}(T, \mathcal{A}) = \cdots$. Зокрема, значення ентропії $H_\mu(\tau_k(T, \mathcal{A}))$ теж стабілізується.

Припустимо, що розбиття $\mathcal{A}$ складається з n елементів. Тоді $\tau_k(T, \mathcal{A})$ містить щонайбільше n^k елементів, а тому максимальне значення ентропії $H_\mu(\tau_k(T, \mathcal{A}))$ дорівнює $\log(n^k) = k\log(n)$. Тому природно визначити «швидкість росту ентропії» для пари $(T, \mathcal{A})$ по відношенню до k:

$$h_\mu(T, \mathcal{A}) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\tau_k(T, \mathcal{A})).$$

Задача 3.4. Доведіть, що коли розбиття $\mathcal{A}$ складається з n елементів, то

$$h_\mu(T, \mathcal{A}) \leq \log(n).$$

Задача 3.5. Доведіть, що $h_\mu(T, \mathcal{A}) = 0$ для довільного періодичного T та $\mathcal{A} \in \Pi(\mathcal{F})$.

Це приводить до означення ентропії Колмогорова-Синая.

Означення 3.6. Нехай $T : \Omega \to \Omega$ — відображення, що зберігає міру μ. Тоді його **ентропія Колмогорова-Синая** визначається за такою формулою:

$$h_\mu^{KS}(T) = \sup_{\mathcal{A}\in\Pi(\mathcal{F})} h_\mu(T, \mathcal{A}) = \sup_{\mathcal{A}\in\Pi(\mathcal{F})} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\tau_k(T, \mathcal{A})).$$

Таким чином обчислення ентропії Колмогорова-Синая вимагає розгляду *всіх* скінченних розбиттів Ω, що належать $\Pi(\mathcal{F})$.

Задача 3.7. Доведіть, що $h_\mu^{KS}(T) = 0$ для довільного періодичного T.

Наступна лема показує, що $h_\mu^{KS}(T)$ можна обчислювати через спеціальну зростаючу послідовність скінченних розбиттів.

Лема 3.8. Нехай $T : \Omega \to \Omega$ — відображення, що зберігає міру μ. Припустимо, що існує послідовність $\{\mathcal{A}_d\}_{d\geq 1}$ скінченних розбиттів $\mathcal{F}$ така, що

$$\mathcal{A}_1 \prec \mathcal{A}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{A}_d \prec \cdots$$

та $\sigma\left(\{\mathcal{A}_d\}_{d=1}^\infty\right) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$. Тоді

$$h_\mu^{KS}(T) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\tau_k(T, \mathcal{A}_d)).$$

Задача 3.9. Виведіть з (3.2), що для довільного відображення $T : \Omega \to \Omega$, що зберігає міру μ, та $n \geq 1$ виконується тотожність

$$h_\mu^{KS}(T^n) = n\, h_\mu^{KS}(T).$$

Зокрема, якщо $0 < h_\mu^{KS}(T) < \infty$, то для $m \neq n$ відображення T^m та T^n **не є вимірно еквівалентними**.

Для цього

(a) виведіть із співвідношення $\tau_{kn}(T, \mathcal{A}) \prec \tau_k(T^n, \mathcal{A})$, що $h_\mu(T^n, \mathcal{A}) \leq n\, h_\mu(T, \mathcal{A})$ для довільного $\mathcal{A} \in \Pi(\mathcal{F})$, а тому $h_\mu^{KS}(T^n) \leq n\, h_\mu^{KS}(T)$,

(b) виведіть із співвідношення $\tau_k(T^n, \tau_n(T, \mathcal{A})) = \tau_{kn}(T, \mathcal{A})$, що $h_\mu^{KS}(T^n) \geq n\, h_\mu^{KS}(T)$.

4 Зсув Бернуллі

Ми розглянемо найпростіший випадок зсувів Бернуллі.

Нехай $\Omega = \{(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \mid a_j \in \{0,1\}\}$ — множина всіх нескінченних в обидві сторони послідовностей, що складаються лише з чисел 0 та 1.

Для скінченної послідовності пар чисел $\xi = \{(n_i, b_i) \mid, i = 1, \dots, k\}$, такої, що $n_i \neq n_j$ для $i \neq j$, $b_i \in \{0,1\}$ визначимо «циліндричну» підмножину

$$P^{b_1,\dots,b_k}_{n_1,\dots,n_k} = \{(a_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \Omega \mid a_{n_i} = b_i, i = 1, \dots, k\},$$

що складається з усіх послідовностей з Ω у яких n_i-та координата дорівнює b_i. Нехай також $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω породжена всіма циліндричними множинами.

Задача 4.1. Доведіть, що $P^a_m \cap P^b_n = P^{a,b}_{m,n}$ для $m \neq n$ та $a, b \in \{0,1\}$.

Задача 4.2. Для двох циліндричних множин $P^{a_1,\dots,a_l}_{m_1,\dots,m_k}$ та $P^{b_1,\dots,b_k}_{n_1,\dots,n_k}$ опишіть їх перетин.

Дамо інший опис простору Ω. Відмітимо, що $\Omega = \prod_{-\infty}^{\infty}\{0,1\}$ є топологічним добутком зліченого числа копій дискретного простору $\{0,1\}$. Задамо на Ω індуковану топологію. Тоді $\mathcal{F}$ співпадає з борелівською алгеброю топологічного простору Ω.

Визначимо ймовірнісну міру μ на $\mathcal{F}$ за таким правилом:

$$\mu(P^{b_1,\dots,b_k}_{n_1,\dots,n_k}) = \frac{1}{2^k}.$$

Задача 4.3. Перевірте, що попередня формула дійсно визначає міру на $\mathcal{F}$. Якою є міра множини $P^{b_1,\dots,b_k,\dots}_{n_1,\dots,n_k,\dots}$, що складається з послідовностей у яких зафіксовано нескінченна кількість координат.

Визначимо відображення $\phi : \Omega \to \Omega$ за формулою $\phi\big((a_j)_{j\in\mathbb{Z}}\big) = (a_{j+1})_{j\in\mathbb{Z}}$. Воно називається *зсувом Бернуллі* і полягає в зсуві вправо на 1 всіх координат.

Задача 4.4. Доведіть, що зсув Бернуллі зберігає міру μ.

Наша мета обчислити ентропію Комогорова-Синая для ϕ та всіх його ітерацій. Проблема полягає в доведенні того, що ϕ^k та ϕ^l не є спряженими для $|k| \neq |l|$.

Задача 4.5. Доведіть, що зсуви Бернуллі ϕ^k та ϕ^{-k} є спряженими для всіх $k \geq 1$. Зокрема, вони мають однакові ентропії.

Теорема 4.6. $h^{KS}_\mu(\phi) = \log 2$, а тому, згідно задачі 3.9, $h^{KS}_\mu(\phi^n) = n \log 2$ для $n \geq 1$.

Задача 4.7. Доведіть теорему 4.6 встановивши такі твердження.

(a) Нехай $\mathcal{A}_i = \{P^0_i, P^1_i\}$, $i \in \mathbb{Z}$, — розбиття Θ на дві підмножини. Тоді

$$h_\mu(\phi, \mathcal{A}_i) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H_\mu(\tau_k(\phi, \mathcal{A}_i)) = \log 2.$$

(b) $\sigma\left(\{\mathcal{A}_d\}_{d=1}^{\infty}\right) \overset{\circ}{=} \mathcal{F}$.

Тоді з (b) та леми 3.8 випливатиме, що $h^{KS}_\mu(T) = \log 2$.

Применение торических методов в построении F-теории

Т.В. Обиход

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев, Украина

obikhod@kinr.kiev.ua

F-теория, как 12-мерная теория, являющаяся претендентом Theory of everything в 4-мерном мире теоретической физики, должна быть компактифицирована на эллиптически расслоенные трифолды или фоурфолды Калаби-Яу, X. Такие многообразия имеют в качестве слоя эллиптическую кривую, а их базой являются поверхности Хирцебруха, F_k [1]. Для поверхностей дель Пецо, B_k, вложенных в многообразия X, вычисляются группы когомологий, $H^{1,1}(B_k)$, определяющие кривые определенной степени и арифметического рода, число которых дает представление групп Вейля, E_k. Благодаря вложению групп когомологий $H^{1,1}(B_k) \to H^{1,1}(X)$, мы получаем реализацию многообразий Калаби-Яу во взвешенном проективном пространстве, которое связанно с представлениями групп Вейля [2], дающими мультиплеты частиц физики высоких энергий. Оказывается, что свойства многообразия Калаби-Яу во взвешенном проективном пространстве, также как и расчет числа рациональных кривых, могут быть реализованы в проективных торических многообразиях [3]. С помощью комбинаторных методов разработана торическая техника разрешения особенностей многообразий. Использование зеркальной симметрии позволяет представлять многообразия Калаби-Яу в виде дуальных полиэдров с вершинами, выражаемыми в терминах генераторов Мори l^i, а дифференциальные уравнения для периодов дают главные части операторов Пикара-Фукса L_i [4]. С помощью генераторов Мори и главных частей операторов Пикара-Фукса вычислены инварианты Громова-Виттена n_{ijk}, которые определяют число BPS состояний в F-теории [5].

1. C. Vafa, *Evidence for F-theory*, arXiv: hep-th/9602022; D. R. Morrison and C. Vafa, *Compactifications of F-theory on Calabi-Yau threefolds (I)*, Nucl. Phys. **B473** (1996) 74; D. R. Morrison and C. Vafa, *Compactifications of F-theory on Calabi-Yau threefolds (II)*, Nucl. Phys. **B476** (1996) 437.
2. A. Klemm, P. Mayr, C. Vafa, *BPS states of exceptional non-critical strings*, Harvard, 1996. – 29 p. – (Preprint, HUTP-96/A031).
3. V. V. Batyrev, *Variations of the Mixed Hodge Structure of Affine Hypersurfaces in Algebraic Tori*, Duke Math. J. 69, (1993), 349-409.
4. S. Hosono, A. Klemm, S. Theisen, S.-T. Yau, *Mirror symmetry, mirror map and applications to complete intersection Calabi-Yau spaces*, Nucl. Phys. **B433** (1995) 501.
5. Ю. М. Малюта, Т.В. Обиход, *БПС-состояния в F-теории*, Український математичний журнал. **т.54**, №9 (2002) 1284.

Топологія гамільтонових векторних полів

О. О. Пришляк
Київський національний університет ім. Шевченка
prishlyak@yahoo.com

1. Ріманова метрика на многовиді.
2. Векторне поле градієнта.
3. Потік (динамічна система з неперервним часом).
4. Топологічна еквівалентність та спряженість. Структурна стійкість (грубість).
5. Поле Морса-Смейла на поверхні.
6. Потоки на поверхнях з межею.
7. Симплектичні многовиди.
8. Гамільтонове векторне поле (поле косого градієнта).
9. Функції Морса та класифікація гамільтонових векторних полів на поверхнях.
10. Інтегровні гамільтонові системи на чотиривимірних многовидах.

Экстремально несвязные группы и ультрафильтры

О. В. Сипачева

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

o-sipa@yandex.ru

Мы обсудим чрезвычайно интересную проблему существования недискретной хаусдорфовой экстремально несвязной топологической группы в ZFC, которая была поставлена А.В. Архангельским в 1967 г. и до сих пор привлекает много внимания. Было построено несколько примеров таких групп в разных моделях теории множеств, но «наивный» пример не построен до сих пор. Однако попытки решить проблему Архангельского привели к обнаружению интересных связей между теорией топологических групп и теорией ультрафильтров; в частности, оказалось, что существование топологических групп с определенными экстремальными свойствами тесно связано с существованием ультрафильтров определенного типа. Кроме того, проблема Архангельского сыграла немаловажную роль в построении теории сходящихся ультрафильтров на топологических группах.

1 Экстремально несвязные группы

Определение. Топологическое пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкание любого открытого множества в этом пространстве открыто (или, что то же самое, любые два непересекающихся открытых множества имеют непересекающиеся замыкания).

Проблема (А.В. Архангельский, 1967). Существует ли в ZFC недискретная отделимая экстремально несвязная топологическая группа?

В.И. Малыхин заметил, что любая экстремально несвязная топологическая группа содержит открытую булеву подгруппу. Всякая булева группа является линейным пространством над полем $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, а каждое линейное пространство имеет базис; значит, любая булева группа свободна.

2 Ультрафильтры на ω

Определение. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на ω называется

- *P-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$ множества ω, где $A_n \notin \mathscr{U}$ для всех n, найдется $A \in \mathscr{U}$ такой, что $|A \cap A_n| < \aleph_0$ для любого n;
- *Q-ультрафильтром*, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$ множества ω, где A_n конечны для всех n, найдется $A \in \mathscr{U}$ такой, что $|A \cap A_n| \leqslant 1$ для любого n;
- *быстрым*, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$ множества ω, где A_n конечны для всех n, найдется $A \in \mathscr{U}$ такой, что $|A \cap A_n| \leqslant n$ для любого n (или, эквивалентно, если любая функция $\omega \to \omega$ мажорируется последовательностью, полученной в результате нумерации элементов некоторого $A \in \mathscr{U}$ в порядке возрастания);
- *селективным*, или *рамсеевским*, если для любого разбиения $\{A_n : n \in \omega\}$ множества ω, где $A_n \notin \mathscr{U}$ для всех n, найдется $A \in \mathscr{U}$ такой, что $|A \cap A_n| \leqslant 1$ для любого n.

Ясно, что селективность $= P + Q$.

Известно, что в CH существуют селективные ультрафильтры, и $P \neq Q \neq$ селективность $\neq P$. Известно также, что в ZFC существует ультрафильтр, не являющийся ни P-ультрафильтром, ни Q-ультрафильтром. Не всякий быстрый ультрафильтр является Q-ультрафильтром, однако существование быстрых ультрафильтров равносильно существованию Q-ультрафильтров.

Шелах построил модель, в которой нет P-ультрафильтров. Миллер доказал, что в модели Лавера нет Q-ультрафильтров (но есть P-ультрафильтры).

Старая задача: Существует ли модель, в которой нет ни P-ультрафильтров, ни Q-ультрафильтров?

Для полноты картины стоит упомянуть результат Матиаса и Тэйлора: ультрафильтр $\mathscr{U}$ является Q-ультрафильтром $\iff$ для любого отображения $\varphi\colon \omega \to \omega$ найдется $A \in \mathscr{U}$ такой, что $\varphi(a) < b$ для любых $a, b \in A$, $a < b$.

Пусть X и Y — множества, $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на X и $f\colon X \to Y$ — отображение. Тогда семейство

$$\mathscr{V} = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\}$$

является ультрафильтром на Y. Обозначение: $\mathscr{V} = f(\mathscr{U})$. Это наблюдение позволяет ввести естественный *порядок Рудин–Кейслера* на классе ультрафильтров:

$$\mathscr{V} \leqslant_{\mathrm{RK}} \mathscr{U} \iff \exists f\colon X \to Y, \text{ для которого } \mathscr{V} = f(\mathscr{U}).$$

3 Экстремально несвязные группы и ультрафильтры

В 1969 г. Симон Сирота построил первый пример недискретной экстремально несвязной группы (в CH). По существу группа Сироты выглядит так.

Для фильтра $\mathscr{F}$ на ω пусть $\omega_{\mathscr{F}} = \omega \cup \infty$; точки ω изолированы, окрестности ∞ имеют вид $\{\infty\} \cup A$, где $A \in \mathscr{F}$. Вложение $\omega_{\mathscr{F}}$ в $[\omega]^{<\omega}$, при котором $i \mapsto \{0, i+1\}$ и $\infty \mapsto 0$, отождествляет свободную булеву группу $B(\omega_{\mathscr{F}})$ и группу $[\omega]^{<\omega}$ с операцией $\triangle$. На группе $B(\omega_{\mathscr{F}})$ имеются следующие естественные топологии:

- *топология Матиаса* τ_M (окрестности 0: $\langle A\rangle$, $A \in \mathscr{F}$);
- *свободная топология* τ_f;
- *топология индуктивного предела* τ_I относительно разложения

$$B(\omega_{\mathscr{F}}) = \bigcup_{n\in\omega} \{\text{слова (конечные множества) размера } \leqslant n\}.$$

Понятно, что $\tau_M \subset \tau_f \subset \tau_f$.

Теорема (Эгберт Тюммель). (i) Если $\mathscr{F}$ — рамсеевский фильтр, то $\tau_M = \tau_f = \tau_f$;

(ii) группа $B(\omega_{\mathscr{F}})$ экстремально несвязна $\iff$ $\mathscr{F}$ — рамсеевский (селективный) ультрафильтр.

Другие (совместимые с ZFC) примеры построили Луво, Зеленюк и Малыхин. Были получены и некоторые результаты в направлении доказательства несуществования недискретной экстремально несвязной группы в ZFC.

Теорема (Зеленюк)**.** Если существует недискретная экстремально несвязная группа G, содержащая незамкнутое сильно дискретное множество D, то существует P-ультрафильтр на ω.

Проблема (Протасов)**.** Существует ли в ZFC (счетная) недискретная топологическая группа, в которой все дискретные подножества замкнуты?

Теорема. Если существует недискретная экстремально несвязная булева группа (линейное пространство) B с базисом X таким, что любые непересекающиеся замкнутые $A, B \subset X$ разделяются непрерывным гомоморфизмом $B \to \{0,1\}$, то существует P-ультрафильтр на ω.

На самом деле в теореме Зеленюка речь идет не о P-ультрафильтрах на ω, а о частично селективных ультрафильтрах на D.

Определение (Зеленюк)**.** Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X с $|X| = \kappa$ называется *частично селективным*, если существует $E \subset [X]^2$ такое, что $\{x \in X : \{y \in X : \{x, y\} \in E\} \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$ и для любого разбиения $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ множества X, где $A_\alpha \notin \mathscr{U}$ $\forall \alpha < \kappa$, найдется $A \in \mathscr{U}$ со свойством $[A \cap A_\alpha]^2 \cap E = \varnothing$ $\forall \alpha < \kappa$.

Равносильное определение. Ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X с $|X| = \kappa$ называется *частично селективным*, если существует $\varphi\colon X \to \mathscr{U}$ такое, что для любого разбиения $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ множества X, где $A_\alpha \notin \mathscr{U}$ для всех $\alpha < \kappa$, найдется $A \in \mathscr{U}$ такой, что $A \cap A_\alpha \cap \varphi(x) = \varnothing$ для любых $\alpha < \kappa$ и $x \in A \cap A_\alpha$.

Утверждение (Зеленюк)**.** Для любого частично селективного ультрафильтра $\mathscr{U}$ на любом X существует $f\colon X \to \omega$, для которого $f(\mathscr{U})$ является P-ультрафильтром.

Утверждение. Для любого частично селективного P-ультрафильтра $\mathscr{U}$ на ω существует $f\colon \omega \to \omega$, для которого $f(\mathscr{U})$ является Q-ультрафильтром (а значит, и селективным ультрафильтром).

Пусть B — булева группа (= линейное пространство). Любой базис в B определяет представление $B = \sigma\{0,1\}^{|B|}$.

Следствие. Если существует счетная экстремально несвязная булева группа B, обладающая незамкнутым базисом, причем топология B сильнее тихоновской топологии, порожденной этим базисом, то существует и селективный ультрафильтр на ω.

Все (совместимые с ZFC) примеры экстремально несвязных групп, построенные до сих пор, имеют базу окрестностей нуля, состоящую из подгрупп. Однако «наивный» счетный пример таким образом построить нельзя.

Лемма 1. Пусть G — счетная недискретная булева топологическая группа, которая содержит (счетное) убывающее семейство открытых подгрупп $G_i \subset G$, $i \in \omega$ со свойством $\bigcap G_i = \{0\}$. Тогда существует непрерывный изоморфизм $\varphi\colon G \to \bigoplus_\omega \mathbb{Z}_2$, т.е. такой изоморфизм φ, что топология на G индуцированная этим изоморфизмом (топология «произведения») содержится в данной топологии группы G.

Зафиксировав изоморфизм $\varphi\colon G \to \bigoplus_\omega \mathbb{Z}_2$, мы можем отождествлять элементы группы G с отображениями $\omega \to \mathbb{Z}_2$ с конечным носителем. Таким образом, определены отображения

$$\min\colon G \to \omega, \qquad \min g = \min \operatorname{supp} g$$

и

$$\max\colon G \to \omega, \qquad \max g = \max \operatorname{supp} g.$$

Лемма 2. Пусть G — счетная булева топологическая группа, которую можно представить в виде $G \cong \bigoplus_\omega \mathbb{Z}_2$ таким образом, что

$$\begin{array}{l}\text{для любой функции } f: \omega \to \omega \text{ множество} \\ U_f = \{x \neq 0 : \max x > f(\min x)\} \cup \{0\} \\ \text{является окрестностью } 0.\end{array} \tag{1}$$

Предположим, что $f: \omega \to \omega$ — любая возрастающая функция и V — такая окрестность нуля, что $2V \subset U_g$ для функции $g: \omega \to \omega$, определенной правилом $g(n) = f(2^{n+1})$. Тогда возрастающая последовательность $\{m_0, m_1, \dots\}$, полученная нумерацией элементов множества $\max(V \setminus \{0\})$, мажорирует f, т.е. $m_i > f(i)$ для всех $i \in \omega$.

Теорема. Существование счетной экстремально несвязной топологической группы, содержащей семейство открытых подгрупп, пересечение которых имеет пустую внутренность, влечет существование быстрого ультрафильтра.

Легко видеть, что для любой счетной булевой группы G с фиксированным изоморфизмом $\varphi\colon G \to \bigoplus_\omega \mathbb{Z}_2$ и любого отображения $f: \omega \to \omega$ множество

$$C_f = G \setminus U_f = \{x \in G \setminus \{0\} : \max x \leq f(\min x)\}$$

дискретно в топологии «произведения», индуцированной изоморфизмом φ, и $C_f \cup \{0\}$ замкнуто в этой топологии. Отсюда вытекает следующее утверждение, которое дает частичный ответ на вопрос Протасова.

Следствие. Пусть (G, τ) — счетная недискретная булева топологическая группа, которая не имеет дискретных подмножеств с единственной предельной точкой и содержит семейство открытых подгрупп $G_i \subset G$, $i \in \omega$, со свойством $\bigcap G_i = \{0\}$. Тогда существует быстрый ультрафильтр.

Следствие. Следующее утверждение совместимо в ZFC: Любая счетная булева группа с максимальной недискретной групповой топологией содержит дискретное подмножество с единственной предельной точкой.

4 Свойства, близкие к экстремальной несвязности

1. $G \setminus \{0\}$ C^*-вложено в G;

2. $\{0\} \neq A \cap B$, где A и B канонически замкнуты (т.е. 0 — не π_2-точка);

3. $\{0\} \neq \bigcap_{i \leq n} A_i$, где A_i канонически замкнуты (т.е. 0 — не π-точка);

4. G экстремально несвязна;

5. G сильно экстремально несвязна (в любом неоткрытом замкнутом множестве есть изолированная точка $\iff$ для любого открытого U со свойством $\overline{U} \neq U$ существует точка $g \in \overline{U} \setminus U$, для которой $U \cup \{g\}$ открыто;

6. если U открыто и $g \in \overline{U} \setminus U$, то $U \cup \{g\}$ открыто;

7. G неразложима ($G \neq A \cup B$: $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A} = \overline{B} = G$);

8. топология G максимальна (ее нельзя усилить до топологии без изолированных точек).

5 Вопросы

Задача 1. Верно ли, что для любого частично селективного ультрафильтра $\mathscr{U}$ на ω существует отбражение $f\colon \omega \to \omega$, для которого $f(\mathscr{U})$ является Q-ультрафильтром?

Задача 2. Верно ли, что для любого частично селективного ультрафильтра $\mathscr{U}$ на ω существует отображение $f\colon \omega \to \omega$, для которого $f(\mathscr{U})$ селективен?

Задача 3. Верно ли, что если $\nexists$ Q-ультрафильтр (или если $\nexists$ P-ультрафильтр), то любое линейно независимое множество в любой экстремально несвязной группе замкнуто ($\Rightarrow$ дискретно)?

Старая задача (Протасов). Существует ли в ZFC недискретная топологическая группа, в которой все дискретные подмножества замкнуты?

Малыхин доказал, что Лемма Буса влечет существование счетной недискретной экстремально несвязной группы, в которой все дискретные подмножества замкнуты.

6 Проблема Хрушака

Пусть G — экстремально несвязная группа и $f\colon G \to 2^{\aleph_0}$ — любое непрерывное отображение. Верно ли, что найдется открытое множество $U \subset G$, образ которого $f(U)$ нигде не плотен в $2^{\aleph_0}$?

Если ответ на этот вопрос положителен, то «наивного» примера счетной недискретной экстремально несвязной группы нет.

Скрещенные модули

Н. Хмельницкий
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка
khmelnit@meta.ua

Определение 1. *Скрещенным модулем (над группой)* $\mathcal{M} = (\mu\colon M \to P)$ *называется морфизм групп* $\mu\colon M \to P$ *(называемый границей* $\mathcal{M}$*) вместе с действием* $(m, p) \mapsto m^p$ *группы* P *на* M *и удовлетворяющий аксиомам*

(CM1) $\mu(m^p) = p^{-1}\mu(m)p$

(CM2) $n^{-1}m\,n = m^{\mu n}$

для всех $m, n \in M$*,* $p \in P$*.*

Когда необходимо выделить область значений P, тогда $\mathcal{M}$ называется скрещенным P-модулем.

Основными алгебраическими примерами скрещенных модулей являются:

- Вложение $N \lhd G$ нормальной подгруппы N в группу G вместе с действием сопряжения, так называемый сопряженный скрещенный модуль. В частности, для любой группы P тождественное отображение $\mathrm{id}_P\colon P \to P$ является скрещенным модулем с действием P на себе сопряжением. Заметим, что понятие скрещенного модуля можно рассматривать как облечение в конкретную форму понятия нормальной подгруппы. То есть, вложение заменяется гомоморфизмом с особыми свойствами. Этот процесс встречается и в других алгебраических ситуациях.

- Гомоморфизм групп $\chi\colon M \to \mathrm{Aut}(M)$, где $\chi(m)$ — внутренний автоморфизм, отображающий n в $m^{-1}n\,m$, — автоморфный скрещенный модуль. Если A удовлетворяет условиям $\mathrm{Inn}(M) \leqslant A \leqslant \mathrm{Aut}(M)$ и $\chi(M) \subseteq A$, то морфизм $\chi\colon M \to A$ также называется автоморфным скрещенным модулем.

- Тривиальный скрещенный модуль $0\colon M \to P$ всегда, когда абелева группа M является P-модулем.

- Любой гомоморфизм $\mu\colon M \to P$, где M абелева и $\mathrm{Im}\,\mu$ лежит в центре P, представляет собой скрещенный модуль с P, действующей тривиально на M.

- Сюръективный гомоморфизм $\mu\colon M \to P$ с ядром, содержащимся в центре M, и $p \in P$ действует на $m \in M$ сопряжением любым элементом из $\mu^{-1}p$.

Категория $\times Mod/Gr$ скрещенных модулей имеет в качестве объектов все скрещенные модули над группами. Морфизмами в $\times Mod/Gr$ из $\mathcal{M} = (\mu\colon M \to P)$ в $\mathcal{N} = (\nu\colon N \to Q)$ является пара гомоморфизмов (g, f), делающих коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "g"'] & P \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "\nu"'] & Q, \end{tikzcd}$$

и сохраняющих действие в смысле, что для всех $m \in M$ и $p \in P$ имеет место тождество $g(m^p) = (g\,m)^{fp}$. Если P — группа, то P-морфизмом P-скрещенных модулей называется гомоморфизм $g\colon M \to N$ такой, что (g, id_P) — морфизм скрещенных модулей. Все P-скрещенные модули и P-морфизмы образуют подкатегорию $\times Mod/P$ категории $\times Mod/Gr$.

Предложение 1. *Для любого скрещенного модуля $\mu\colon M \to P$ справедливо, что $\mu M \lhd P$.*

Доказательство. Это следует непосредственно из CM1. $\square$

Любое подмножество из центра $Z(M)$ группы M называется центральным в M.

Предложение 2. *Пусть $\mu\colon M \to P$ — скрещенный модуль. Тогда*

1. $\ker\mu$ *центрально в M.*
2. $\mu(M)$ *действует тривиально на $Z(M)$.*
3. *На $Z(M)$ и $\ker\mu$ индуцируется действие $\operatorname{coker}\mu$, превращая их в $\operatorname{coker}\mu$-модуль.*

Доказательство. Аксиома CM2 показывает, что если $m, n \in M$ и $\mu n = 1$, то $mn = nm$. Это доказывает 1. С другой стороны, в силу CM2 и CM1, из $mn = nm$ следует $m^{\mu n} = m$, что доказывает 2. Пункт 3 следует из пунктов 1 и 2 и предложения 1, причем $\operatorname{coker}\mu = P/\mu(M)$. $\square$

Абеленизацией группы M называется группа $M^{ab} = M/[M, M]$, где $[M, M]$ — коммутант групы M.

Предложение 3. *Пусть $\mu\colon M \to P$ — скрещенный модуль. Тогда P действует на M^{ab} и $\mu(M)$ действует тривиально на M^{ab}, превращая M^{ab} в $\operatorname{coker}\mu$-модуль.*

Доказательство. Так как $[m, n]^p = [m^p, n^p]$ для $m, n \in M$ и $p \in P$, то $[M, M]$ является P-инвариантной подгруппой группы M так, что P действует на M^{ab}. Однако в этом действии $\mu(M)$ действует тривиально так как

$$m^{\mu n} = n^{-1} m\, n = m \mod [M, M]$$

для $m, n \in M$. $\square$

Таким образом, для любого скрещенного модуля $\mu\colon M \to P$ можно записать точную последовательность $\operatorname{coker}\mu$-модулей

$$\ker\mu \to M^{ab} \to (\mu M)^{ab} \to 1.$$

Первое отображение в общем случае не инъективно. Что бы это увидеть, рассмотрим скрещенный модуль $\chi\colon M \to \operatorname{Aut}(M)$, ассоциированный с группой M. Тогда $\ker\chi = Z(M)$. Существуют группы M для которых $1 \neq Z(M) \subset [M, M]$, например, группа кватернионов, диедральная группа и многие другие. Для всех них композиция отображений $\ker\mu \to Z(M) \to M^{ab}$ является тривиальной, и поэтому не инъективной.

Скрещенные модули естественным образом появляются в топологии, и именно в этом контексте они впервые были введены Уайтхедом [1]. Именно, если X есть топологическое пространство и Y — его подпространство, то граничный гомоморфизм $\partial\colon \pi_2(X, Y) \to \pi_1 Y$ является скрещенным $\pi_1 Y$-модулем.

Среди скрещенных модулей важное место занимают так называемые свободные скрещенные модули, определенные Уайтхедом [1].

Определение 2. *Пусть* $\mu\colon M \to P$ *— скрещенный модуль,* $\{m_i \mid \ i \in I\}$ *— некоторое множество фиксированных элементов из* M*. Тогда* $\mu\colon M \to P$ *называется свободным скрещенным модулем с базисом* $\{m_i \mid \ i \in I\}$*, если для каждого скрещенного модуля* $\nu\colon N \to Q$ *и произвольных множества элементов* $\{n_i \mid \ i \in I\}$ *из* N *и гомоморфизма* $f\colon P \to Q$ *такого, что* $f\mu(m_i) = \nu(n_i)$*, существует единственный гомоморфизм* $g\colon M \to N$*, для которого* $g(m_i) = n_i$ *и* (g, f) *— гомоморфизм скрещенных модулей.*

Уайтхед [1] конструктивно доказал существование свободных скрещенных модулей $\mu\colon M \to P$ для произвольной группы P с множеством фиксированных элементов $\{p_i \mid i \in I\}$. Рассмотрим основные моменты этого построения.

Пусть P — группа, а $\{p_i \in P \mid \ i \in I\}$ — множество выбранных в ней элементов. Обозначим через E свободную группу, порожденную множеством $P \times I$. Рассмотрим фактор-группу M, полученную путем факторизации группы E по подгруппе W, являющейся нормальным замыканием множества

$$\{(x, a)(y, b)(x, a)^{-1}(xp_a x^{-1}y, b) \mid x, y \in P,\, a, b \in I\}.$$

Действие группы P на группе M индуцируется действием P на группе E посредством соотношения $(x, a)^p = (px, a)$, где $x, p \in P$, $a \in I$. Граничный гомоморфизм $\mu\colon M \to P$ индуцируется гомоморфизмом $\partial\colon E \to P$, задаваемым формулой $\partial(x, a) = xp_a x^{-1}$. Пусть $\pi\colon E \to M$ — естественная проекция и $m_i = \pi(1, i)$. Уайтхед доказал, что $\mu\colon M \to P$ является свободным скрещенным модулем с базисом $\{m_i \mid \ i \in I\}$.

Уайтхед [1] получил следующую фундаментальную теорему.

Теорема 1. *Пусть* Y *линейно связное топологическое пространство и* X *получено из* Y *с помощью приклеивания двумерных клеток. Тогда граничный гомоморфизм* $\partial\colon \pi_2(X, Y) \to \pi_1 Y$ *является скрещенным* $\pi_1 Y$*-модулем с базисом, соответствующим приклеиваемым клеткам.*

Больше про скрещенные модули, в частности, про свободные скрещенные модули, можно узнать в источниках [2]–[5].

1. *Whitehead J. H. C.* Combinatorial homotopy // Bull. Amer. Math. Soc. — 1949. — 55, N 4. — P. 453–496.
2. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — Киев: Наук. думка, 1990. — 196 с.
3. *Браун К. С.* Когомологии групп. — М.: Наука, 1987. — 384 с.
4. *Brown R., Higgins P. J., Sivera R.* Nonabelian algebraic topology. — Zürich: European Mathematical Society, 2011. — 668 p.
5. *Ratcliffe J.* Free and projective modules // J. London Math. Soc. — 1980. — 22, N 1. — P. 66–74.

Monogenic functions as a tool for the biharmonic boundary value problems

S. V. Gryshchuk
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
serhii.gryshchuk@gmail.com

We consider the commutative algebra $\mathbb{B}$ over the field of complex numbers $\mathbb{C}$ with the bases $\{e_1, e_2\}$: $e_1^2 = e_1$, $e_2 e_1 = e_2$, $e_2^2 = e_1 + 2ie_2$, where i is the imaginary unit in $\mathbb{C}$. The algebra $\mathbb{B}$ is associated with the 2-D biharmonic equation:

$$\Delta^2 u(x,y) \equiv \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u(x,y)}{\partial y^4} = 0. \tag{1}$$

Let D_ζ be a bounded domain in the plane $\mu := \{xe_1 + ye_2 : x, y \in \mathbb{R}\}$, where $\mathbb{R}$ is the field of real numbers. We consider monogenic functions $\Phi : D_\zeta \longrightarrow \mathbb{B}$ having the classic derivative $\Phi'(\zeta) := \lim\limits_{h\to 0,\, h\in\mu} \big(\Phi(\zeta + h) - \Phi(\zeta)\big)\, h^{-1} \in \mathbb{B}$ in every point $\zeta \in D_\zeta$.

Let $D \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \zeta = xe_1 + ye_2 \in D_\zeta\}$. Every component $U_k \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = \overline{1,4}$, of the expansion

$$\Phi(\zeta) = U_1(x,y)\, e_1 + U_2(x,y)\, ie_1 + U_3(x,y)\, e_2 + U_4(x,y)\, ie_2 \tag{2}$$

is a biharmonic function in D (cf., e.g., [1]), i.e., $\Delta^2 U_k = 0$ in D.

Consider a Schwarz-type boundary value problem *on finding a monogenic in D_ζ function Φ which is continuous in the closure $\overline{D_\zeta}$ when values of components U_1 and U_3 of the expansion* (2) *are given on the boundary ∂D_ζ*, i.e., the following boundary conditions are satisfied: $U_1(x,y) = u_1(\zeta)$, $U_3(x,y) = u_3(\zeta)$ for every point $\zeta = xe_1 + e_2 y \in \partial D_\zeta$, where $u_k \colon \partial D_\zeta \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \in \{1,3\}$, are given functions. We call this problem as (1-3)-*problem*.

It is known that the *biharmonic boundary value problem* on finding a biharmonic function $U \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ with given limiting values of partial derivatives $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$ on the boundary ∂D can be reduced to the (1-3)-problem (cf., e.g., [2,3]).

Using the hypercomplex Cauchy type integral and conformal mappings of the complex plane $\mathbb{C}$ we reduce (1-3)-problem (as well as the biharmonic boundary value problem) to a system of Fredholm equations for a pair of unknown real-valued functions (defined on the real line) under some natural assumptions (see [3]). Note that similar arguments are applicable to any (m-n)-problem (or (n-m)-problem), $1 \le m < n \le 4$.

1. *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Basic Properties of Monogenic Functions in a Biharmonic Plane // Contemporary Mathematics ("Complex Analysis and Dynamical Systems V"). — 2013. — **591**. — Amer. Math. Soc., Providence, RI. — P. 127 – 134.
2. *Gryshchuk S. V., Plaksa S. A.* Schwartz-type integrals in a biharmonic plane // Intern. Journal of Pure and Appl. Math. — 2013. — **83**, No. 1. — P. 193 – 211

   (on-line version: http://www.ijpam.eu/contents/2013-83-1/13/13.pdf).
3. *Gryshchuk S.V., Plaksa S.A.* Monogenic functions in the biharmonic boundary value problem // ArXiv preprint (arXiv:1505.02518v1 [math.AP]). — 2015.

Introduction to Poisson and bihamiltonian geometry

Andriy Panasyuk
Dep. of Mathematics and Computer Science
University of Warmia and Mazury at Olsztyn
panas@matman.uwm.edu.pl

Lecture I

References: [Arn73]
Basic objects: M a manifold (smooth, analytic etc.), *for example* $M = \mathbb{R}^n$; the tangent bundle $\tau : TM \to M$, *for example* $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; the cotangent bundle $\pi : T^*M \to M$, *for example* $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{E}(M)$ the set of functions on M (smooth, analytic, etc.)

A vector field $v \in \Gamma(TM)$: a section of the tangent bundle, i.e. a map (smooth, analytic etc.) $v : M \to TM$ such that $\tau \circ v = \mathrm{Id}_M$. Local description $v(x) = (\sum_i) v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$ (we will skip the sum sign - "Einstein convention"), here $x \in M$, $(x^1, \ldots, x^n)$ local coordinates on $U \subset M$, $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ the corresponding basis of the fiber of the tangent bundle, $v^i \in \mathcal{E}(U)$. *For example* $v(x) = (x, v^1(x) \ldots, v^n(x))$ (a vector function).

Another point of view: v is a *differentiation* of the algebra $\mathcal{E}(M)$, i.e. an $\mathbb{R}$-linear map $v : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ with $v(fg) = v(f)g + fv(g)$.

Commutator of vector fields: $[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM), [v, w]^i(x) = v^j(x)\frac{\partial w^i(x)}{\partial x^j} - w^j(x)\frac{\partial v^i(x)}{\partial x^j}$.

Another point of view: $[v, w]f = (vw - wv)f$ (commutator of differentiations). *Exercise:* check that the commutator of differentiations is a differentiation.

A Lie algebra on a vector space V: a bilinear skew-symmetric operation $[,] : V \times V \to V$ satisfying the Jacobi Identity:

1. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0\ \forall x, y, z \in V$, or, equivalently,
2. $\mathrm{ad}_x[y, z] = [\mathrm{ad}_x y, z] + [y, \mathrm{ad}_x z]\ \forall x, y, z \in V$, where $\mathrm{ad}_x y := [x, y]$, or, equivalently,
3. $\mathrm{ad}_{[x,y]} = [\mathrm{ad}_x, \mathrm{ad}_y]\ \forall x, y \in V$, where the bracket in the RHS denotes the commutator of the operators.

The second condition means that ad_x is a differentiation of the bracket $[,]$. The third one has the following interpretation. A pair $(V, [,])$, where V is a vector space and $[,] : V \times V \to V$ is a bilinear operation, is called an *algebra*. Given algebras $(V_1, [,]_1)$ and $(V_2, [,]_2)$, we say that a linear map $L : V_1 \to V_2$ is a *homomorphism* of algebras, if $L[x, y]_1 = [Lx, Ly]_2\ \forall x, y \in V_1$.

So the third condition means that the map $x \mapsto \mathrm{ad}_x : V \to \mathrm{End}(V)$ a *homomorphism* of algebras $(V, [,])$ and $(\mathrm{End}(V), [,])$. Note that the last algebra is in fact a Lie algebra. A homomorphism of Lie algebras $(V, [,]) \to (\mathrm{End}(W), [,])$ is called a *representation* of the Lie algebra $(V, [,])$ in the vector space W (so $x \mapsto \mathrm{ad}_x$ is a representation of $(V, [,])$ in V).

Examples:

1. $V = \mathrm{End}(W)$ with commutator, in other words $V = Mat_{n \times n}(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}), [A, B] := AB - BA$.
2. $V = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ (traceless matrices), $V = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ (skew symmetric matrices), etc.

3. $V = \Gamma(TM)$ with commutator of vector fields.

Ordinary differential equation on a manifold:

$$\frac{dc}{dt}(x) = v(x), (\text{or } \dot{x} = v(x) \text{ for short})$$

here $v \in \Gamma(TM)$ is given, c is unknown. A *solution* of this equation (or a *trajectory* of v) with an initial condition $x_0 \in M$ is a curve $c : \mathbb{R} \to M$ such that $c(0) = x_0$ and the vector $v(x)$ is tangent to c at any $x \in c(\mathbb{R})$.

A solution always exists *locally* and is unique: in local coordinates $(x^1, \dots, x^n)$ we have $v = v^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$ and the equation is equivalent to the system of ODE

$$\frac{dc^i(t)}{dt} = v^i(c^1(t), \dots, c^n(t)), i = 1, \dots, n$$

with the initial condition $c^i(0) = x^i_0, i = 1, \dots, n$, and we can use the corresponding existence-uniqueness theorem.

Globally, if $\operatorname{supp} v := \overline{\{x \in M \mid v(x) \neq 0\}}$ is compact (eg. M is compact itself) one can extend any local solution to a global (in time and space) solution.

Example 1: "nonextendability in time": $M :=]0, 1[, \dot{x} = 1$.

Example 2: "nonextendability in space": $M := \mathbb{R}, \dot{x} = x^2$.

Example 3: "Winding line on a torus": $M := \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, the vector field $v_{a,b} := a\frac{\partial}{\partial x^1} + b\frac{\partial}{\partial x^2}$, where $a, b \in]0, \infty[$ are fixed, can be projected onto the vector field $\tilde{v}_{a,b}$ on $\mathbb{T}^2$. Its trajectories are the projections $t \to P(x^1 + at, x^2 + bt)$ of the lines $t \to (x^1 + at, x^2 + bt)$.

Rational case: b/a is a rational number, $b = m\lambda, a = n\lambda$ for some $\lambda \in \mathbb{R}$. Then for $t := 1/\lambda$ we have $(x^1 + at, x^2 + bt) = (x^1 + m, x^2 + n)$ and $P(x^1 + at, x^2 + bt) = P(x^1, x^2)$ (the trajectory is closed, i.e. periodic).

Irrational case: b/a is an irrational number (any trajectory is dense in M).

A submanifold S of M of codimension r: A subset $N \subset M$ such that there exists an atlas $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \psi_\alpha = (\psi^1_\alpha, \dots \psi^n_\alpha) : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$, on M with $N \cap U_\alpha = \{x \in U_\alpha \mid \psi^1_\alpha(x) = 0, \dots \psi^r_\alpha(x) = 0\}$ for those $\alpha \in A$ for which $N \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

Smooth maps and submanifolds: A smooth map $F : M_1 \to M_2$ is called an *immersion* if $T_m F : T_m M_1 \to T_{F(m)} M_2$ is injective for any $m \in M_1$. The image of an injective immersion is called an *immersed submanifold*. An injective immersion F is an *embedding* if F is a homeomorphism onto $F(M_1)$, where $F(M_1)$ is endowed with the topology induced from M_2.

Remarks: 1. The image $N := F(M_1)$ of an embedding is a submanifold in M_2 and, vice versa, given a submanifold $N \subset M$, the inclusion $N \hookrightarrow M$ is an embedding. 2. If $N \subset M$ is an immersed submanifold, then for any $x \in N$ there exists an open neighbourhood U of x in M such that the connected component of $N \cap U$ containing x is a submanifold in U.

Example of an immersed submanifold, which is not a submanifold: "The irrational torus winding" $\mathbb{R} \to \mathbb{T}^2$.

A foliation $\mathcal{F}$ of codimension r on M : A collection $\mathcal{F} = \{F_\beta\}_{\beta \in B}$ of path-connected sets on M such that there exists an atlas $\mathcal{A} := \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ on M with the following properties:

1. $M = \bigcup_{\beta \in B} F_\beta$;

2. $F_\beta \cap F_\gamma = \emptyset$ for any $\beta, \gamma, \beta \neq \gamma$;

3. for any $\alpha \in A$ and any $(c_1, \ldots, c_r) \in \psi_\alpha(U_\alpha)$ there exists $\beta \in B$ such that the set $\{x \in U_\alpha \mid \psi^1(x) = c_1, \ldots \psi^r(x) = c_r\}$ coincides with one of the path-connected components of the set $U_\alpha \cap \mathcal{F}_\beta$ if it is nonempty.

By the remark above the sets F_β are immersed submanifolds.

Example: Collection of the trajectories of the vector field $\tilde{v}_{a,b}$ on $\mathbb{T}^2$.

A distribution $\mathcal{D}$ on M of codimension r: A subbundle of the tangent bundle TM with the r-codimensional fiber, or in other words a collection of subspaces $D_x \subset T_xM$ smoothly (analytically) depending on $x \in M$. Such a distribution is locally spanned by $n - r$ linearly independent (at each point) vector fields.

Example : The distribution tangent to a foliation: $\mathcal{D} = T\mathcal{F} := \{v \in TM \mid v \text{ is tangent to } \mathcal{F}\}$.

Integrable distribution: A distribution which is tangent to some foliation.

Example: Take a *nonvanishing* vector field $v \in \Gamma(TM)$ (if it exists) and put $D_x = \mathbb{R}v(x)$. This is an integrable 1-dimensional distribution tangent to the trajectories of the vector field v.

Involutive distribution: A distribution $\mathcal{D}$ such that for any two vector fields $X, Y \in \Gamma(TM)$ which are tangent to $\mathcal{D}$ (i.e. $X(x), Y(x) \in D_x$ for any $x \in M$) their commutator $[X, Y]$ is also tangent to $\mathcal{D}$ (equivalently, locally there exist $v_1, \ldots, v_m, v_i \in \Gamma(TM)$, and functions f_{ij}^k such that $\operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_m\} = \mathcal{D}$ and $[v_i, v_j] = f_{ij}^k v_k$; *Exercise: prove the equivalence*).

The Frobenius theorem (standard): A distribution $\mathcal{D}$ is integrable if and only if it is involutive.

Example of nonintegrable distribution: $X = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y}$.

A generalized distribution $\mathcal{D}$ on M of codimension r: A collection of subspaces $D_x \subset T_xM$ locally spanned by $n - r$ vector fields linearly independent at least at one point (but not necessarily linearly independent at other points).

A generalized foliation $\mathcal{F}$ on M.

Example of a generalized foliation which is not a foliation: The trajectories of a vector field $x^1\frac{\partial}{\partial x^1} + x^2\frac{\partial}{\partial x^2}$.

The generalized Frobenius theorem (Nagano [Nag66]): An analytic generalized distribution $\mathcal{D}$ is integrable if and only if it is *involutive*, i.e. for any two vector fields $X, Y \in \Gamma(TM)$ which are tangent to $\mathcal{D}$ (i.e. $X(x), Y(x) \in D_x$ for any $x \in M$) their commutator $[X, Y]$ is also tangent to $\mathcal{D}$.

An example of smooth involutive nonintegrable distribution: Let $\varphi(x)$ be a smooth function on $\mathbb{R}$ such that $\varphi(x) \equiv 0$ for $x \leqslant 0$ and $\varphi(x) > 0$ for $x > 0$. Take $X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \varphi\frac{\partial}{\partial y}$ on $\mathbb{R}^2$. Then $[X, Y] := \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}$ can be expressed as a linear combination of X, Y. But it is nonintegrable: look at its "leaves".

Lecture II

References: [dSW99, Arn89]
A bivector field on M: A section (smooth, analytic) η of the second exterior power of the tangent bundle $\bigwedge^2 TM$. Locally $\eta = \eta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$, $\eta^{ij}(x)$ being a skew-symmetric matrix depending on $x \in M$.

A covector field on M (differential 1-form): A section γ of the bundle T^*M. Locally $\gamma = \gamma_i(x)dx^i$.

A differential 2-form on M: A section ω of the second exterior power of the cotangent bundle $\bigwedge^2 T^*M$. Locally $\omega = \omega_{ij}(x)dx^i \wedge dx^j$.

Bivector fields and 2-forms as morphisms: Let $\eta \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$ and $\gamma \in \Gamma(T^*M)$. The *contraction* $\gamma \lrcorner \eta =: \eta(\gamma)$ (in the first index) is a vector field defined by $v = v^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}, v^j(x) := \gamma_i(x)\eta^{ij}(x)$. Since this operation is pointwise it defines a morphism of bundles $\eta^\sharp : T^*M \to TM$, i.e a smooth map such that the following diagram is commutative

$$\begin{tikzcd} T^*M \arrow[r, "\eta^\sharp"] \arrow[d, "\tau"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

and the induced mappings $\eta^\sharp_x : T^*_xM \to T_xM$ are linear for any $x \in M$. Note that it is skew-symmetric, i.e. $(\eta^\sharp)^* = -\eta^\sharp$. Conversely, given such a morphism, we can construct a bivector field.

Analogously, a differential 2-form ω defines a skew-symmetric morphism $\omega^\flat : TM \to T^*M$.
A symplectic form on M: A differential 2-form (2-form for short) ω on M such that

1. ω is nondegenerate, i.e. $\omega^\flat$ is an isomorphism of bundles, or, equivalently, $\omega_{ij}(x)$ is a nondegenerate matrix for any x in some (consequently in any) local coordinate system;

2. $d\omega = 0$.

A nondegenerate Poisson structure on M: A bivector field (bivector for short) η such that $\eta^\sharp : T^*M \to TM$ is inverse to $\omega^\flat : TM \to T^*M$ for some symplectic form ω.

The Poisson bracket on $\mathcal{E}(M)$: Given a bivector field $\eta : T^*M \to TM$ (not necessarily Poisson), put $\{f, g\} := \eta(df)g, f, g \in \mathcal{E}(M)$. (From now on we will often skip $\sharp$ and $\flat$ indices.) Then $\{,\}$ is a bilinear skew-symmetric operation on $\mathcal{E}(M)$. We say that $\eta(f) := \eta(df)$ is a *hamiltonian* vector field corresponding to the function f.

Proposition. Let η be a nondegenerate bivector. Then it is Poisson if and only if $\{,\}$ satisfies the Jacobi identity, $\sum_{c.p.\ f,g,h}\{\{f, g\}, h\} = 0$. $\square$

Proof Put $\omega := \eta^{-1}$, i.e. $\omega(\eta(\alpha), v) = \alpha(v)$ for any vector field v and 1-form α. Then $\eta(f)\omega(\eta(g), \eta(h)) = \eta(f)(dg(\eta(h))) = \eta(f)(\eta(h)g) = \eta(f)\{h, g\} = \{f, \{h, g\}\} = -\{f, \{g, h\}\}$ and $\omega([\eta(f), \eta(g)], \eta(h)) = -\omega(\eta(h), [\eta(f), \eta(g)]) = -dh([\eta(f), \eta(g)]) = -[\eta(f), \eta(g)]h =$
$-\eta(f)\eta(g)h + \eta(g)\eta(f)h = -\eta(f)\{g, h\} + \eta(g)\{f, h\} = -\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{f, h\}\}$. Thus $d\omega(\eta(f), \eta(g), \eta(h)) = \sum_{c.p.\ f,g,h} \eta(f)\omega(\eta(g), \eta(h)) - \omega([\eta(f), \eta(g)], \eta(h)) = -\sum_{c.p.\ f,g,h}\{g, \{f, h\}\}$ (we use the Cartan formula $(d\omega)(X, Y, Z) = \sum_{c.p. X,Y,Z} X\omega(Y, Z) - \omega([X, Y], Z)$). So, if $d\omega = 0$, then $\{,\}$ satisfies the Jacobi identity.

Conversely, if the JI holds, $d\omega$ vanishes on all hamiltonian vector fields. To finish the proof it remains to note that the hamiltonian vector fields span T_xM at any $x \in M$. Indeed, it is enough to take $\eta(x^i)$, where (x^i) are local coordinates.

Example: the canonical symplectic structure on the cotangent bundle T^*Q: Let $\pi_Q : T^*Q \to Q$ be a cotangent bundle to a manifold Q. There is a canonical differential 1-form $\lambda \in \Gamma(T^*M), M := T^*Q$ determined uniquely by the following condition: for any $\alpha \in \Gamma(T^*Q)$, the following equality holds $\alpha^*\lambda = \alpha$, here α in the LHS is regarded as a map $\alpha : Q \to T^*Q$. We call λ the *Liouville* 1-form. If $(U, q^1, \dots, q^n)$ is a local chart on Q, the 1-forms $dq^1, \dots, dq^n$ form a basis of the vector space $T^*_xQ, x \in U$, and define the chart $(\pi_Q^{-1}(U), q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. In these coordinates $\lambda = p_i dq^i$. Indeed, $\alpha : (q^1, \dots, q^n) \mapsto (q^1, \dots, q^n, \alpha_1(q), \dots, \alpha_n(q))$, where $\alpha = \alpha_i(q)dq^i$. Thus $\alpha^*\lambda = \alpha_i(q)dq^i = \alpha$.

The canonical symplectic form ω on M is given by $\omega := d\lambda$, or, locally, $\omega = dp_i \wedge dq^i$.

Hamiltonian differential equation on a symplectic manifold (M, ω): The ODE related to a hamiltonian vector field $\eta(f), f \in \mathcal{E}(M)$, here $\eta = \omega^{-1}$. In the context of the example above (in the canonical coordinates (q, p)): $\eta = -\frac{\partial}{\partial p_i} \wedge \frac{\partial}{\partial q^i}, \eta(H) = \frac{\partial H}{\partial q^i}\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q^i}$, the corresponding equations read:

$$\dot{q}^i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial p^i}, \dot{p}_i = \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i}.$$

A Poisson structure on M: A bivector $\eta : T^*M \to TM$ (not necessarily nondegenerate) such that the corresponding bracket $\{,\}$ on $\mathcal{E}(M)$ satisfies the Jacobi identity (JI for short).

Consider the Lie algebra $(\mathcal{E}(M), \{,\})$ on a Poisson manifold. The corresponding ad_f-operator, $f \in \mathcal{E}(M)$, coincides with $\eta(f) : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$.

The characteristic (generalized) distribution of a Poisson structure $\eta : T^*M \to TM$: $\mathcal{D}_\eta := \operatorname{im} \eta$ (locally generated by the hamiltonian vector fields $\eta(x^1), \dots, \eta(x^n)$, where $(x^1, \dots, x^n)$ are some local coordinates).

By the third form of the JI the map $f \mapsto \eta(f), (\mathcal{E}(M), \{,\}) \to (\Gamma(TM), [,])$ is a homomorphism of Lie algebras, here $[,]$ is the commutator of vector fields. This implies involutivity of $\mathcal{D}_\eta$: $[\eta(x^i), \eta(x^j)] = \eta(\{x^i, x^j\}) = \eta(\eta^{ij}(x))$, where $\eta = \eta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \wedge \frac{\partial}{\partial x^j}$. On the other hand, $\eta(f) = \eta^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\eta(x^i)$ for any f. In particular, $[\eta(x^i), \eta(x^j)]$ is a linear combination (with smooth coefficients) of $\eta(x^1), \dots, \eta(x^n)$.

Theorem: The characteristic distribution $\mathcal{D}_\eta$ is integrable (we call the corresponding foliation *characteristic* or *symplectic*).

Proof In analytic category this follows from the involutivity of $\mathcal{D}$ by the generalized Frobenius theorem. In the smooth case this is also true, but the proof is more complicated, so we skip it. $\square$

Digression on linear algebra of bivectors: Let V be a vector space and e a bivector on V. Then e can be treated as: 1) an element $e \in \bigwedge^2 V$; 2) a linear skew-symmetric map $e^\sharp : V^* \to V$; 3) a bilinear form $\tilde{e}$ on V^*.

Proposition. Let $W := \operatorname{im} e^\sharp \subset V$. Then there exists a correctly defined bivector $e|_W \in \bigwedge^2 W$, called the *restriction* of e to W. Moreover, the restriction $e|_W$ is nondegenerate, i.e. $e|_W^\sharp : W^* \to W$ is an isomorphism.

Proof I. A theorem from linear algebra says that there exists a basis $v_1, \dots, v_n$ of V such that $e = v_1 \wedge v_2 + \dots + v_{2k-1} \wedge v_{2k}$ (the number $2k$ is equal to $\dim W$ and is called the *rank* of e). It is easy to see that $v_1, \dots, v_{2k}$ span W. $\square$

Proof II. e is skew-symmetric, i.e. $(e^\sharp)^* = -e^\sharp$. This implies $\ker e^\sharp = (\operatorname{im} e^\sharp)^\perp$, where $(\cdot)^\perp$ stands for the annihilator of $(\cdot)$. So the natural isomorphism $\hat{e} : V^*/\ker e^\sharp \to \operatorname{im} e^\sharp = W$ induced by $e^\sharp$ can regarded as a map from $W^* \cong V^*/(W^\perp)$ to $W \subset V$. The map $\hat{e}$ being skew-symmetric induces the element of $\bigwedge^2 W$, which we denote by $e|_W$. $\Box$

Proof III. Let ω be a skew-symmetric bilinear form on a vector space L. Put $\ker\omega := \{x \in L \mid \omega(x,y) = 0 \ \forall y \in L\}$. The form is called *nondegenerate* if $\ker\omega = \{0\}$.

Any ω induces a nondegenerate skew-symmetric bilinear form on the vector space $L/\ker\omega$.

Treating e as a skew-symmetric bilinear form $\tilde{e}$ on V^* we have $\ker\tilde{e} = \ker e^\sharp$. The restriction $e|_W$ treated as a skew-symmetric bilinear form on $W^* \cong V^*/\ker\tilde{e}$ is the above mentioned nondegenerate form induced from $\tilde{e}$. $\Box$

Symplectic leaves of a Poisson structure η on M: These are the leaves of the characteristic foliation $\mathcal{D}_\eta$. Since $D_{\eta,x} = \operatorname{im}\eta^\sharp_x$ for any $x \in M$, the bivector η admits a restriction $\eta|_S$ to any symplectic leaf $S \subset M$, which is a nondegenerate bivector on S. Moreover, since any hamiltonian vector field $\eta(f)$ is tangent to S at points of S, the value $\{f,g\}(x) = (\eta(f)g)(x), x \in S$, depends only of $g|_S$ and by the skew-symmetry the same is true with respect to f. In other words, $\{f|_S, g|_S\}_{\eta|_S} = (\{f,g\}_\eta)|_S$ for any $f, g \in \mathcal{E}(M)$ and the operation $\{,\}_{\eta|_S}$ satisfies the JI, hence $\eta|_S$ is a nondegenerate Poisson structure on S. This explains the term "symplectic leaf" ($(\eta|_S)^{-1}$ is a symplectic form).

Example 1: Let $M := \mathbb{R}^2, \eta = x^1\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}$. On the open set $U := \{x^1 \neq 0\}$ the form $(\eta|_U)^{-1} = -(1/x^1)dx^1 \wedge dx^2$ is symplectic. Thus the JI holds for $\{,\}_\eta$ on U and by continuity it holds also on the whole M. The symplectic leaves are U and all the points on the line $\{x^1 = 0\}$.

Example 2: Let $M := \mathbb{R}^3, \eta = \frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}$. On each plane $P_c := \{x^3 = c\}$ the form $(\eta|_{P_c})^{-1} = -dx^1 \wedge dx^2$ is symplectic. The JI holds for $\{,\}_\eta$ on P_c for any $c \in \mathbb{R}$. Since P_c sweep the whole space M as c runs through $\mathbb{R}$, the JI holds for $\{,\}_\eta$ globally. The symplectic leaves are the planes P_c.

Example 3: Let $M := \mathbb{R}^3, \eta = x^1\frac{\partial}{\partial x^2} \wedge \frac{\partial}{\partial x^3} + x^2\frac{\partial}{\partial x^3} \wedge \frac{\partial}{\partial x^1} + x^3\frac{\partial}{\partial x^1} \wedge \frac{\partial}{\partial x^2}$ (we will prove that this is a Poisson bivector later). The symplectic leaves are ...

Example 4: Let $M = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, let y be a coordinate on the second component. Put $\eta = \tilde{v}_{a,b} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, where $\tilde{v}_{a,b}$ is the generator of winding line. η is Poisson because locally it looks like the bivector from Example 2. If b/a is irrational, the symplectic leaves (which are two-dimensional) are dense in M.

Casimir functions of a Poisson structure η on M: Let $U \subset M$ be an open set. We say that $f \in \mathcal{E}(U)$ is a *Casimir function* if $\eta(f) \equiv 0$ on U. In particular, since $\{f,g\} = \eta(f)g$ on U the Casimir functions constitute the centre of the Lie algebra $(\mathcal{E}(U), \{,\}|_U)$. The space of Casimir functions over U will be denoted by $\mathcal{C}_\eta(U)$.

Proposition. The Casimir functions are constant on the leaves of the symplectic foliation.

Proof We have $\eta(f)g = -\eta(g)f = 0$ for any $f \in \mathcal{C}_\eta(U), g \in \mathcal{E}(U)$. So, since $\eta(g)$ span the characteristic distribution, f is constant along its leaves. $\Box$

Example 1': $\mathcal{C}_\eta(M) = \mathbb{R}$, the space of constant functions.

Example 2': $\mathcal{C}_\eta(M) = \mathcal{F}un(x^3)$, the space of functions functionally generated by x^3.

Example 3': $\mathcal{C}_\eta(M) = \mathcal{F}un((x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2)$. Hence the symplectic leaves are the concentric spheres and the point $\{(0,0,0)\}$.

Example 4': If b/a is irrational $\mathcal{C}_\eta(M) = \mathbb{R}$. However, for sufficiently small U the space $\mathcal{C}_\eta(U)$ will be functionally generated by one nonconstant function. So "local Casimirs" are not obtained as the restriction of the "global Casimirs".

Lie–Poisson structures, Definition I: Let $(\mathfrak{g}, [,])$ be a finite-dimensional Lie algebra, $\mathfrak{g}^*$ its dual space (space of linear functionals on $\mathfrak{g}$). Given $f, g \in \mathcal{E}(\mathfrak{g}^*)$ define $\{f, g\}_\mathfrak{g}(x) := \langle x, [df|_x, dg|_x]\rangle, x \in \mathfrak{g}^*$. Here we identify $T_x^*\mathfrak{g}^*$ with $\mathfrak{g}$, $\langle,\rangle$ stands for the canonical pairing between vectors and covectors.

Lie–Poisson structures, Definition II: Let $(\mathfrak{g}, [,])$ be a finite-dimensional Lie algebra, $e_1, \ldots, e_n \in \mathfrak{g}$ its basis, $x_1 = e_1, \ldots, x_n = e_n$ these vectors regarded as linear functions on $\mathfrak{g}^*$ (in particular $x_1, \ldots, x_n$ are linear coordinates on $\mathfrak{g}^*$). Let $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$ (c_{ij}^k are called the *structure constants* corresponding to the basis $e_1, \ldots, e_n$). Put $\eta_\mathfrak{g} := c_{ij}^k x_k \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Proposition. The bivector corresponding to the bracket $\{,\}_\mathfrak{g}$ coincides with $\eta_\mathfrak{g}$.

Proof Exercise: Prove that, given $\{,\} : \mathcal{E}(M) \times \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$, a bilinear skew-symmetric operation being a differentiation with respect to each argument, there exists a bivector $\eta \in \Gamma(\bigotimes^2 TM)$ such that $\{f, g\} = \eta(df, dg)$.

Let $\eta = \eta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ be the bivector corresponding to $\{,\}_\mathfrak{g}$. Take $f := x_i, g := x_j$, then $\{f, g\}(x) = \eta^{ij}(x)$. On the other hand, by Definition I, $\{f, g\}(x) = \langle x, [x_i, x_j]\rangle = c_{ij}^k x_k$. $\square$

Exercise: 1) Let $\eta \in \Gamma(\bigwedge^2 TM)$, in local coordinates $\eta = \eta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$. Show that the JI for $\{,\}, \{f, g\} = \eta^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial x_j}$ holds if and only if the expression

$$[\eta, \eta]_S^{ijk} := \sum_{c.p.\, i,j,k} \eta^{ir}(x)\frac{\partial}{\partial x^r}\eta^{jk}(x)$$

vanishes for all $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$. 2) Show that, given $\eta, \zeta \in \Gamma(\bigwedge^2 TM), \eta = \eta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}, \zeta = \zeta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$, the expression

$$[\eta, \zeta]_S^{ijk} := \frac{1}{2}\sum_{c.p.\, i,j,k} \eta^{ir}(x)\frac{\partial}{\partial x^r}\zeta^{jk}(x) + \zeta^{ir}(x)\frac{\partial}{\partial x^r}\eta^{jk}(x)$$

is a local representation of a trivector on M (called the *Schouten bracket* of η and ζ).

Proof of the Jacobi identity for the Lie–Poisson structure: $[\eta_\mathfrak{g}, \eta_\mathfrak{g}]_S^{ijk} = \sum_{c.p.\, i,j,k} c_{ir}^l x_l c_{jk}^r$. The last expression vanishes for all i, j, k if and only if $\sum_{c.p.\, i,j,k} c_{ir}^l c_{jk}^r = 0$ for all l, i, j, k, which is equivalent to the JI for $[,]$. $\square$

An action of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ on a manifold: A homomorphism of Lie algebras $\rho : (\mathfrak{g}, [,]) \to (\Gamma(TM), [,])$ (in the target space $[,]$ stands for the commutator of vector fields) is called a *(right) action* of $\mathfrak{g}$ on M (a left action corresponds to an antihomomorphism, i.e. a map $\rho : (\mathfrak{g}, [,]) \to (\Gamma(TM), [,])$ such that $\rho([v, w]) = -[\rho(v), \rho(w)], v, w \in \mathfrak{g}$).

Orbits of an action $\rho : (\mathfrak{g}, [,]) \to (\Gamma(TM), [,])$: Put $D_x := \{\rho(v)|_x \mid v \in \mathfrak{g}\}, x \in M$.

Proposition. Let $\mathfrak{g}$ be finite-dimensional. Then the generalized distribution $\mathcal{D} := \{D_x\}_{x\in M}$ is integrable.

Proof The distribution $\mathcal{D}$ is involutive: $[\rho(v), \rho(w)] = \rho([v, w])$. Thus in the analytic category the proof follows from the generalized Frobenius theorem. We skip the proof in the smooth case (roughly it consists in integrating the action of the Lie algebra to a local action of the corresponding Lie group). $\square$

The leaves of the corresponding generalized foliation are called the *orbits* of the action ρ. If the Lie algebra $\mathfrak{g}$ is finite-dimensional, the action can be "integrated" to a local action of a Lie group G such that $\mathfrak{g}$ is its Lie algebra. Then the orbits of the Lie algebra action and of the Lie group action coincide.

Linear representations and actions: Let V be a vector space and $A \in \mathrm{End}(V)$ a linear operator. It induces a uniquely defined vector field $\tilde{A}$ on V given by $x \mapsto (x, Ax) : V \to V \times V \cong TV$. If $e_1, \ldots, e_n$ is a basis of V, $x^1, \ldots, x^n$ the dual basis of V^* (i.e. the coordinates on V) and $Ae_i = A_{ji} e_j$, we have $\tilde{A} = A_{ji} x^i \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Exercise: The map $A \mapsto \tilde{A} : \mathrm{End}(V) \to \Gamma(TV)$ is an antihomorphism of Lie algebras, i.e. a left action of the Lie algebra $\mathrm{End}(V)$ on V.

Let $L : (\mathfrak{g}, [,]) \to (\mathrm{End}(V), [,])$ be a representation of a Lie algebra $\mathfrak{g}$ in a vector space V. Then the map $\tilde{L} : \mathfrak{g} \to \Gamma(TM), \tilde{L}(x) := \widetilde{L(x)}$ is a left action of $\mathfrak{g}$ on the manifold V. Note, that the dual representation $L^* : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V^*)$ given by $L^*(v) := (L(v))^*$ is an antihomomorphism, hence the map $\tilde{L^*} : \mathfrak{g} \to \Gamma(TM), \tilde{L^*}(v) := \widetilde{(L(v))^*}$ is a right action of $\mathfrak{g}$ on V.

The adjoint and coadjoint actions: Let $(\mathfrak{g}, [,])$ be a Lie algebra. The homomorphism $v \mapsto \mathrm{ad}_v : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$, where $\mathrm{ad}_v w := [v, w]$, gives the *adjoint* representation (of $\mathfrak{g}$ on $\mathfrak{g}$). The corresponding (left) action $v \mapsto \widetilde{\mathrm{ad}_v} : \mathfrak{g} \to \Gamma(T\mathfrak{g})$ is also called *adjoint.* The homomorphism $v \mapsto \mathrm{ad}^*_v : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$, where ad^*_v is the transposed operator to ad_v, and the corresponding (right) action $v \mapsto \widetilde{\mathrm{ad}^*_v} : \mathfrak{g} \to \Gamma(T\mathfrak{g}^*)$ are called the *coadjoint* (anti)representation and action, respectively.

The symplectic leaves of the Lie-Poisson structure $\eta_{\mathfrak{g}}$ on $\mathfrak{g}^*$ coincide with the orbits of the coadjoint action : We claim that $\widetilde{\mathrm{ad}^*_v} = \eta_{\mathfrak{g}}(v')$, where v' denotes the linear function on $\mathfrak{g}^*$ defined by an element $v \in \mathfrak{g}$. Indeed, let $v = v^j e_j$, then $v' = v^j x_j$. Here $x_1, \ldots, x_n$ are the elements $e_1, \ldots, e_n$ regarded as linear functions on $\mathfrak{g}^*$. Then $\mathrm{ad}_v e_i = v^j c^k_{ji} e_k, \mathrm{ad}^*_v x^i = v^j c^i_{jk} x^k$, hence $\widetilde{\mathrm{ad}^*_v} = v^j c^i_{jk} x_i \frac{\partial}{\partial x_k}$. The last expression obviously coincides with $\eta_{\mathfrak{g}}(v')$. $\square$

An invariant symmetric bilinear form on $(\mathfrak{g}, [,])$: A symmetric bilinear form $(,) : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ satisfying the equality $(\mathrm{ad}_x y, z) = -(y, \mathrm{ad}_x z)$ for any $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Proposition. Let $(,)$ be a nondegenerate invariant symmetric bilinear form on $\mathfrak{g}$. Identify $\mathfrak{g}$ with $\mathfrak{g}^*$ by means of the map $v \mapsto (v, \cdot)$. Then the adjoint orbits become coadjoint ones under this identification.

Proof Indeed, if $A : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ is a linear operator the transposed operator $A^* : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ becomes the adjoint one under this identification: $(A^* y, z) = (y, Az)$ for any $y, z \in \mathfrak{g}$. Thus ad^*_x becomes $-\mathrm{ad}_x$. $\square$

Notations (for the Lie algebras): $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := \{n \times n-$matrices with real entries$\}, \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(x) = 0\}, \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) := \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \mid x = -x^T\}$

The sets above are Lie algebras with respect to the commutator of matrices.

Notations (for the Lie Groups): $GL(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}, SL(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid \det X = 1\}, SO(n,\mathbb{R}) := \{X \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}) \mid XX^T = I_n\}$. All these sets are groups with respect to the matrix multiplication. It is easy to see that if $x \in \mathfrak{g}$, where $\mathfrak{g}$ is one of the Lie algebras above, then $\exp(x) \in G$, where G is the corresponding Lie group. Also $\mathfrak{g} = T_I G$.

The Lie algebras from Examples 1-4, below, have an invariant nondegenerate symmetric form $(x, y) = \mathrm{Tr}(xy)$ by means of which we can make an identification $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g}^*$. The coadjoint orbits are identified with the adjoint ones, which can be described as the orbits of the corresponding Lie group with respect to the conjugation of matrices: $\{XxX^{-1} \mid X \in G\}, x \in \mathfrak{g}$.
Example 1: $\mathfrak{g} := \mathfrak{gl}(n,\mathbb{R}), \mathcal{C}_{\eta_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}un(\mathrm{Tr}(x), \mathrm{Tr}(x^2), \ldots, \mathrm{Tr}(x^n))$.

Example 2: $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}), \mathcal{C}_{\eta_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}un(\mathrm{Tr}(x^2), \ldots, \mathrm{Tr}(x^n))$. In particular, for $n = 2$ we have a basis $e_1 := e_{11} - e_{22}, e_2 := e_{12}, e_2 := e_{21}$ and the commutation relations $[e_1, e_2] = 2e_2, [e_1, e_3] = -2e_3, [e_2, e_3] = e_1$. Hence $\eta_\mathfrak{g} = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_3}$. The Casimir function $\mathrm{Tr}(x^2)$ reads as $x_1^2/2 + 2x_2x_3$. The symplectic leaves are the 1-sheet hyperboloids, sheets of 2-sheet hyperboloids, two sheets of the cone (without zero) and the point 0.

Example 3: $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n,\mathbb{R}), \mathcal{C}_{\eta_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}un(\mathrm{Tr}(x^2), \mathrm{Tr}(x^4) \ldots, \mathrm{Tr}(x^{2n-2}), \mathrm{Pf}(x))$.

Example 4: $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{R}), \mathcal{C}_{\eta_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}un(\mathrm{Tr}(x^2), \mathrm{Tr}(x^4) \ldots, \mathrm{Tr}(x^{2n}))$.

Example 5 (the Heisenberg algebra): $\mathfrak{g} := \mathbb{R}^3, [e_1, e_2] = e_3$, here e_1, e_2, e_3 is the standard basis of $\mathbb{R}^3$. We have $\eta_\mathfrak{g} = x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \frac{\partial}{\partial x_2}, \mathcal{C}_{\eta_\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^*) = \mathcal{F}un(x_3)$, so the coadjoint orbits consist of the planes $\{x_3 = c\}, c \neq 0$ and of the points of the plane $\{x_3 = 0\}$. The adjoint orbits are generated by the vector fields $c_{ij}^k x^i \frac{\partial}{\partial x^k}$, where $\{x^i\}$ is the basis dual to $\{x_i\}$, i. e. by $x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}, x^2 \frac{\partial}{\partial x^3}$, so they are the lines parallel to the x_3-axis and the points of this axis.

The Arnold–Liouville theorem: Let (M, ω) be symplectic, $\dim M = 2n$. Assume a hamiltonian vector field $v(H)$ admits n functionally independent integrals $g_1 = H, g_2, \ldots, g_n$ in involution. Then

1. if the common level sets $M_c := \{x \in M \mid g_i = c_i, i = 1, \ldots, n\}$ of these integrals are compact and connected, they are diffeomorphic to (n-dimensional) tori $\mathbb{T}^n = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \mathrm{mod} 2\pi\}$;

2. the restriction of the initial hamiltonian equation to $\mathbb{T}^n$ gives an almost periodic motion on $\mathbb{T}^n$, i.e. in the "angle coordinates" φ the equation has the form
$$\frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} = \overrightarrow{a},$$
here $\overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ is a constant vector depending only on the level;

3. the initial equation can be integrated in "quadratures", i.e. the solutions can be obtained by means of a finite number of algebraic operations and operations of taking integral.

The proof of this theorem essentially breaks into two parts. The first shows that a compact n-dimensional manifold with n commuting nonvanishing vector fields $v_1, \ldots, v_n$ (in our case $v_i = \eta(g_i)$) is diffeomorphic to $\mathbb{T}^n$.

The second builds special coordinates on M, the "action-angle" coordinates. The "angles" $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ are defined in the fiest part of the proof for a fixed level set M_c, but it turns out that they smoothly depend on c. The "action" coordinates $I^1, \ldots, I^n$ depend only on $g_1, \ldots, g_n$ and satisfy $\omega = dI^i \wedge d\varphi_i$ (i.e. (φ, I) are canonical or Darboux coordinates). The initial equations in these coordinates are of the form

$$\frac{d\overrightarrow{I}}{dt} = 0, \frac{d\overrightarrow{\varphi}}{dt} = \overrightarrow{a}(I).$$

Due to the fact that (I, φ)-coordinates are canonical, we get $\overrightarrow{a}(I) = -\frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{I}}, \frac{\partial H}{\partial \overrightarrow{\varphi}} = 0$. Thus, knowing the "action-angle" coordinates, we can easily calculate the vector of "frequencies" $\overrightarrow{a}$ and the solutions: $\overrightarrow{\varphi} = \overrightarrow{\varphi_0} + t\overrightarrow{a}$.

Example (harmonic oscillator I): Let $M = \mathbb{R}^2, H = (1/2)(p^2+q^2), \omega = dp \wedge dq$. Then in the polar coordinates $q = r\cos\varphi, p = r\sin\varphi$ we have $dp \wedge dq = -\sin\varphi dr \wedge r\sin\varphi d\varphi + \cos\varphi r d\varphi \wedge \cos\varphi dr = -rdr \wedge d\varphi = d(-r^2/2) \wedge d\varphi$. Hence $I = -H, a_1 = 1$, the solution is $\varphi(t) = \varphi(0) + t$, i.e.

$$t \mapsto (R\cos(\varphi(0) + t), R\sin(\varphi(0) + t)).$$

Example (harmonic oscillator II): Let $M = \mathbb{R}^2, H = (1/2)(a^2p^2 + b^2q^2), \omega = dp \wedge dq$. The hamiltonian vector field is $\eta(H) = -a^2p\frac{\partial}{\partial q} + b^2q\frac{\partial}{\partial p}$, here $\eta = \omega^{-1} = -\frac{\partial}{\partial p} \wedge \frac{\partial}{\partial q}$. The level sets $M_c = \{(q,p) \mid H(q,p) = c\}$ are ellipses $\{(q,p) \mid q^2/(2c/b^2) + q^2/(2c/a^2) = 1\}$ with the semiaxes $\sqrt{2c}/b, \sqrt{2c}/a$. Note that the standard parametrization of the ellipse, $\varphi \mapsto (\sqrt{2c}/b\cos\varphi, \sqrt{2c}/a\sin\varphi)$ is not a trajectory of $\eta(H)$

The recipe gives $I(c) = \frac{1}{2\pi}\int_{M_c} pdq = \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{M}_c} \omega = -\frac{c}{ab}$, which up to $-\frac{1}{2\pi}$ is the area of the figure $\overline{M}_c := \{(q,p) \mid q^2/(2c/b^2) + q^2/(2c/a^2) \leqslant 1\}$ bounded by the ellipse. From this we conclude that $H = -abI$ and that the solution of the hamiltonian system

$$\dot{q} = -a^2p, \dot{p} = b^2q$$

is given by $H = c, \varphi(t) = \varphi(0) - t\frac{\partial H}{\partial I} = \varphi(0) + tab$ or, in other words, by

$$t \mapsto ((\sqrt{2c}/b)\cos(t_0 + tab), (\sqrt{2c}/a)\sin(t_0 + tab)).$$

Example (harmonic oscillator III): Let $M = \mathbb{R}^4, H = (1/2)(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2), \omega = dp \wedge dq$. The hamiltonian vector field is $\eta(H) = -p_1\frac{\partial}{\partial q_1} - p_2\frac{\partial}{\partial q_2} + q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + q_2\frac{\partial}{\partial p_2}$. Obviously $\eta(H)f = 0$ for $f := q_1q_2 + p_1p_2$ so this is a Liouville–Arnold integrable system.

Lecture III

References: [Mag78, GZ89, Bol91]

A Poisson pencil on M: Let a pair (η_1, η_2) of linearly independent bivectors on a manifold M be given. Assume $\eta^t := t_1\eta_1 + t_2\eta_2$ is a Poisson structure for any $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$. We say that the Poisson structures η_1, η_2 are *compatible* (or form a *bihamiltonian structure* or a *Poisson pair*) and that the whole family $\Theta := \{\eta^t\}_{t \in \mathbb{R}^2}$ is a *Poisson pencil.*

Exercise: Show that the following conditions are equivalent:

1. η^t is Poisson, i.e. $[\eta^t, \eta^t]_S = 0$, for any $t \in \mathbb{R}^2$ (here $[,]_S$ is the Schouten bracket);

2. $[\eta^t, \eta^t]_S = 0$ for any three pairwise nonproportional values of $t \in \mathbb{R}^2$;

3. $[\eta_1, \eta_1]_S = 0, [\eta_1, \eta_2]_S = 0, [\eta_2, \eta_2]_S = 0.$

Example 1: Let η_1, η_2 be bivectors on $\mathbb{R}^n$ with constant coefficients. Then they form a Poisson pair (recall that, given a bivector $\eta = \eta^{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial x_j}$, we have $[\eta, \eta]_S^{ijk} := \sum_{c.p.\ i,j,k} \eta^{ir}(x)\frac{\partial}{\partial x^r}\eta^{jk}(x)$).

Example 2: Let $\mathfrak{g}$ be a Lie algebra and $\eta_\mathfrak{g}$ the Lie–Poisson structure on $\mathfrak{g}^*$. Let $c : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ be a 2-cocycle on $\mathfrak{g}$, i.e. c is skew-symmetric and $\sum_{c.p.\ v,w,u} c([v, w], u) = 0$ for any $v, w, u \in \mathfrak{g}$. Then $c \in (\mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g})^* \cong \mathfrak{g}^* \wedge \mathfrak{g}^*$ can be regarded as a bivector on $\mathfrak{g}^*$ with constant coefficients. It turns out that (η_1, η_2), where $\eta_1 := \eta_\mathfrak{g}, \eta_2 := c$, is a Poisson pair.

Indeed, it is easy to see that the bracket $[(v, \alpha), (w, \beta)]' := ([v, w], c(v, w))$ defines a Lie algebra structure on $\mathfrak{g}' := \mathfrak{g} \times \mathbb{R}$ (*Exercise:* check this). The $\mathbb{R}$-component lies in the centre of $\mathfrak{g}'$, we say that $\mathfrak{g}'$ is a *central extension* of $\mathfrak{g}$. The affine subspaces $\mathfrak{g}^*_{x_0} := \mathfrak{g}^* \times x_0 \subset (\mathfrak{g}')^* = \mathfrak{g}^* \times \mathbb{R}$ are Poisson submanifolds of the Poisson manifold $((\mathfrak{g}')^*, \eta_{\mathfrak{g}'})$. The restriction $\eta_{\mathfrak{g}'}|_{\mathfrak{g}^*_{x_0}}$ coincides with $\eta_1 + x_0\eta_2$, i.e. the last bivector is Poisson at least for three different values of x_0. We conclude that (η_1, η_2) is a Poisson pair.

In coordinates this looks as follows. Let $e_1, \ldots, e_n$ be a basis of $\mathfrak{g}$ and $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k, c(e_i, e_j) = c_{ij}, i, j, k = 1, \ldots, n$, for some constants $c_{ij}^k, c_{ij} \in \mathbb{R}$. Put $\eta_0' := (0, 1), \eta_i' := (\eta_i, 0) \in \mathfrak{g}', i = 1, \ldots, n$, and let $x_0', \ldots, x_n'$ denote the same elements regarded as coordinates on $(\mathfrak{g}')^*$. Then $\eta_{\mathfrak{g}'} = (c_{ij}^k x_k' + x_0' c_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i'} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j'}$ and $\eta^t = (t_1 c_{ij}^k x_k + t_2 c_{ij})\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$. Here $x_1, \ldots, x_n$ are coordinates on $\mathfrak{g}^*$ corresponding to $e_1, \ldots, e_n$.

Example 3: In a particular case when the cocycle c is trivial, i.e. $c(v, w) = a([v, w])$ for some $a \in \mathfrak{g}^*$ we get a Poisson pencil $\{\eta^t\}, \eta^t := (t_1 c_{ij}^k x_k + t_2 c_{ij}^k a_k)\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$, here $a_1, \ldots, a_n$ are coordinates of a in the dual basis $e^1, \ldots, e^n$ of $\mathfrak{g}^*$. In the corresponding Poisson pair (η_1, η_2) the first bivector is the Lie-Poisson one, $\eta_\mathfrak{g}$, and the second one is $\eta_\mathfrak{g}(a)$, the Lie-Poisson bivector "frozen" at a.

Example 4: Let $\mathfrak{g} : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ and $A \in \mathfrak{g}$. Put $[x, y]_A := xAy - yAx$. It is easy to see that $[,]_A$ is a Lie bracket on $\mathfrak{g}$ for any A (*Exercise:* check this). In particular, for a fixed $A \in \mathfrak{g}$ the bracket $[,]^t := t_1[,] + t_2[,]_A = [,]_{t_1 I + t_2 A}$ is a Lie bracket for any $t \in \mathbb{R}^2$ (any family of Lie brackets linearly spanned by two fixed brackets will be called a *Lie pencil*). Denote $\mathfrak{g}^t := (\mathfrak{g}, [,]^t)$. The Lie–Poisson structures $\eta_{\mathfrak{g}^t}$ form a Poisson pencil on $\mathfrak{g}^*$.

We get a generalization of this example taking $\mathfrak{g} := \mathfrak{so}(n, \mathbb{R})$ and A a symmetric $n\times n$-matrix.

I mechanism of constructing functions in involution (the Magri–Lenard scheme): Let (η_1, η_2) be a pair of Poisson structures (not necessarily compatible). Assume we can found a sequence of functions $H_0, H_1, \ldots \in \mathcal{E}(M)$ satisfying

$$\begin{aligned} \eta_1(H_0) &= \eta_2(H_1) \\ \eta_1(H_1) &= \eta_2(H_2) \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1}$$

Proposition. For any indices i, j the following equality holds:

$$\{H_i, H_j\}_{\eta_1} = \{H_{i+1}, H_{j-1}\}_{\eta_1}.$$

Proof $\eta_1(H_i)H_j = \eta_2(H_{i+1})H_j = -\eta_2(H_j)H_{i+1} = -\eta_1(H_{j-1})H_{i+1} = \eta_1(H_{i+1})H_{j-1}$ $\square$

Now assume $i < j$. If $j - i = 2k$, we can apply the proposition k times and get $\{H_i, H_j\}_{\eta_1} = \{H_{i+k}, H_{j-k}\}_{\eta_1} = \{H_{i+k}, H_{i+k}\}_{\eta_1} = 0$. If $j - i = 2k + 1$, we get $\{H_i, H_j\}_{\eta_1} = \{H_{i+k}, H_{j-k}\}_{\eta_1} =$

$\{H_{i+k}, H_{i+k+1}\}_{\eta_1} = \eta_1(H_{i+k})H_{i+k+1} = \eta_2(H_{i+k+1})H_{i+k+1} = 0$. Hence the sequence $H_0, H_1, \ldots$ is a family of first integrals in involution for any of vector fields $v_i := \eta_1(H_i), i = 0, 1, \ldots$ Note that all these vector fields are "bihamiltonian", i.e. hamiltonian with respect to both the Poisson structures η_1, η_2.

In general it is hard to find the sequences of functions $H_0, H_1, \ldots$ with the required properties. However, if we assume additionally that (η_1, η_2) is a Poisson pair, there are some cases, when such sequences naturally appear. For instance, assume that all the bivectors $\eta^t := t_1\eta_1 + t_2\eta_2$ of the corresponding Poisson pencil are degenerate. Let $\eta^\lambda := \lambda\eta_1 + \eta_2, \lambda := t_1/t_2$, and let f^λ be a Casimir function of η^λ. It turns out that f^λ depends smoothly, let $f^\lambda = f_0 + \lambda f_1 + \lambda^2 f_2 + \cdots$ be the corresponding Tailor expansion. Then we deduce from the equality $\eta^\lambda(f^\lambda) = 0$ that $0 = \eta_2(f_0), \eta_1(f_0) + \eta_2(f_1), \eta_1(f_1) + \eta_2(f_2), \ldots$ (coefficients of different powers of λ). Thus we can put $H_0 := f_0, H_1 := -f_1, H_2 := f_2, \ldots$ Note that such a Magri–Lenard chain starts from a Casimir function of η_2. If $g^\lambda = g_0 + \lambda g_1 + \cdots$ is another Casimir function of η^λ, we get another sequence of functions in involution. A question arises, is it true that $\{f_i, g_j\}_{\eta_k} = 0$? Another important question concerns the *completeness* of the obtained family of functions.

II mechanism of constructing functions in involution (based on the Casimir functions of a Poisson pencil): Let $\{\eta^t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ be a Poisson pencil on M. Denote by $\mathcal{C}^t(M)$ the space of Casimir functions of η^t.

Proposition. Let $t', t'' \in \mathbb{R}^2$ be linearly independent and let $f \in \mathcal{C}^{t'}(M), g \in \mathcal{C}^{t''}(M)$. Then

$$\{f, g\}_{\eta^t} = 0$$

for any $t \in \mathbb{R}^2$.

Proof Indeed for any $t \in \mathbb{R}^2$ there exist $c', c'' \in \mathbb{R}$ such that $t = c't' + c''t''$. Then $\{f, g\}_{\eta^t} = \eta^t(f)g = (c'\eta^{t'} + c''\eta^{t''})(f)g = c''\eta^{t''}(f)g = -c''\eta^{t''}(g)f = 0$. □

It is not clear from this fact whether $\{f, g\}_{\eta^t} = 0$ if f, g are Casimir functions of the *same* bivector $\eta^{t'}$. We will discuss this question in the next lecture.

The Jordan–Kronecker decomposition of a pair of bivectors: A bivector b on a vector space V is an element of $\bigwedge^2 V$. We will view a bivector b sometimes as a skew-symmetric map $V^* \to V$ (then its value at $x \in V^*$ will be denoted by $b(x)$) and sometimes as a skew-symmetric bilinear form on V^* (then its value at $x, y \in V^*$ will be denoted by $b(x, y)$). In particular, $b(x, y) = \langle b(x), y\rangle$.

Theorem. (Gelfand–Zakharevich, 1989) *Given a finite-dimensional vector space V over $\mathbb{C}$ and a pair of bivectors $(b^{(1)}, b^{(2)}), b^{(i)} : \bigwedge^2 V^* \to \mathbb{C}$, there exists a direct decomposition $V^* = \oplus_{m=1}^k V_m^*$ such that $b^{(i)}(V_l^*, V_m^*) = 0$ for $i = 1, 2, l \neq m$, and the triples $(V_m^*, b_m^{(1)}, b_m^{(2)})$, where $b_m^{(i)} := b^{(i)}|_{V_m^*}$, are from the following list:*

1. [the Jordan block $\mathbf{j}_{2j_m}(\lambda)$]: $\dim V_m^* = 2j_m$ *and in an appropriate basis of V_m^* the matrices of $b_m^{(1)}, b_m^{(2)}$ are equal to*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & I_{j_m} \\ -I_{j_m} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{0} & J_{j_m}(\lambda) \\ -J_{j_m}(\lambda)^T & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

where I_{j_m} is the unity $j_m \times j_m$-matrix and

$$J_{j_m}(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}$$

is the Jordan $j_m \times j_m$-block with the eigenvalue λ;

2. [the Jordan block $\mathbf{j}_{2j_m}(\infty)$]: $\dim V_m^* = 2j_m$ *and in an appropriate basis of* V_m^* *the matrices of* $b_m^{(1)}, b_m^{(2)}$ *are equal to*

$$\left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & J_{j_m}(0) \\ -J_{j_m}(0)^T & \mathbf{0} \end{array}\right], \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & I_{j_m} \\ -I_{j_m}^T & \mathbf{0} \end{array}\right];$$

3. [the Kronecker block $\mathbf{k}_{2k_m+1}$]: $\dim V_m^* = 2k_m + 1$ *and in an appropriate basis of* V_m^* *the matrices of* $b_m^{(1)}, b_m^{(2)}$ *are equal to*

$$K_{1,k_m} := \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_{1,k_m} \\ -B_{1,k_m}^T & \mathbf{0} \end{array}\right], K_{2,k_m} := \left[\begin{array}{cc} \mathbf{0} & B_{2,k_m} \\ -B_{2,k_m}^T & \mathbf{0} \end{array}\right],$$

where

$$B_{1,k_m} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{2,k_m} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

($k_m \times (k_m + 1)$-matrices).

Kronecker Poisson pencils: Let $\{\eta^t\}_{t\in\mathbb{R}^2}, \eta^t := t_1\eta_1 + t_2\eta_2$, be a Poisson pencil on M. We say that it is *Kronecker at a point* $x \in M$, if the Jordan–Kronecker decomposition of the pair of bivectors $\eta_1|_x, \eta_2|_x$ (regarded as elements of $\bigwedge^2 T_x^{\mathbb{C}} M$, here $T_x^{\mathbb{C}} M$ is the complexified tangent space) does not contain Jordan blocks.

Proposition. $\{\eta^t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ is Kronecker at x if and only if

$$\operatorname{rank}(t_1\eta_1|_x + t_2\eta_2|_x) = const, (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}.$$

Proof It is easy to see that any nontrivial linear combination of matrices K_{1,k_m}, K_{2,k_m} has constant rank equal to $2k_m$. So the rank can "jump" at some $t \neq 0$ if and only if there are Jordan blocks in the decomposition. □

We say that a Poisson pencil Θ on M is *Kronecker* if there exists an open dense set $U \subset M$ such that Θ is Kronecker at any $x \in U$.

Involutivity of Casimir functions for Kronecker Poisson pencils: We have already proven that, if $t', t'' \in \mathbb{R}^2$ are linearly independent, then $\{f, g\}_{\eta^t} = 0$ for any $f \in \mathcal{C}^{t'}(M), g \in \mathcal{C}^{t''}(M), t \in \mathbb{R}^2$. In the same way one can prove that $\eta^t|_x(\alpha, \beta) = 0$ for any $\alpha \in \ker \eta^{t'}|_x, \beta \in \ker \eta^{t''}|_x, t \in \mathbb{R}^2$.

Proposition. Let $\{\eta^t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ be Kronecker and let $t' \in \mathbb{R}^2, t' \neq 0$. Then $\{f, g\}_{\eta^t} = 0$ for any $f, g \in \mathcal{C}^{t'}(M), t \in \mathbb{R}^2$.

Proof Fix $x \in U$. Let $t_{(n)} \in \mathbb{R}^2$ be such that $t_{(n)}$ is linearly independent with t' and $t_{(n)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} t'$. The kernel of the map $\eta^t|_x : T_x^* M \to T_x M$ continuously depend on $t \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ and is of constant dimension. Consequently we can find a sequence of covectors $\alpha_n \in \ker \eta^{t_{(n)}}|_x$ such that $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} d_x g$. We get $\eta^t|_x(d_x f, \alpha_n) = 0$ and by continuity we conclude that $\eta^t|_x(d_x f, d_x g) = 0$. In other words, $\{f, g\}_{\eta^t}(x) = 0$ for any $x \in U$. Since U is dense, using again the continuity argument we get the proof. □

Summarizing, we get the following result.

Proposition. Let $\Theta = \{\eta^t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ be a Kronecker Poisson pencil and let

$$\mathcal{C}^{\Theta}(M) := \mathrm{Span}\{\bigcup_{t\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \mathcal{C}^t(M)\}.$$

Then $\mathcal{C}^{\Theta}(M)$ is a family of functions in involution with respect to any Poisson bivector η^t.

Remark: It can be shown that in the Kronecker case the family of functions in involution obtained by the Magri-Lenard scheme starting from Casimir functions coincide with the family $\mathcal{C}^{\Theta}(M)$.

Completeness of Casimir functions for Kronecker Poisson pencils: Let (M, η) be a Poisson structure. We say that an open set $W \subset M$ is *correct* for η if the set $W' := W \setminus (W \cap \mathrm{Sing}\,\eta)$ is nonempty and the common level sets of the functions from $\mathcal{C}^{\eta}(W')$ coincide with the symplectic foliation of η on the set W'. In other words, the set W is correct if the Poisson structure does not have regular symplectic leaves dense in W. Equivalent definition: W is correct if $\{d_x f \mid f \in \mathcal{C}^{\eta}(W)\} = \ker \eta_x$ for any $x \in W'$. Note that in analytic category any sufficiently small open set is correct.

Proposition. Let $\Theta = \{\eta^t\}_{t\in\mathbb{R}^2}$ be a Kronecker Poisson pencil. Assume $W \subset M$ is an open set that is correct for η^t for a countable set $\{t_{(1)}, t_{(2)}, \ldots\}$ of pairwise linearly independent values of the parameter t and the set $W' := W \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Sing}\,\eta^{t_{(i)}}$ is nonempty. Then the set of functions in involution $\mathcal{C}^{\Theta}(W')$ is *complete* with respect to any $\eta^t, t \neq 0$.

Proof Fix $x \in U \cap W'$. Let us first prove that the set $C_x := \{d_x f \mid f \in \mathcal{C}^{\Theta}(W')\} \subset T_x^* M$ coincides with the set $L_x := \mathrm{Span}\{\bigcup_{t\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} \ker \eta_x^t\}$. Indeed, the vector space L_x is finite-dimensional, hence is generated by a finite number of kernels $\ker \eta_x^t = \{d_x f \mid f \in \mathcal{C}^t(W)\}$. Hence $L_x \subset C_x$. The same considerations show that $C_x \subset L_x$.

It is easy to see that the set L_x is of dimension $(1/2)\mathrm{rank}\,\eta_x^t + \dim M - \mathrm{rank}\,\eta_x^t$. Assume for a moment that the Jordan–Kronecker decomposition of the pair $\eta_1|_x, \eta_2|_x$ consists of one Kronecker block $\mathbf{k}_{2k_m+1}$. The kernel of the matrix $\lambda K_{1,k_m} + K_{2,k_m}$ is 1-dimensional and is spanned by the vector $[0, \ldots, 0, 1, -\lambda, \ldots, (-\lambda)^{k_m}]$. Taking $k_m + 1$ different values of λ we get $k_m + 1 = (1/2)\mathrm{rank}\,\eta_x^t + \dim M - \mathrm{rank}\,\eta_x^t$ linearly independent vectors (recall the Vandermonde determinant) spanning the set L_x. In the case of several Kronecker blocks you repeat these considerations for each block. $\square$

Remark: In fact it is sufficient to require that W is correct for a finite number of η^t. However, this number depends on the number and dimension of the Kronecker blocks, so we make a bit stronger assumption (which in practice is always satisfied).

Example (method of the argument translation): Let $M := \mathfrak{g}^*, \eta_1 := \eta_{\mathfrak{g}}, \eta_2 := \eta_{\mathfrak{g}}(a), S := \mathrm{Sing}\,\eta_{\mathfrak{g}}$, where $a \in \mathfrak{g}^* \setminus S$. Assume that $\mathrm{codim}\,S \geqslant 2$ (if $\mathfrak{g}$ is semisimple it is known that $\mathrm{codim}\,S \geqslant 3$). Note that S is an algebraic set, i.e. it is defined by a finite number of algebraic equations $f_1(x) = 0, \ldots, f_m(x) = 0$ on $\mathfrak{g}^*$. Any algebraic set in a neighbourhood of its generic point is diffeomorphic to a manifold, hence its dimension is correctly defined.

If $e_1, \ldots, e_n$ is a basis of $\mathfrak{g}$ and the corresponding structure constants are defined by $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, the polynomials $f_1, \ldots, f_m$ are the $r \times r$-minors of the matrix $c_{ij}(x) = c_{ij}^k x_k$, where $r = \max_x \mathrm{rank}\,[c_{ij}(x)]$. Here $x_1 = e_1, \ldots, x_n = e_n$ are the corresponding coordinates on $\mathfrak{g}^*$.

In order to check the condition of Kroneckerity we need to consider the complexification $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ of the initial Lie algebra. It can be regarded as a vector space $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \ldots, e_n\} \cong \mathbb{C}^n$

with the Lie bracket defined by the same structure constants. The set $S_{\mathbb{C}} := \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^n \mid \operatorname{rank} c^k_{ij} z_k < \max_{z \in \mathbb{C}^n} \operatorname{rank} c^k_{ij} z_k\}$ is a complex algebraic set defined by the equations $f_1(z) = 0, \ldots, f_m(z) = 0$, where $f_1, \ldots, f_m$ are the same polynomials as above. In particular, the set $S_{\mathbb{C}}$ is of complex codimension at least 2.

We know that $t_1\eta_1|_x + t_2\eta_2|_x = c^k_{ij}(t_1 x_k + t_2 a_k), t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Thus $\operatorname{rank}(t_1\eta_1|_x + t_2\eta_2|_x)$ is maximal (over t) and independent of $t \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ if and only if $t_1 x + t_2 a \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} \setminus S$ if and only if $x \notin \overline{a, S_{\mathbb{C}}}$, where $\overline{a, S_{\mathbb{C}}} := \{z \in \mathfrak{g}^*_{\mathbb{C}} \mid \exists (t_1, t_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \colon t_1 z + t_2 a \in S_{\mathbb{C}}\}$.

Note that the set $S_{\mathbb{C}}$ is homogeneous (stable under rescaling). Passing to the projectivization the set $\overline{a, S_{\mathbb{C}}}$ becomes a cone in $\mathbb{CP}^{n-1}$ over the projectivization of S. This shows that the set $\overline{a, S_{\mathbb{C}}}$ is also algebraic (by the standard arguments from algebraic geometry) and, moreover, $\dim_{\mathbb{C}} \overline{a, S_{\mathbb{C}}} = \dim_{\mathbb{C}} S_{\mathbb{C}} + 1$. In particular $\operatorname{codim}_{\mathbb{C}} \overline{a, S_{\mathbb{C}}} \geqslant 1$ and we can put $U := \mathfrak{g}^* \setminus (\mathfrak{g}^* \cap \overline{a, S_{\mathbb{C}}}) = \mathfrak{g}^* \setminus (\overline{a, S})$. Here $\overline{a, S} := \{x \in \mathfrak{g}^* \mid \exists (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \colon t_1 x + t_2 a \in S\}$ and $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \overline{a, S} \geqslant 1$. The set U is an open dense set in $\mathfrak{g}^*$ such that $\{\eta^t\}$ is Kronecker at any $x \in U$.

Finally assume that $\mathfrak{g}$ is semisimple. Then $\eta_{\mathfrak{g}}$ has enough global Casimir functions and the whole space $\mathfrak{g}^*$ is a correct set for $\eta_{\mathfrak{g}}$. In particular, the assumptions of the proposition above are satisfied and we get a complete set $\mathcal{C}^{\Theta}(\mathfrak{g}^*)$ of functions in involution (with respect to any η^t). This set is generated by the "translations" $f(x + \lambda a), \lambda \in \mathbb{R}$, of the Casimir functions f of $\eta_{\mathfrak{g}}$.

III mechanism of constructing functions in involution (based on eigenvalue functions of a Poisson pencil):

Theorem 2. *Let $\{\eta^t\}$ be a Poisson pencil on M, $w_1(x), w_2(x)$ two eigenvalues of Jordan blocks. Then*

$$\{w_1, w_2\}_{\eta^t} = 0 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^2.$$

Lemma. If $w(x)$ is an egenvalue of a Jordan block (in other words, $\operatorname{rank}(\eta_1(x) - w(x)\eta_2(x)) < \max_{v \neq w(x)} \operatorname{rank}(\eta_1(x) - v\eta_2(x))$), then $d_x w \in \ker(\eta_1 - v_0\eta_2)(x)$ for any $x \in M_{v_0} := \{x \mid w(x) = v_0\}$.

In particular, $\{w, f\}^{(1,-v_0)}|_{M_{v_0}} = 0$ for any function f.

Proof Consider a Poisson structure $\eta_1 - v_0\eta_2$ and a point $x \in M_{v_0}$. A symplectic leaf $S, \dim S < \dim M$ passes through x. The function w is constant on S. Indeed, if $y \in S$ is close to x, then $\operatorname{rank}(\eta_1(y) - v_0\eta_2(y)) < \max_{v \neq v_0} \operatorname{rank}(\eta_1(y) - v\eta_2(y))$, i.e. v_0 must be an eigenvalue of "the same" Jordan block at a point y, hence $w(y) = v_0$.

Proof of the theorem Let $w_1(x), w_2(x)$ be functionally independent. Then there exists a local coordinate system on M of the form $w_1, w_2, x_3, \ldots, x_m$.

let $v_1 \neq v_2$. Then there exist $\alpha(v_1, v_2), \beta(v_1, v_2) \in \mathbb{R}$ such that $\eta^\lambda := \lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2 = \alpha(v_1, v_2)(\eta_1 - v_1\eta_2) + \beta(v_1, v_2)(\eta_1 - v_2\eta_2)$. Thus

$$\{w_1, w_2\}^\lambda|_{(v_1, v_2, x_3, \ldots, x_m)} = ((\lambda_1\eta_1 + \lambda_2\eta_2)(dw_1)w_2)|_{(v_1, v_2, x_3, \ldots, x_m)} =$$

$$\alpha(v_1, v_2)\{w_1, w_2\}^{(1,-v_1)}|_{(v_1, v_2, x_3, \ldots, x_m)} + \beta(v_1, v_2)\{w_1, w_2\}^{(1,-v_2)}|_{(v_1, v_2, x_3, \ldots, x_m)}$$

$$= 0 - \beta(v_1, v_2)\{w_2, w_1\}^{(1,-v_2)}|_{(v_1, v_2, x_3, \ldots, x_m)} = 0.$$

By continuity we also have 0 for $v_1 = v_2$.

[Arn73] V. I. Arnold, *Ordinary defferential equations*, The MIT, 1973.

[Arn89] V. I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics,* Springer, 1989.

[Bol91] Alexey Bolsinov, *Compatible Poisson brackets on Lie algebras and completeness of families of functions in involution*, Izd. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **55** (1991), In Russian.

[dSW99] Ana Canas da Silva and Alan Weinstein, *Geometric models for noncommutative algebras,* Providence, 1999.

[GZ89] Israel Gelfand and Ilya Zakharevich, *Spectral theory for a pair of skew-symmetrical operators on* S^1, Func. Anal. Appl. **23** (1989), no. 2, 85-93, Translation from the Russian.

[Mag78] F. Magri, *A simple model of the integrable hamiltonian equation,* J. Math. Phys. **19** (1978), 1156-1162.

[Nag66] Tadashi Nagano, *Linear defferential systems with singularities and an application to transitive lie algebras,* J. Math. Soc. Japan **18** (1966), 398-404.

Equivariant complexes in combinatorics

Leonid Plachta[1,2]
[1] AGH University of Science and Technology (Cracow)
[2] IAPMM of NAS of Ukraine (Lviv)
dept25@gmail.com

Configurations. We consider the n-simplex Δ^n as the largest simplicial complex on the vertex set $[n+1]$. Let X be a cell complex. The space $F(X,k) = X^k \backslash \{(x_1,\dots,x_k) \in X^k | x_i = x_j\}$ is called the configuration space of the complex X.

Let $k, n \geq 1$ be fixed integers such that $k \leq n$ and K be a simplicial complex with $dim K = n$. We define $D_k(K)$ to be the largest cell complex that is contained in the product K^k minus its diagonal $\{(x_1,\dots,x_k) \in K^k | x_i = x_j$ for some $i \neq j\}$. More explicitly, $D_k(K) = \bigcup \sigma_1 \times \cdots \times \sigma_k$ where the above summation is over all pairwise disjoint closed cells in K [A. Abrams, D. Gay and V. Hover, *Discretized configurations and partial partitions*, Proceedings of AMS, 2011]. The space $D_k(K)$ is called the k-discretized configuration space of K. If $K = \Delta^n$, the maximum dimension of a cell of $D_k(\Delta^n)$ is equal to $n-k+1$. The complexes $D_k(\Delta^n)$ and $F(K,k)$ are the $\mathbf{Z}_k$ and S_k-complexes in the standard way where S_k is the symmetric group on $[k]$. In this talk, we review topological homological properties of $D_k(\Delta^n)$. We also describe some homological properties of $F(\mathbf{R}^n, k)$, the space that is related to $D_k(\Delta^n)$.

Application in combinatorics. Let $\mathcal{F}$ be the set system on $[n]$ and $r \leq n$ be the fixed positive integer. Let $H = KG_r(\mathcal{F})$ be the Kneser r-hypergraph determined by the set system $\mathcal{F}$. In combinatorics, it is known a procedure which allows to associate with a Kneser r-hypergraph H a cellular complex X with a free action of the symmetric group S_r or the cyclic group $\mathbf{Z}_r$ on it. In one particular case, X can be represented as a r-fold deleted product (or deleted join) of some simplicial complex Y associated with X. It turns out, the equivariant topology of X reflects some combinatorial properties of the hypergraph (graph) H. The second purpose of the present talk is to describe the relation between coloring properties of hypergraphs (graphs) H and topological properties of equivariant G-complexes associated with H (in particular, configuration and discrete configuration spaces). For references on this subject, see for example, [J. Matoušek, *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lecture on Topological Methods in Combinatorics and geometry*, Springer, 2003] or [P. Csorba, C. Lange, I. Schurr, and A. Wassmer, *Note Box complexes, and the chromatic number*, Journal of Combinatorial Theory, Ser.A (108) 2004, 159-168].

Shadows problems in Euclidian spaces

Yuri Zelinskii
Institute of Mathematics Ukrainian National Academy of Science, Kyiv, Ukraine
zel@imath.kiev.ua

Definition 1. We shall say that a set $E \subset \mathbb{R}^n$ is m-convex for points $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$ if there exists an m-dimensional plane L, such that $x \in L$ and $L \cap E = \varnothing$; the set E is m-convex if it is m-convex for each point $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Problem 1 (about shade). What is the minimum number of non-overlapping closed balls with the centers on the sphere S^{n-1} with radii smaller than the radius of that sphere such that any straight line, passing through the center of the sphere, cross at least one of these balls?

Theorem 1. The center of an $(n-1)$-sphere in n-dimensional Euclidean space, $n > 2$, belongs to the 1-shell of a family of open (closed) balls of radii not exceeding (smaller) than the radius of the sphere and with centers on this sphere if and only if $n+1$ balls form a shell.

Definition 2. We shall say that a set $E \subset \mathbb{R}^n$ is m-semiconvex for points $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$ if there exists an m-dimensional half-plane P, such as $x \in P$ and $P \cap E = \varnothing$; the set E is m-semiconvex if it is m-semiconvex for each points $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$.

Let F be a 1-semiconvex hull of a family of non-overlapping closed sets (in the n-dimensional Euclidean space) generated by the given convex set having a non-empty interior with the help of a transformation group consisting of movements and homotheties.

Theorem 2. A selected point in the n-dimensional Euclidean space, $n > 2$, belongs to F for $2n$ elements of this family.

(Hyper)complex case. Problem 2. What is the minimum number of non-overlapping closed balls, having centers on the sphere and radii which are smaller than the radius of the given sphere, and a property that any complex (hypercomplex) line passing through the center of the sphere intersects at least one of these balls?

Theorem 3. The selected point in the n-dimensional complex (hyper)complex Euclidean space belongs to the 1-(hyper)complex hull of the family of disjoint open (closed) balls that do not contain the given point if and only if the number of balls is equal to n.

1. G. Khudayberganov, *On uniform-polynomial convex shell of the union balls*, Manuscript dep. in VINITI 21.02.1982, No. 1772 - 85 Dep.
2. Yu. Zelinskii, I. Vyhovska, M. Stefanchuk, *Generalized convex sets and shadows problem*, ArXiv preprint /arXiv:1501.06747 [math.MG]/, 2015, 15 P. (in Russian).

Вид 2-КНФ булевых функций, задающих топологии на конечном множестве

Н. П. Башова*, А. В. Скрябина

ЗНТУ*, ЗНУ, Запорожье, Украина

bashovanp82@gmail.com, anna_29_95@mail.ru

Пусть задано n - элементное упорядоченное множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Каждому из подмножеств данного множества поставим во взаимно однозначное соответствие булев вектор $(x_1, x_2, ..., x_n)$, в котором $x_i = 1$, если i-тый элемент множества X принадлежит этому подмножеству, и $x_i = 0$, если не принадлежит. Рассмотрим всевозможные наборы подмножеств множества X. Каждому из них поставим в соответствие булеву функцию $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, область истинности которой задает все подмножества, принадлежащие выбранному набору. Соответствие между множеством всех булевых функций от n-мерных булевых векторов и множеством всех наборов подмножеств n-элементного множества X биективно [1].

Набор подмножеств n-элементного множества является топологией на этом множестве тогда и только тогда, когда булева функция, описывающая эту систему подмножеств, удовлетворяет следующим требованиям:

1) В область ее истинности включаются булевы векторы $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$, то есть является 0-выполнимой и 1-выполнимой.

2) Вместе с любой парой булевых векторов $(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $(y_1, y_2, ..., y_n)$ в область истинности входят булевы векторы $(x_1 \vee y_1, x_2 \vee y_2, ..., x_n \vee y_n)$ и $(x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2, ..., x_n \wedge y_n)$, то есть булева функция является биюнктивной (это следует из критерия биюнктивности [2]).

Дадим топологическое толкование понятиям существенная и несущественная переменная.

Определение 1. *Переменная $x_i \in X$ называется* ***несущественной*** *в топологии τ, если для любого $U \in \tau$ выполнены условия: $U \cup \{x_i\} \in \tau$ и $U \setminus \{x_i\} \in \tau$. В противном случае переменная x_i называется существенной.*

Утверждение 1. (Критерий несущественности переменной) *Переменная x_i будет несущественной в топологии τ тогда и только тогда, когда множество $\{x_i\}$ одновременно открыто и замкнуто.*

Утверждение 2. *Биюнктивная булева функция $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ задает топологию, если её 2-КНФ имеет вид: $(\bar{x}_j \vee x_k)$, где $k, j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq k$.*

Теорема 1. *Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с весом, большим числа 2^{n-1}, задает топологию на n-элементном множестве тогда и только тогда, когда её 2-КНФ имеет вид:*

1) $\wedge_{i=1}^{\alpha_n}(\bar{x}_n \vee x_i)$, *где* $1 \leq \alpha_n \leq n-1$. *При этом число существенных переменных функции равно* $\alpha_n + 1$;

2) $(\bar{x}_n \vee x_i) \wedge (\bar{x}_{n-1} \vee x_i) \wedge \ldots \wedge (\bar{x}_{k+1} \vee x_i)$, *где* $1 \leq k \leq n-2$ *и* $i = \overline{1, k}$. *При этом функция будет содержать* $(n-k+1)$ *существенных переменных.*

3) $(\bar{x}_n \vee x_i) \wedge (\bar{x}_{n-1} \vee x_j)$, *где* $i = \overline{1, n-2}$, $j = \overline{1, n-2}$, $i \neq j$. *При этом существенных переменных будет 4.*

1. Адаменко Н.П. *Описание топологий на конечных множествах булевыми функциями. Вестник ЗНУ.* (2006), 5-8
2. Тарасов А. В. *Обобщение критерия биюнктивности Шефера.* Дискретная математика. 24:2 (2012), 92-99

Локальные инварианты гладкой субмерсии $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$

В. М. Кузаконь
ОНАПТ, Одесса, Украина
kuzakon_v@ukr.net

Пусть $\mathbb{E}^n$ — евклидово пространство размерности n, p — произвольная точка в $\mathbb{E}^n$, e_i — подвижной репер в $\mathbb{E}^n$, $i, j, k, ... = 1, 2, \dots, n$. Деривационные уравнения имеют вид:

$$dp = \omega^j e_j, \quad de_i = \omega_i^j e_j.$$

Мы используем почти ортонормированные реперы (AO-реперы), которые удовлетворяют условиям

$$(e_u e_v) = \delta_{uv},\ u, v, w = 1, 2, \dots, n-1; \quad (e_u e_n) = 0; \quad (e_n e_n) = g^2,$$

где g — гладкая функция от локальных координат точки p.

Преобразование, переводящее один AO-репер в другой, имеет вид $P = G^{-1}(\tilde{g})O(n)G(g)$, где $O(n)$ — ортогональная матрица порядка n, G — диагональная матрица, у которой все элементы кроме последнего единицы, а последний есть g. Обозначим множество таких преобразований $\mathcal{P}$. Структурные уравнения псевдогруппы диффеоморфизмов, действующей на прямой $\mathbb{R}$:

$$d\vartheta^1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta_1^1,\ d\vartheta_1^1 = \vartheta^1 \wedge \vartheta_{11}^1,\ d\vartheta_{11}^1 = \vartheta_1^1 \wedge \vartheta_{11}^1 + \vartheta^1 \wedge \vartheta_{111}^1, \dots, \tag{1}$$

причем, $\vartheta^1 = \lambda_i \omega^i$. Справедливы следующие соотношения:

$$\vartheta_1^1 = d\ln g - a_u\omega^u - a\omega^n.$$

$$(\bigtriangledown a_{vu} + a_{vu}\omega_n^n) \wedge \omega^u + \bigtriangledown a_v \wedge \omega^n + A_{vu}\omega^v \wedge \omega^n = 0,$$
$$\bigtriangledown(g a_{vu}) = a_{vuz}\omega^z + g b_{vu}\omega^n,$$
$$\bigtriangledown a_v = (b_{vu} - A_{vu})\omega^u + b_v\omega^n,$$

где:

$$A_{vu} = A_{uv} = g^2 \sum_z a_{vz} a_{zu} + a_v a_u,$$
$$\bigtriangledown a_{vu} = da_{vu} - a_{vz}\omega_u^z - a_{zu}\omega_v^z,$$
$$\bigtriangledown a_v = da_v - a_u\omega_v^u.$$

Теорема 1. *Величины $g a_{vu}$ a_v b_{vu}, A_{vu} $\frac{b_v}{g}$ образуют тензоры относительно преобразований псевдогруппы $\mathcal{P}$.*

Теорема 2. *Пусть задана субмерсия $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$, причем пространство $\mathbb{E}^n$ отнесено к почти ортонормированному реперу, а структурные уравнения псевдогруппы преобразований на $\mathbb{R}$ имеют вид (1). Тогда семейство корепеpов в $\mathbb{E}^n$ и на $\mathbb{R}$ можно выбрать так, что форма ω^n аннулируется на слоях соответствующего слоения Φ, а формы $\vartheta_1^1, \vartheta_{11}^1, \dots$ становятся главными и зависят только от слоевых форм ω^v и, возможно, еще от калибровки.*

1. Kuzakon V. M., Shelekhov A. M. Local invariants of smooth foliations./ V. M. Kuzakon Mathematical Modelling and Geometry. –2014, V. 2, No 3, –C.48-59.
2. Лаптев Г. Ф.К инвариантной теории дифференцируемых отображений./ Г. Ф. Лаптев Труды геометрического семинара. –Москва, ВИНИТИ АН СССР, 1974 т. 6, – с. 37-42.

Инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования сохраняющие тензор Эйнштейна на келеровых многообразиях ненулевой постоянной скалярной кривизны

Е. Е. Чепурная

ОНАПТ, Одесса, Украина

culeshova@ukr.net

Инфинитезимальные голоморфно-проективные преобразования определяются условием:

$$L_\xi \Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2}(\varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h - \varphi_s F_i^s F_j^h - \varphi_s F_j^s F_i^h)$$

Здесь F_i^j –комплексная структура, такой аффинор, что:

$$F_s^j F_i^s = -\delta_i^j, \qquad F_{i,k}^j = 0,$$

а символ L_ξ означает производную Ли вдоль поля ξ. Тензор

$$E_{ij} \overset{\mathrm{def}}{=} R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij} \tag{1}$$

называют *тензором Эйнштейна*. Из требования сохранения тензора (1) должно выполняться уравнение

$$L_\xi E_{ij} = \xi^\alpha E_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} E_j^\alpha + \xi_{\alpha,j} E_i^\alpha = 0 \tag{2}$$

Из (2) и постоянства скалярной кривизны $R = R_{ij} g^{ij} \neq 0$ следует, что

$$L_\xi g_{ij} = -\frac{n(n+2)}{R} \varphi_{i,j}$$

Полагая

$$p_i = \xi_i + \frac{n(n+2)}{2R} \varphi_i$$

мы получаем p^i – контравариантный аналитический вектор, который к тому же, является вектором Киллинга [1]. Также, вектором Киллинга является

$$q^i = \frac{n(n+2)}{2R} \varphi^k F_k^i.$$

Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *В келеровых многообразиях постоянной ненулевой скалярной кривизны любой аналитический контравариантный вектор ξ^i, порождающий голоморфно-проективные инфинитезимальное преобразование, сохраняющее тензор Эйнштейна, может быть единственным образом представлен в форме:*

$$\xi^i = p^i + F_k^i q^i,$$

где p^i и q^i – векторы Киллинга.

1. K. Yano *Differential geometry on complex and almost complex spaces*,- Pure and Applied Math. vol. 49, Pergamon Press Book, New York (1965).
2. Й. Микеш *Голоморфно-проективные отображения и их обобщения.*,- Геометрия – 3, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., 30, ВИНИТИ, М., 2002, 258–289
3. S. Tachibana S. Ishihara *On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds*,- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.

Про набори ортопроекторів, що задовольняють “all but two” співвідношення

Е.Н. Ашурова
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
work1991@ukr.net

Дана робота присвячена вивченню зображення $*$-алгебри, породженої набором проекторів P_1,P_2, Q_1, …, Q_n, які задовольняють співвідношення:

$$P_1 \perp P_2, \qquad Q_1 + \dots + Q_n = I. \tag{1}$$

Показано, що за умови, що кожна пара проекторів (P_j, Q_k), $j = 1, 2$, $k = 1 \dots, n$, знаходиться у загальному положенні, задача опису з точністю до унітарної еквівалентності наборів (1), еквівалентна до задачі опису блочних 2×2 додатних самоспряжених матриць A_1, …, A_n з умовою: $A_1 + \dots + A_n = I$.

Задача опису наборів ортопроекторів з умовами (1) з точністю до унітарної еквівалентності є $*$-дикою. Тому досліджуються набори з додатковими комутаційними співвідношеннями, які еквівалентні умові, що у незвідному зображенні образи ортопроекторів P_1, P_2 одновимірні. У цьому випадку задача опису незвідних наборів є ручною.

Основним результатом роботи є теорема 1, яка описує комутативний набір нормальних операторів, спектральний розклад яких дає розклад набору на незвідні набори.

Отже, нехай Λ — множина усіх мультиіндексів

$$\alpha = (j_1, k_1, j_2, \dots, k_{l-1}, j_l, k_l, j_1),$$
$$j_s = 1, 2;\ k_s = 1, \dots, n;\ s = 1, \dots, l;\ l = 0, 1, \dots.$$

Розглянемо набір операторів C_α, $\alpha \in \Lambda$:

$$C_\alpha = P_{j_1} Q_{k_1} P_{j_2} \dots Q_{k_{l-1}} P_{j_l} Q_{k_l} P_{j_1}, \tag{2}$$

Позначимо $\Lambda_i \subset \Lambda$ підмножину індексів, що починаються та закінчуються на i, $i = 1, 2$.

Теорема 1. Нехай набір ортопроекторів P_1, P_2, Q_1, …, Q_n, що задовольняє умові (1) незвідний та виконуються умови:

i) $P_1 \neq 0$, $P_2 \neq 0$;

ii) при кожному $j = 1, \dots, n$ пара проекторів $P_0 = P_1 + P_2$ та Q_j знаходяться у загальному положенні;

iii) оператори C_α, $\alpha \in \Lambda$, що визначаються формулою (2) утворюють комутативний набір.

Тоді $C_\alpha = c_\alpha P_j$, $c_\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \Lambda_j$, і набір чисел

$$c_\alpha, \quad \alpha \in \{(j, k, j), (1, k, 2, l, 1) \mid j = 1, 2; k, l = 1, \dots, n\},$$

визначає проектори P_1, P_2, Q_1, …, Q_n однозначно з точністю до унітарної еквівалентності.

Про деякі контрприклади в теорії багатовимірних сингулярних ймовірнісних мір

Волошина Вікторія

Сингулярні ймовірнісні міри вивчаються протягом останніх ста років. Суттєве підвищення інтересів до вивчення таких мір відбулося в кінці XX-го століття у зв'язку з так званим "фрактальним вибухом" та глибоким зв'язком між теорією фракталів та теорією сингулярних мір.

Важливий клас одновимірних сингулярних ймовірнісних мір породжується в.в. з незалежними символами абстрактних розкладів дійсних чисел. Цей клас є узагальненням класу випадкових величин Джессена-Вінтнера. Для мір такого типу є характерною чистота розподілу (в сенсі розкладу Лебега), а критерій дискретності співпадає з критерієм дискретності розподілів в.в., що є сумою м.н. збіжних рядів дискретно розподілених незалежних в.в. (теорема Леві). Клас багатовимірних сингулярних ймовірнісних мір є значно багатшим і менш вивченим. У доповіді розглянута конструкція двовимірних ймовірнісних мір, породжених символьними розбиттями одиничного квадрату і будуються контрприклади до теорем про чистоту розподілу вказаних в.в., що мають місце у одновимірному випадку.

Побудова розбиття

Розглянемо розбиття одиничного квадрата $E = [0;1]\times[0;1] \subset \Re^2$ на n $(n \geq 3)$ замкнених у цьому просторі множин $\Delta_0, \Delta_1, ..., \Delta_{n-1}$. При цьому мають виконуватися умови

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta_i = E,\ \lambda\left(\Delta_i \bigcap \Delta_j\right) = 0,\ i \neq j,\ i,j \in \overline{0, n-1},$$

$$\lambda(\Delta_0) : \lambda(\Delta_1) : ... : \lambda(\Delta_{n-1}) = q_0 : q_1 : ... : q_{n-1}, q_i \neq 0$$

Далі на другому, третьому і, взагалі k-тому кроці кожну множину $\Delta_{\alpha_1\alpha_2,...\alpha_k-1}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k - 1 \in \overline{0, n-1}$ ділитимемо на n частин $\Delta_{\alpha_1\alpha_2,...\alpha_k-10}$, $\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k-11}, ...,$ $\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k-1[n-1]}$, кожна з яких замкнена в $\Re^2$. При цьому для довільного фіксованого набору $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, n-1}$ мають виконуватися умови

1. $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}i} = \Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}}$.
2. $\lambda\left(\Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}i} \bigcap \Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}j}\right) = 0,\ i \neq j.$
3. $\lambda\left(\Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}0}\right) : \lambda\left(\Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1}\right) : ... : \lambda\left(\Delta_{\alpha_1...\alpha_{k-1}[n-1]}\right) = q_0 : q_1 : ... :$
   $: q_{n-1}$.
4. $diam\,(\Delta_{\alpha_1...\alpha_k}) \to 0,\ k \to \infty.$

Для такого розбиття E мають місце теореми 1, 2.

Теорема 1. Для довільної послідовності $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \alpha_k \in A, A = \{0, 1, ..., n-1\}$ існує послідовність $\Delta_{\alpha_1} \supset \Delta_{\alpha_1\alpha_2} \supset ... \supset \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} \supset ...$ та єдина точка x така, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}.$$

Теорема 2. $\forall x \in E\ \exists \{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{\infty} : x = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)} =: \Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$

Дослідження одного класу випадкових величин

Розглянемо один клас випадкових величин, пов'язаних із даним представленням, а саме: випадкову величину, задану у вигляді

$$\xi = \Delta_{\xi_1\xi_2\dots\xi_k\dots}, \qquad (5)$$

де ξ_k розподілені за правилом

$$\begin{array}{cccccc} \xi_k & 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ p_{ik} & p_{0k} & p_{1k} & p_{2k} & \dots & p_{[n-1]k} \\ \hline \end{array} \qquad (6)$$

Для розподілу випадкової величини ζ: $\zeta = \Delta_{0,\zeta_1\zeta_2\dots\zeta_k\dots}$ (7), де $\Delta_{0,\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k}$ – циліндр Q^* k-го рангу, де ζ_k розподілені за правилом (6), має місце теорема 3*.

Теорема 3*. Розподіл випадкової величини ζ, заданої умовами (6) і (7) є чисто неперервним тоді і тільки тоді, коли $P := \prod\limits_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = 0$ [1].

Теорема 4*. Розподіл випадкової величини ζ, заданої умовами (6) і (7) є чистим і абсолютно неперервним тоді і тільки тоді, коли
$\rho := \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(\sum\limits_{i \in N_k} \sqrt{p_{ik} q_i} \right) > 0$ [2].

Однак, аналог теорем 3*, 4* не можна застосувати до випадкової величини ξ, заданої умовами (5), (6) у загальному випадку.

Основний результат: висновки теорем 3^* і 4^* є справедливими для ξ, заданої умовами (5), (6), якщо у спектрі ξ кожна точка має не більше, ніж зчисленну кількість зображень.

1 S. Albeverio, V. Koshmanenko, G. Torbin, Fine structure of the singular continuous spectrum Methods Funct. Anal. Topology, 9(2003), No. 2, 101-119.

2 M. V. Pratsiovytyi, Fractal approach to investigations of singular distributions, National Pedagogical Univ., Kyiv, 1998.

3 S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. V. Pratsiovytyi, G. Torbin, On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols

Метричний відрізок та деякі пов'язані з ним поняття

Галущак Світлана

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

sv.halushchak@ukr.net

Відрізок, що з'єднує точки A та B, у звичайному розумінні є геометричним місцем точок вигляду $\{\alpha A + (1-\alpha)B : 0 \leq \alpha \leq 1\}$. У даній роботі ми розглядали інше поняття, так званого метричного відрізка.

Добре відомо, що нерівність трикутника виконується в кожному метричному просторі. Множину тих точок простору, які перетворюють нерівність трикутника у рівність, називають метричним відрізком.

Нагадаємо, що простір $\mathbb{R}^2$ є метричним простором з метриками d_1 та d_∞, заданими як $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ і $d_\infty(x,y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ для довільних $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Ми дослідили питання побудови кола, еліпса та гіперболи у метричних просторах $(\mathbb{R}^2, d_1)$ та $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ у сенсі метричного відрізка. Також у доповіді будуть розглянуті деякі питання, що стосуються поняття опуклості.

Наближення ємностей ліпшицевими ємностями

Глушак Інна Дмитрівна
Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника
inna_gl@rambler.ru

Розглядаємо клас ємностей [1] визначених на метричному просторі (X,d) скінченного діаметра, *регулярних щодо метрики* d, тобто таких монотонно неспадних дійснозначних функцій c на сукупності $\operatorname{Exp} X$ всіх замкнених підмножин простору X, що $c(\emptyset)=0$, і $c(\overline{O}_\varepsilon A)\to c(A)$ при $\varepsilon\to+0$ для кожної замкненої $A\subset X$. Вважаючи d фіксованою, у звичайному позначенні цього класу $\overline{M}_d X$ опускаємо d і пишемо $\overline{M}X$.

Відстань $\hat{d}(c_1,c_2)$ між ємностями $c_1,c_2\in\overline{M}X$ є точною нижньою гранню множини всіх таких $\varepsilon\geq 0$, що для кожної $A\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X$ виконано нерівності

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon A)+\varepsilon\geq c_2(A), c_2(\overline{O}_\varepsilon A)+\varepsilon\geq c_1(A)$$

(у такому випадку кажемо, що ємності c_1 та c_2 є *ε-близькими*). Тоді $\hat{d}(c_1,c_2)\leq\varepsilon$, якщо і тільки якщо для всіх $\varepsilon'>\varepsilon$, $A\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X$ виконано

$$c_1(\overline{O}_{\varepsilon'}A)+\varepsilon'\geq c_2(A), c_2(\overline{O}_{\varepsilon'}A)+\varepsilon'\geq c_1(A).$$

Остання точна нижня грань досягається для компактного простору, і, ширше, для кожного (X,d), у якому $d_H(\overline{O}_{\varepsilon'}A,\overline{O}_\varepsilon A)\to 0$ при $\varepsilon'\searrow\varepsilon$ для всіх $A\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X$, $\varepsilon>0$ (зауважимо, що при $\varepsilon=0$ збіжність є автоматичною). У такому просторі $\hat{d}(c_1,c_2)\leq\varepsilon$, якщо і тільки якщо c_1 та c_2 ε-близькі.

Клас ліпшицевих з коефіцієнтом $q>0$ ємностей – це множина

$$\overline{M}_q X=\{c\in\overline{M}X\mid\forall F,G\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X\quad|c(F)-c(G)|\leq q\cdot d_H(F,G)\}.$$

Ліпшицевість сильніша від інших властивостей типу регулярності [3] — регулярності щодо метрики, регулярності щодо топології, ω-гладкості та τ-гладкості.

Теорема 1. $\overline{M}_q X$ – замкнений підпростір простору $\overline{M}X$ з метрикою $\hat{d}$.

Для довільної ємності доведено існування і отримано явний вигляд найближчих до неї ємностей із $\overline{M}_q X$.

Теорема 2. Відстань від ємності $c\in\overline{M}X$ до підпростору $\overline{M}_q X$ рівна точній нижній грані ε_q множини

$$E_q=\{\varepsilon\geq 0\mid c(A)\leq c(\overline{O}_\varepsilon(B))+q\sup_{x\in\overline{O}_\varepsilon(A)}d(x,B)+2\varepsilon:\forall A,B\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X\}$$

а довільна ємність $c_0\in\overline{M}_q X$ є ε-близькою до даної ємності $c\in\overline{M}X$, якщо і тільки якщо $\overset{-q}{c}_\varepsilon\leq c_0\leq\overset{+q}{c}_\varepsilon$, де ємності $\overset{-q}{c}_\varepsilon,\overset{+q}{c}_\varepsilon\in\overline{M}_q X$ визначені формулами

$$\overset{-q}{c}_\varepsilon(F)=\sup_{A\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X}\{\max\{c(A)-\varepsilon-q\sup_{x\in\overline{O}_\varepsilon(A)}d(x,F),0\}\}$$

та

$$\overset{+q}{c}_\varepsilon(F)=\inf_{B\underset{\mathrm{cl}}{\subset}X}\{c(\overline{O}_\varepsilon(B))+\varepsilon+q\sup_{x\in F}d(x,B)\},$$

для $F\neq\emptyset$, і $\overset{-q}{c}_\varepsilon(\emptyset)=\overset{+q}{c}_\varepsilon(\emptyset)=0$.

У випадку коли $\varepsilon_q = \min E_q$, то найближчі до $c \in \overline{M}X$ ємності $c_0 \in \overline{M}_qX$ визначаються нерівністю $\overset{-q}{c}_{\varepsilon_q} \leq c_0 \leq \overset{+q}{c}_{\varepsilon_q}$. Якщо E_q не має найменшого елемента, то для довільного $\varepsilon' > \varepsilon_q = \inf E_q$ існує $\varepsilon'-$близька до c ємність $c' \in \overline{M}_qX$, але ε_q-близької ємності із підпростору $\overline{M}_qX$ може й не існувати. Проте ємність $c_q \in \overline{M}_qX$, для якої $\hat{d}(c, c_q) = \varepsilon_q = \hat{d}(c, \overline{M}_qX)$, існує і визначається нерівністю

$$\overset{-q}{c} \leq c_q \leq \overset{+q}{c},$$

де $\overset{-q}{c} = \sup\limits_{\varepsilon > \varepsilon_q} \overset{-q}{c}_{\varepsilon}$ та $\overset{+q}{c} = \inf\limits_{\varepsilon > \varepsilon_q} \overset{+q}{c}_{\varepsilon}$ є відповідно найменшою і найбільшою з ємностей із класу $\overline{M}_qX$, найближчих до даної ємності c.

1. Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta*, Sb.: Mathematics 2008, **199** (2), 159–184. doi: 10.1070/SM2008v199n02ABEH003914
2. Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Inclusion hyperspaces and capacities on Tyhonoff spaces: functors and monads.* Topology and Its Appl. 2010, **157** (15), 2421–2434. doi: 10.1016/j.topol.2010.07.032
3. Cherkovsky T.M. *Metric spaces of regular capacities.* Carpathian Mathematical Publications 2014, **6** (1), 166–176. doi 10.15330/cmp.6.1.166-176. (in Ukrainian)

Нарізно неперервні і сильно нарізно неперервні функції нескінченної кількості змінних

Олена Карлова

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

maslenizza.ua@gmail.com

Нехай $X = \prod\limits_{t\in T} X_t$ – добуток сім'ї множин X_t, де $|X_t| > 1$ для кожного $t \in T$. Для множини $S \subseteq S_1 \subseteq T$ і точок $a = (a_t)_{t\in T} \in X$ та $x = (x_t)_{t\in S_1} \in \prod\limits_{t\in S_1} X_t$ через a_S^x ми будемо позначати точку $(y_t)_{t\in T} \in X$, таку, що

$$y_t = \begin{cases} x_t, & t \in S, \\ a_t, & t \in T \setminus S. \end{cases}$$

Для кожного $n \in \mathbb{N}$ позначимо

$$\sigma_n(a) = \{(x_t)_{t\in T} \in X : |\{t \in T : x_t \neq a_t\}| \le n\}, \quad \sigma(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_n(a).$$

Якщо $a \in X$, $E \subseteq \sigma(a)$ і $S \subseteq T$, то покладемо

$$X_S = \prod_{t\in S} X_t,\ E_S = \{x \in X_S : a_S^x \in E\}.$$

Означення 1. Множина $A \subseteq X$ називається *$\mathcal{S}$-відкритою*, якщо $\sigma_1(x) \subseteq A$ для всіх $x \in A$.

Означення 2. Нехай $(X_t : t \in T)$ – сім'я топологічних просторів, Y – топологічний простір і нехай $X \subseteq X_T$ – $\mathcal{S}$-відкрита множина. Відображення $f : X \to Y$ називається *нарізно неперервним в точці $a = (a_t)_{t\in T} \in X$ відносно t-ої змінної*, якщо відображення $g : X_t \to Y$, визначене формулою $g(x) = f(a_t^x)$ для всіх $x \in X_t$, неперервне в кожній точці $a_t \in X_t$.

Означення 3. Нехай $\mathcal{T}$ – деяка топологія на $\mathcal{S}$-відкритій множині $X \subseteq \prod\limits_{t\in T} X_t$ і (Y, d) – метричний простір. Функція $f : X \to Y$ називається *сильно нарізно неперервною в точці $a \in X$ відносно t-ої змінної*, якщо

$$\lim_{x\to a} d(f(x), f(x_t^a)) = 0.$$

Функція $f : X \to Y$ є *(сильно) нарізно неперервною в точці $a \in X$*, якщо f (сильно) нарізно неперервна в точці a відносно кожної змінної $t \in T$, і функція f є *(сильно) нарізно неперервною на множині X*, якщо f (сильно) нарізно неперервна в кожній точці $a \in X$ відносно кожної змінної $t \in T$.

Поняття сильно нарізно неперервної дійснозначної функції від n дійсних змінних ввів О. Дзаґнідзе в статті [2] і встановив, що функція f сильно нарізно неперервна на $\mathbb{R}^n$ тоді і тільки тоді, коли f неперервна. Продовжуючи ці дослідження, в [1] і [3] автори розглядали сильно нарізно неперервні функції, визначені на просторі послідовностей ℓ_2, наділеному стандартною топологією, породженою ℓ_2-нормою.

Природно виникло питання про дослідження сильно нарізно неперервних функцій, визначених на просторах послідовностей з іншими топологіями (наприклад, з топологією добутку, топологією прямої границі чи ящиковою топологією).

1. Характеризація майже відкритих множин.

Означення 4. Множина $W \subseteq \sigma(a)$ називається *майже відкритою в* $\sigma(a)$, якщо для довільної скінченної множини $S \subseteq T$ множина W_S відкрита в просторі X_S, наділеному топологією поточкової збіжності.

Теорема 1. Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність локально компактних сепарабельних метричних просторів, $a \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і $W \subseteq \sigma(a)$. Тоді наступні умови рівносильні:

1. W – майже відкрита в $\sigma(a)$;
2. $W = f^{-1}((0,1])$ для деякої сильно нарізно неперервної функції $f : \sigma(a) \to [0,1]$.

2. Точки розриву сильно нарізно неперервних функцій. Символом $C(f)$ $(D(f))$ ми позначаємо множину усіх точок неперервності (розриву) відображення $f : X \to Y$.

Теорема 2. Нехай $X \subseteq \prod\limits_{t \in T} X_t$ – $\mathcal{S}$-відкрита множина, $|T| < \aleph_0$ і Y – метризовний простір. Тоді відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли $f : X \to Y$ сильно нарізно неперервне.

Теорема 3. Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність локально компактних сепарабельних метричних просторів, $a \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і $W \subseteq \sigma(a)$. Тоді W – множина точок розриву деякої сильно нарізно неперервної функції $f : \sigma(a) \to \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли W – майже відкрита в $\sigma(a)$.

Теорема 4. Для довільної непорожньої відкритої множини $G \subseteq \ell_p$ при $1 \le p < \infty$ існує сильно нарізно неперервна функція $f : \ell_p \to \mathbb{R}$, така, що $D(f) = G$.

3. Берівська класифікація. Нехай $B_0(X,Y)$ – сукупність усіх неперервних відображень $f : X \to Y$. Припустимо, що вже визначені класи $B_\xi(X,Y)$ для всіх $0 \le \xi < \alpha$, де $\alpha < \omega_1$. Тоді $f : X \to Y$ належить до *α-го класу Бера*, $f \in B_\alpha(X,Y)$, якщо f є поточковою границею послідовності відображень $f_n \in B_{\xi_n}(X,Y)$, де $\xi_n < \alpha$. Якщо $f \in \bigcup\limits_{0 \le \alpha < \omega_1} B_\alpha(X,Y)$, то кажуть, що відображення f *вимірне за Бером*.

Відображення $f : X \to Y$ належить до *α-го стабільного класу Бера*, $f \in B_\alpha^d(X,Y)$, якщо існує послідовність відображень $f_n \in B_{\alpha_n}(X,Y)$, де $\alpha_n < \alpha$, така, що для кожного $x \in X$ існує таке $N \in \mathbb{N}$, що $f_n(x) = f(x)$ для всіх $n \ge N$.

Теорема 5. Нехай $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність топологічних просторів, $a \in \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ і

$$f : \sigma(a) \to \mathbb{R}.$$

1. Якщо f – сильно нарізно неперервна функція, то $f \in B_1^d(\sigma(a), \mathbb{R})$.
2. Якщо f – нарізно неперервна і X_n – метризовний простір для кожного $n \in \mathbb{N}$, то $f \in B_{\omega_0}(\sigma(a), \mathbb{R})$.

Теорема 6. Існує сильно нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}$, яка не вимірна за Бером.

Теорема 7. Існує нарізно неперервна функція $f : \sigma(0) \to [0,1]$, де $\sigma(0) \in \mathbb{R}^\omega$, така, що $f \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n(\sigma(0), [0,1])$.

Теорема 8. Нехай $\alpha \in [1, \omega_1)$ і $p \in [1, +\infty)$. Тоді існує сильно нарізно неперервна функція $f : \ell_p \to \mathbb{R}$, яка належить до $(\alpha + 1)$-го класу Бера і не належить до α-го класу Бера.

1. Činčura J., Šalát T., Visnyai T. *On separately continuous functions* $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$, Acta Acad. Paedagog. Agriensis, XXXI (2004), 11–18.
2. Dzagnidze O. *Separately continuous function in a new sense are continuous*, Real Anal. Exchange **24** (1998-99), 695–702.
3. Visnyai T. *Strongly separately continuous and separately quasicontinuous functions* $f : \ell^2 \to \mathbb{R}$, Real Anal. Exchange 38:2 (2013), 499–510.
4. Карлова О. *Деякі властивості сильно нарізно неперервних функцій на добутках*, Бук. мат. журнал **2** (2-3) (2014), 119-125.
5. Karlova O. *The Baire classification of strongly separately continuous functions*, Real Anal. Exch., **40** (2) (2015).
6. Карлова О. *Сильно нарізно неперервні функції і одна характеризація відкритих множин в ящиковій топології*, Мат. Студії **43** (1) (2015), 36-42.
7. Karlova O., Mykhaylyuk V. *On strongly separately continuous mappings on products*, Math. Slovaca (accepted)
8. Karlova O., Visnyai T. *On strongly separately continuous functions on sequence spaces*, (submitted to JMAA)

Продовження (обмежених) неперервних функцій з підмножин квадрату прямої Зоргенфрея

Олена Карлова

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника

maslenizza.ua@gmail.com

Підмножина E топологічного простору X називається

- *C-вкладеною (C^*-вкладеною) в X*, якщо довільну неперервну (обмежену) дійснозначну функцію f на E можна продовжити до неперервної функції на X;
- *z-вкладеною в X*, якщо кожну функціонально замкнену в E множину можна продовжити до функціонально замкненої в X множини;
- *добре вкладеною в X*, якщо вона цілком відокремна від довільної функціонально замкненої множини $F \subseteq X$, такої, що $F \cap E = \emptyset$.

Кажуть, що простір X *має властивість* $(C^* = C)$, якщо довільна C^*-вкладена множина $E \subseteq X$ є C-вкладеною.

Класична теорема Тітце-Урисона стверджує, що у випадку, коли простір X нормальний, то кожна замкнена підмножина X є C^*-вкладеною і X має властивість $(C^* = C)$. Більше того, простір X є нормальним тоді і тільки тоді, коли кожна його замкнена підмножина є z-вкладеною [2, Proposition 3.7].

Наступний результат був доведений в [1, Corollary 3.6].

Теорема 1. Підмножина E топологічного простору X є C-вкладеною в X тоді і тільки тоді, коли E – z-вкладена і добре вкладена в X.

Простір X є *δ-нормально відокремним*, якщо кожний його замкнений підпростір добре вкладений в X. Клас δ-нормально відокремних просторів включає в себе всі нормальні простори і всі зліченно компактні простори. З теореми 1 випливає наступний факт.

Наслідок 1. Кожний δ-нормально відокремний простір має властивість $(C^* = C)$.

Добре відомо, що кожний C^*-вкладений підпростір цілком регулярного простору з першою аксіомою зліченності замкнений. Наступне питання є відкритим:

Питання 1 (5). Чи існує цілком регулярний простір з першою аксіомою зліченності без властивості $(C^* = C)$?

Охта [4] встановив, що площина Немицького має властивість $(C^* = C)$ і запитав, чи має цю властивість квадрат прямої Зорґенфрея $\mathbb{S}^2$? Відповідь на це питання наразі не відома. У цьому повідомленні подано деякі властивості C- і C^*-вкладених підпросторів $\mathbb{S}^2$.

Теорема 2. Нехай $E \subseteq \mathbb{S}^2$.

1. Якщо E – C^*-вкладений, то E – $\mathbb{R}^2$-спадково берівський.
2. Якщо E – дискретний C^*-вкладений, то E – зліченна множина типу G_δ в $\mathbb{R}^2$.

Зауважимо, що обернене твердження до другого пункту цієї теореми не вірне.

Теорема 3. Існує $\mathbb{S}^2$-замкнений зліченний дискретний G_δ-підпростір E площини $\mathbb{R}^2$, який не є C^*-вкладеним в $\mathbb{S}^2$.

Множини A і B називаються *цілком відокремними в* X, якщо існує неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, така, що $A \subseteq f^{-1}(0)$ і $B \subseteq f^{-1}(1)$.

Множини A і B з $\mathbb{R}^2$ назвемо

- *цілком відокремними у множині* C, якщо $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap B$ і множини $A \cap C$ і $B \cap C$ цілком відокремні в $\mathbb{S}^2$.
- *десь відокремними в* $\mathbb{S}^2$, якщо існує така $\mathbb{R}^2$-відкрита множина O, що A і B цілком відокремні в O.

Теорема 4. Нехай E – дискретний C^*-вкладений підпростір $\mathbb{S}^2$. Тоді множини E і $(\mathrm{cl}_{\mathbb{R}^2} E) \setminus E$ десь відокремні в $\mathbb{S}^2$.

Через $\mathbb{D}$ ми позначимо *анти-діагональ* $\{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ квадрату прямої Зорґенфрея. Зауважимо, що $\mathbb{D}$ є замкненим дискретним підпростором $\mathbb{S}^2$.

Теорема 5. Для множини $E \subseteq \mathbb{D}$ наступні умови рівносильні:

1. E – C-вкладний в $\mathbb{S}^2$;
2. E – C^*-вкладений в $\mathbb{S}^2$;
3. E – зліченний G_δ-підпростір $\mathbb{R}^2$;
4. E – розріджений підпростір $\mathbb{R}^2$;
5. E – зліченний функціонально замкнений підпростір $\mathbb{S}^2$.

Теорема 6. Квадрат прямої Зорґенфрея не є δ-нормально відокремним простором.

1. Blair R., Hager A. *Extensions of zero-sets and of real-valued functions*, Math. Zeit. **136** (1974), 41–52.
2. Karlova O. *On α-embedded sets and extension of mappings*, Comment. Math. Univ. Carolin., **54** (3) (2013), 377–396.
3. Karlova O. *On C-embedded subspaces of the Sorgenfrey plane*, Appl. Gen. Topol. **16** (1) (2015), 65-74.
4. Ohta H. *Extension properties and the Niemytzki plane*, Appl. Gen. Topol. **1** (1) (2000), 45–60.
5. Ohta H., Yamazaki K. *Extension problems of real-valued continuous functions*, in: "Open problems in topology II", E. Pearl (ed.), Elsevier, 2007, 35–45.

Топологічна еквівалентність усереднень функцій

Марункевич Оксана
Інститут математики НАН України
marunkevych@imath.kiev.ua

Тоді для довільної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та числа $\alpha > 0$ можна визначити *α-усереднення* $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функції f відносно ξ за такою формулою:

$$f_\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x + \alpha t_i) p_i.$$

Зокрема, якщо $\xi = \{(-1, 0.5), (1, 0.5)\}$, то

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{2}\big(f(x-\alpha) + f(x+\alpha)\big).$$

Усереднення даних є одним з важливих інструментів в багатьох галузях науки. Зокрема, усереднення застосовують в комп'ютерній графіці та при оцифровуванні аналогових сигналів. При дослідженні поведінки найпростіших α-усереднень в точках локальних екстремумів для різних класів функцій було помічено, що дуже часто при досить малих α «*форми графіків не змінюються*». Більш строго це означає, що f_α топологічно еквівалентна f для всіх досить малих α.

Означення. *Нагадаємо, що дві неперервні функції $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називаються* ***топологічно еквівалентними****, якщо існують гомеоморфізми $h, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що $f = \phi^{-1} \circ g \circ h$.*

Розглянемо найпростішу ситуацію, коли $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція, що задовольняє такі умови:

(1) існує $\bar{x} \in \mathbb{R}$ таке, що f строго спадає на $(-\infty, \bar{x}]$ і строго зростає на $[\bar{x}, +\infty)$;

(2) $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Для таких функцій зручно позначати $f_L = f|_{(-\infty,\bar{x}]}$ та $f_R = f|_{[\bar{x},+\infty)}$.

Прикладами таких функцій є x^2, $|x|$, $|x - \bar{x}|^s$ для довільних $s > 0$ та $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\cosh(x)$.

Неважко показати, що будь-які дві функції, що задовольняють умови (1) та (2) є топологічно еквівалентними.

Нехай, як і вище, $\xi = \{(t_1, p_1), \dots, (t_n, p_n)\}$ — дискретний ймовірнісний розподіл на $[-1, 1]$. Скажемо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є *топологічно стійкою відносно усереднень* за допомогою ξ, якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що для всіх $\alpha \in (0, \varepsilon)$ функція f_α топологічно еквівалентна f.

Наступні теореми 1 та 2 даються достатні умови для топологічної стійкості неперервних функцій зі скінченим числом точок екстремуму.

Теорема 1. (Локальний варіант) *Нехай $\xi = \{(t_1, p_1), \dots, (t_n, p_n)\}$ — дискретний ймовірнісний розподіл на $[-1, 1]$. Припустимо, що функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє* (1) *та* (2) *для деякого $\bar{x}$, а також одну з таких умов.*

(a) *f є опуклою в деякому околі $\bar{x}$.*

(b) *Існує таке $\varepsilon > 0$, що f належить класу C^1 на $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}) \cup (\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$, причому f_L' зростає на $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x})$, а f_R' спадає на $(\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$.*

(c) *Існує таке* $\varepsilon > 0$, *що* f_L *належить класу* C^1 *на* $(\bar{x} - \varepsilon, \bar{x}]$, f_R *належить класу* C^1 *на* $[\bar{x}, \bar{x} + \varepsilon)$, $t_i \neq 0$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$ *і виконується нерівність*

$$p^- f_L'(\bar{x}) + p^+ f_R'(\bar{x}) \neq 0,$$

де $p^- = \sum\limits_{t_i > 0} p_i$, $p^+ = \sum\limits_{t_i < 0} p_i$

Тоді f *є топологічно стійкою відносно* ξ.

Теорема 2. (Глобальний варіант) *Нехай* $\xi = \{(t_1, p_1), \ldots, (t_n, p_n)\}$ – *дискретний ймовірнісний розподіл на* $[-1, 1]$. *Нехай також* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *неперервна функція, що має скінченну кількість локальних екстремумів* $x_1, \ldots, x_n$ *і для якої виконуються умови:*

1) $f(x_i) \neq f(x_j)$ *для* $i \neq j$;

2) *в кожній точці* $\bar{x} = x_i$ *виконується одна з умов* (a)-(c) *теореми* 1.

Тоді f *є топологічно стійкою відносно усереднень за допомогою* ξ.

Пакети системи комп'ютерної алгебри GAP: огляд та розробка

Раєвська І.Ю., Раєвська М.Ю.

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

raevskaya.irina@gmail.com

Система комп'ютерної алгебри GAP ("Groups, Algorithms and Programming") [1] є вільно розповсюджуваною, відкритою та розширюваною. Вона розповсюджується у відповідності з GNU Public License (див. http://www.gap-system.org/Download/copyright.html).

Розробники програм для GAP можуть оформити свої розробки у вигляді спеціально оформленого пакету та подати його на розгляд у GAP. Після проходження процедури рецензування та схвалення, пакет додається до дистрибутиву GAP і розповсюджується разом з ним.

В доповіді буде зроблено огляд існуючих пакетів GAP та розглянуто приклад розробки пакету.

1. The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.7.8*; 2015, (`http://www.gap-system.org`).

Порядкові оцінки найкращих ортогональних тригонометричних наближень класів згорток в рівномірній метриці

А. С. Сердюк[1]**, Т. А. Степанюк**[2]

[1]Інститут математики НАН України, Київ, Україна

[2]Східноєвропейський нац. університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна

sanatolii@ukr.net[1], *tania_stepaniuk@ukr.net*[2]

Нехай C — простір 2π–періодичних неперервних функцій, у якому норма задана за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$; L_1 — простір 2π–періодичних сумовних на $[0, 2\pi)$ функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_1 := \int\limits_0^{2\pi} |f(t)|dt$. Позначимо через $C^\psi_{\beta,1}$ — клас 2π–періодичних функцій $f(x)$, котрі для всіх $x \in \mathbb{R}$ зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Psi_\beta(x-t)\varphi(t)dt,\ \varphi \perp 1,\ \|\varphi\|_1 \le 1,\ a_0 \in \mathbb{R},$$

де

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

Розглядається задача про знаходження точних порядкових оцінок величин

$$e^\perp_m(C^\psi_{\beta,1})_C = \sup_{f \in C^\psi_{\beta,1}} \inf_{\gamma_m} \|f(x) - \sum_{k \in \gamma_m} \hat{f}(k)e^{ikx}\|_C,$$

де γ_m, $m \in \mathbb{N}$, — довільні набори із m цілих чисел, а $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$, $k \in \mathbb{Z}$, — коефіцієнти Фур'є функції f.

Позначимо через $\mathfrak{M}$ множину неперервних, спадних до нуля, опуклих донизу, додатних функцій $\psi(t)$, $t \ge 1$. Будемо вважати, що послідовність $\psi(k)$, яка задає клас $C^\psi_{\beta,1}$ є слідом на множині натуральних чисел функції $\psi(t)$ з множини $\mathfrak{M}$. Вслід за О.І. Степанцем (див., наприклад, [1, с. 160]) розглянемо наступні підмножини множини $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : \exists K > 0\ \forall t \ge 1\ \ \alpha(\psi; t) \ge K\},$$

$$\mathfrak{M}_C := \{\psi \in \mathfrak{M} : \ \ \exists K_1, K_2 > 0 \quad \forall t \ge 1 \quad K_1 \le \alpha(\psi; t) \le K_2 < \infty\},$$

де $\alpha(\psi; t) := \frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$, $\psi'(t) := \psi'(t+0)$.

Очевидно, що $\mathfrak{M}_C \subset \mathfrak{M}_0$.

Теорема. *Нехай* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty$ *і* $\beta \in \mathbb{R}$. *Тоді, якщо функція* $g(t) = \psi(t)t$ *така, що* $g \in \mathfrak{M}_0$, *то*

$$e^\perp_n(C^\psi_{\beta,1})_C \asymp \begin{cases} \sum\limits_{k=n}^{\infty} \psi(k), & \cos\frac{\beta\pi}{2} \ne 0, \\ \psi(n)n, & \cos\frac{\beta\pi}{2} = 0, \end{cases}$$

якщо ж $g \in \mathfrak{M}_C$, *то*

$$e^\perp_n(C^\psi_{\beta,1})_C \asymp \psi(n)n.$$

1. Степанец А.И. *Методы теории приближений:* В 2 ч. // Праці Інституту математики НАН України. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, **40** (2002), Ч.I. — 427 с.

Групи симетрій несингулярних шарування площини

Ю. Ю. Сорока

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

soroka_yulya@inbox.ru

Несингулярні шарування площини розглядалися в роботах В. Каплана [1,2]. Прикладом такого шарування є лінії рівня функції $f(x;y) = arctg(y - tg^2x)$, що локально гомеоморфні паралельним прямим. Розглянемо детальніше структуру несингулярних шарувань.

Модельною смугою назвемо відкриту підмножину $S \subset \mathbb{R} \times [-1;1]$, яка задовольняє умовам: 1) $\mathbb{R} \times (-1;1) \subset S$ та 2) $S \cap \mathbb{R} \times \{-1,1\}$ є незв'язним об'єднанням інтервалів, замикання яких в $\mathbb{R} \times [-1;1]$ попарно не перетинається і утворюють локально скінченну множину.

Позначимо: $\partial S = S \cap \mathbb{R} \times \{-1;1\}$; $\partial_- S = S \cap \mathbb{R} \times \{-1\}$; $\partial_+ S = S \cap \mathbb{R} \times \{1\}$.

Нехай $\{S_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ - довільна сім'я модельних смуг, $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \partial_- S_\lambda$, $Y = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} \partial_+ S_\lambda$, де Λ -деяка множина індексів. Тобто X, Y є незв'язним об'єднанням відкритих інтервалів $X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, $Y = \bigcup\limits_{\beta\in B} X_\beta$. Склеїмо модельні смуги, ототожнивши деякі з інтервалів X_λ з деякими з інтервалів Y_β. Для цього зафіксуємо яку-небудь множину індексів C і два ін'єктивних відображення $p : C \to A$ та $q : C \to B$. Тепер для кожного $c \in C$ нехай $\varphi_c : \ X_{p(c)} \ \to \ Y_{q(c)}$ єдиний афінний ізоморфізм, що зберігає орієнтацію. Фактор простір $\Sigma = \bigsqcup_\lambda S_\lambda \diagup_{\{\varphi_c\}}$ називатимемо *смугастою поверхнею.*

Кожна модельна смуга має канонічне орієнтоване шарування на горизонтальні дуги $\mathbb{R} \times t$, $t \in (-1;1)$ та компоненти зв'язності ∂S. Так як гомеоморфізми φ_c ототожнюють шари таких шарувань, то кожна смугаста поверхня також несе на собі шарування F, що складається з шарів шарувань на модельних смугах. Це шарування також є орієнтованим, називатимемо його канонічним.

Позначимо через $N(\omega)$ - довільний окіл, який містить шар ω, $\omega \in F$, а через $Sat\,(N(\omega))$ - насичення множини $N(\omega)$, тобто об'єднання всіх шарів шарування F, що перетинають $N(\omega)$. Шар називається *спеціальним*, якщо $\omega \neq \bigcap\limits_{N(\omega)} \overline{Sat\,(N(\omega))}$. Можна показати, що кожен спеціальний шар ω є образом склеєних шарів $X_{p(c)} \sqcup Y_{q(c)}$ для деякого $c \in C$.

Для кожної смугастої поверхні Σ визначимо орієнтований граф $\Gamma(\Sigma)$, ребро якого - це спеціальні шари, а вершини - компоненти доповнення до об'єднання спеціальних шарів. Нехай $\omega = X_{p(c)} \sim Y_{q(c)}$ - спеціальний шар такий, що $X_{p(c)} \subset \partial_- S_{\lambda_0}$, $Y_{q(c)} \subset \partial_+ S_{\lambda_1}$. Нехай також V_i - компонента доповнення до об'єднання спеціальних шарів, що містять S_{λ_i}, $i \ = \ 0, 1$. Тоді ω - це ребра між вершинами V_0 та V_1 в графі $\Gamma(\Sigma)$. Орієнтуємо його від V_1 до V_0. При цьому граф $\Gamma(\Sigma)$ стає орієнтовним. Зауважимо, що граф $\Gamma(\Sigma)$ не є локально скінченний, але може мати скінченний діаметр.

Позначимо через $H^+(F)$ - групу всіх гомеоморфізмів $h : S \to S$ таких, що для довільного шару $\omega \in F$ його образ $h(\omega)$ є також шаром F і при цьому $h : \omega \to h(\omega)$ зберігає орієнтацію.

Нехай також $\pi_0 H^+(F) = H^+(F) \diagup H_0^+(F)$ - група гомеотопій F, де $H_0^+(F)$ - підмножина $H^+(F)$, що складається з гомеоморфізмів, які ізотопні тотожному в $H^+(F)$.

Нехай $\mathfrak{F}$ спеціальний клас смугастих поверхонь для яких:

1) $\partial_- S_\lambda = (-1;1) \times \{-1\}, \forall \lambda \in \Lambda$, тобто в кожну вершину графу Γ входить лише одне ребро;

2) граф Γ зв'язний, має скінченний діаметр і не містить циклів.

Визначимо мінімальний клас груп $\mathcal{Z}$, що задовольняють умовам:
1) $\{1\} \in \mathcal{Z}$;
2) якщо $\{A_i\} \in \mathcal{Z}$, $i \in \mathbb{Z}$, тоді $\prod\limits_{i=-\infty}^{\infty} A_i \in \mathcal{Z}$;
3) якщо $A \in \mathcal{Z}$, тоді вінцевий добуток $A \wr \mathbb{Z} = Map(\mathbb{Z}, A) \rtimes \mathbb{Z} \in \mathcal{Z}$.
Наступна теорема описує структуру груп гомеотопій шарувань класу $\mathfrak{F}$.

Теорема. *Клас $\mathcal{G} = \{\pi_0 H^+(F) |\ F$ канонічне шарування на $S \in \mathfrak{F}\}$ усіх груп гометопій канонічних шарувань смугастих поверхонь з класу $\mathfrak{F}$ співпадає з класом груп $\mathcal{Z}$.*

1. W. Kaplan. Regular curve-families filling the plane I. Duke Math. J., 7, (1940),154–185.
2. W. Kaplan. Regular curve-families filling the plane II. Duke Math. J., 8, (1941), no. 1, 11-46.

Узагальнено опуклі множини і задача про тінь

М. В. Стефанчук
Інститут математики НАН України, Київ, Україна
stefanmv43@gmail.com

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається *m-опуклою відносно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m-вимірна площина L, така, що $x \in L$ і $L \bigcap E = \emptyset$; множина E *m-опукла*, якщо вона m-опукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Частковим випадком належності точки 1-оболонці об'єднання деякого набору куль є задача про тінь, яку розглядав Г. Худайберганов.

Задача (про тінь). *Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільна пряма, яка проходить через центр сфери, перетинала хоча б одну з цих куль?*

По-іншому цю задачу можна сформулювати так: скільки замкнених куль з радіусами, меншими від радіуса сфери, і з центрами на сфері (найменша кількість) забезпечить належність центра сфери 1-оболонці сім'ї куль?

Теорема 1. *Існують дві замкнені (відкриті) кулі з центрами на одиничному колі і з радіусами, меншими від одиниці, які забезпечують належність центра кола 1-оболонці сім'ї куль.*

Теорема 2. *Для того, щоб центр $(n-1)$-сфери в n-вимірному евклідовому просторі при $n > 2$ належав 1-оболонці сім'ї відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не більші (менші) від радіуса сфери, і з центрами на сфері, необхідно і достатньо $(n+1)$-ї кулі.*

Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ називається *m-напівопуклою відносно точки* $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$, якщо знайдеться m-вимірна півплощина P, така що $x \in P$ і $P \bigcap E = \emptyset$. Множина $E \subset \mathbb{R}^n$ *m-напівопукла*, якщо вона m-напівопукла відносно кожної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus E$.

Розглянемо аналог задачі про тінь для напівопуклості. Яка мінімальна кількість попарно неперетинних замкнених (відкритих) куль з центрами на сфері S^{n-1} та радіусами, меншими від радіуса сфери, достатня для того, щоб довільний промінь, який виходить із центра сфери, перетинав хоча б одну з цих куль?

Теорема 3. *Для того, щоб центр кола $\mathrm{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї відкритих (замкнених) кругів з радіусами, які не перевищують (менші) від радіуса кола, і з центрами на цьому колі, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Теорема 4. *Для того, щоб центр двовимірної сфери в трьохвимірному евклідовому просторі належав 1-напівопуклій оболонці сім'ї відкритих (замкнених) куль з радіусами, які не більші (менші) від радіуса сфери, і з центрами на сфері, достатньо десяти куль.*

1. Зелинский Ю. Б., Выговская И. Ю., Стефанчук М. В. Обобщённо выпуклые множества и задача о тени. – arXiv:1501.06747. – 2015.

Про деякі напіводнорідні еліптичні крайові задачі у просторах Хермандера

Чепурухіна І.С.

Інститут математики НАН України, Київ

chepuruhina@mail.ru

Доповідь присвячена застосуванням гільбертових просторів Л. Хермандера до еліптичних задач з додатковими невідомими функціями у крайових умовах. Ці задачі введені Б. Лавруком у 1963 р. Вони виникають при переході від довільної (нерегулярної) еліптичної крайової задачі до формально спряженої задачі.

Нехай Ω є обмежена область в $\mathbb{R}^n$, де $n \geq 2$, з межею Γ класу C^∞. Розглянемо в Ω напіводнорідну еліптичну задачу з $\varkappa \geq 1$ додатковими невідомими функціями у крайових умовах:

$$Au = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad B_j u + \sum_{k=1}^{\varkappa} C_{j,k} v_k = g_j \ \text{ на } \ \Gamma, \quad j = 1, ..., q + \varkappa. \tag{1}$$

Тут $A = A(x, D)$ — правильно еліптичний диференціальний оператор на $\overline{\Omega}$ парного порядку $2q \geq 2$, кожне $B_j = B_j(x, D)$ — граничний диференціальний оператор на Γ порядку $m_j \leq 2q - 1$, а кожне $C_{j,k} = C_{j,k}(x, D_\tau)$ — дотичний диференціальний оператор на Γ порядку $\leq m_j + r_k$. Коефіцієнти цих операторів є нескінченно гладкими комплекснозначними функціями.

Ця задача досліджується у гільбертових просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу $\{H^{s,\varphi} : s \in \mathbb{R}, \varphi \in \mathcal{M}\}$. Тут $\mathcal{M}$ — множина всіх неперервних функцій $\varphi : [1, \infty) \to (0, \infty)$, повільно змінних на нескінченності за Й. Караматою, тобто $\varphi(\lambda t)/\varphi(t) \to 1$ при $t \to \infty$ для кожного $\lambda > 0$. Простір $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ складається з усіх розподілів $w \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ таких, що $\langle\xi\rangle^s \varphi(\langle\xi\rangle)\widehat{w}(\xi) \in L_2(\mathbb{R}^n, d\xi)$. Тут $\langle\xi\rangle := (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, а $\widehat{w}$ — перетворення Фур'є розподілу w. Уточнені соболєвські шкали на Ω і Γ визначаються у стандартний спосіб за просторами $H^{s,\varphi}(\mathbb{R}^n)$. Покладемо $K^\infty_A(\overline{\Omega}) := \{u \in C^\infty(\overline{\Omega}) : Au = 0 \text{ в } \Omega\}$ і розглянемо підпростір $K^{s,\varphi}_A(\Omega) := \{u \in H^{s,\varphi}(\Omega) : Au = 0 \text{ в } \Omega\}$.

Теорема [1]**.** *Для довільних $s \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in \mathcal{M}$ відображення $\Lambda' : (u, v_1, ..., v_\varkappa) \mapsto (g_1, ..., g_{q+\varkappa})$, де $u \in K^\infty_A(\overline{\Omega})$ і $v_1, \ldots, v_\varkappa \in C^\infty(\Gamma)$, що відповідає задачі* (1)*, продовжується єдиним чином (за неперервністю) до обмеженого оператора*

$$\Lambda' : \, K^{s,\varphi}_A(\Omega) \oplus \bigoplus_{k=1}^{\varkappa} H^{s+r_k-1/2,\varphi}(\Gamma) \to \bigoplus_{j=1}^{q+\varkappa} H^{s-m_j-1/2,\varphi}(\Gamma).$$

Цей оператор нетерів. Його ядро та індекс не залежать від s та φ.

У спільних роботах з О. О. Мурачем [2, 3] встановлено версії цієї теореми для неоднорідних еліптичних крайових задач вигляду (1).

1. *Чепурухіна І. С.* Напіводнорідна еліптична задача з додатковими невідомими функціями у крайових умовах // Доповіді НАН України. – 2015. – № 7.
2. *Chepurukhina I. S., Murach A. A.* Elliptic problems in the sense of B. Lawruk on two-sided refined scale of spaces // Methods Funct. Anal. Topology. – 2015. — **21**, no. 1. – P. 6 – 21. (arXiv:1412.0495.)
3. *Murach A. A., Chepurukhina I. S.* Elliptic boundary-value problems in the sense of Lawruk on Sobolev and Hörmander spaces // Укр. мат. журн. — 2015. — **67**, № 5. – С. 672 – 691. (arXiv:1503.05039.)

Підмноговиди локально конформно-келерових многовидів

Е. В. Черевко

ОНЕУ, Одеса, Україна

cherevko@usa.com

Нехай $\{M_n, J, g\}$, – локально конформно-келеровий многовид з формою Лі ω. Розглянемо аналітичне занурення $f : \{N_k, \tilde{g}\} \to \{M_n, J, g\}$, де $\{N_k, \tilde{g}\}$ є підмноговидом розмірності $k = 2l < n$. Це занурення задається аналітичними функціями

$$z^i = f^i(u^a),$$

де u^a та z^i – локальні координати на многовидах $\{N_k, \tilde{g}\}$ та $\{M_n, J, g\}$. Внаслідок аналітичності маємо, що тензор

$$\tilde{J}^a_b = B^a_k J^k_j B^j_b$$

є майже комплексною структурою на $\{N_k, \tilde{g}\}$. Тут $B^j_b = \frac{\partial f^j}{\partial u^b}$, $B^a_k = \tilde{g}^{ac} B^i_c g_{ik}$. Отже, $\{N_k, \tilde{J}^a_b, \tilde{g}\}$ – майже комплексний многовид. Тензор Нейєнхейса многовиду $\{N_k, \tilde{J}^a_b, \tilde{g}\}$ дорівнює нулю:

$$\tilde{N}^a_{bc} = \tilde{J}^t_b(\partial_t \tilde{J}^a_c - \partial_c \tilde{J}^a_t) - \tilde{J}^t_c(\partial_t \tilde{J}^a_b - \partial_b \tilde{J}^a_t) = 0.$$

Таким чином, $\{N_k, \tilde{J}^a_b, \tilde{g}\}$ є ермітовим многовидом. Доведено наступну теорему:

Теорема. *Нехай існує аналітичне занурення аналітичне занурення $f : \{N_k, \tilde{g}\} \to \{M_n, J, g\}$, де $\{M_n, J, g\}$ – локально конформно-келеровий многовид з формою Лі ω. Тоді, $\{N_k, \tilde{J}^a_b, \tilde{g}\}$ має бути також ЛКК многовидом з формою Лі $\tilde{\omega}_a = B^j_a \omega_j$.*

Наслідок. *Якщо векторне поле Лі $\xi = \omega^\#$, визначене на $\{M_n, J, g\}$ є ортогональним до аналітично зануреного многовиду $\{N_k, \tilde{J}^a_b, \tilde{g}\}$, то многовид $\{N_k, \tilde{J}^a_b, \tilde{g}\}$ є келеровим.*

1. Кириченко В. Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* / В. Ф. Кириченко –М.: МПГУ, 2003, 495 с.
2. Yano K. Differential geometry on complex and almost complex spaces / K. Yano–New York: Pergamon Press Book – 1965, 326p.
3. Dragomir S., Ornea L. Locally conformal Kähler geometry / S. Dragomir –Boston; Basel; Berlin: Birkhäuser – 1998, 328p.

Extremal decomposition of the complex plane

Aleksandr Bakhtin, Inna Dvorak, Iryna Denega

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

The report is devoted to investigation of one problem of the geometric function theory of a complex variable.

Let $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ be a set of natural and real numbers, respectively, $\mathbb{C}$ be a complex plane, $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ be a one point compactification and $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

A finite set of arbitrary domains $\{B_k\}_{k=1}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ such, as $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $B_k \cap B_m = \emptyset$, $k \neq m$, $k, m = \overline{1, n}$ is called a system of non-overlapping domains.

Denote for different points a_k, $k = \overline{1, n}$ on the unit circle $\alpha_k := \frac{1}{\pi} \arg \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $\alpha_{n+1} := \alpha_1$, $k = \overline{1, n}$.

Let

$$r(B, a) = \begin{cases} \exp(\lim\limits_{z \to a}(g_B(z, a) + \log|z - a|)), & a \neq \infty \\ \exp(\lim\limits_{z \to a}(g_B(z, a) - \log|z|)), & a = \infty \end{cases}$$

be a inner radius of the domain $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ with respect to the point $a \in B$, $g_B(z, a)$ is Green's function for the domain B. Consider the following problem.

Problem. Show that the maximum of the product

$$J_n(\gamma) = r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k),$$

where B_0, B_1, B_2,...,B_n, $n \geqslant 2$ are pairwise non-overlapping domains in $\overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0$, $|a_k| = 1$, $k = \overline{1, n}$ and $\gamma > 0$, achieved for some configuration of the domains B_k and points a_k, which are having n-fold symmetry.

This Problem was formulated in 1994 [2] and then repeated in 2009 [5]. Currently it is not solved in general, known only partial results. This problem has a solution only if $\gamma \leqslant n$, as soon as $\gamma = n + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ the Problem has no solution.

In 1988 in Dubinin's work [1] this problem was solved for $\gamma = 1$ and $n \geqslant 2$, and from the method of this work it implies that the result is true and for $0 < \gamma < 1$. In 1996 L.V. Kovalev [3] got the solution to this problem with some restrictions on the geometry location of sets of points on the unit circle and, namely, for $n \geqslant 5$ and subclass points systems satisfying condition

$$0 < \alpha_k \leqslant 2/\sqrt{\gamma}, \; k = \overline{1, n}.$$

In 2008 A. K. Bakhtin [4] showed, that the result of V.N. Dubinin holds for arbitrary $\gamma \in \mathbb{R}^+$, but since some number $n_0(\gamma)$. It should be noted in the case $\gamma > 1$ method, developed in the paper of V. N. Dubinin [1], can not be applied. In 2013 Y. V. Zabolotnii [6] got the solution of Problem for $n \geqslant 2$ and $0 < \gamma \leqslant \sqrt[4]{n}$, and for $0 < \gamma \leqslant n^{\alpha}$, where $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$, since some number $n = n(\alpha)$.

We got the following result:

Theorem 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 12$, $\gamma \in (0, \gamma_n]$, $\gamma_n = n^{0{,}45}$. Then for any system of different points, which lie on the unit circle $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$ and any system of non-overlapping domains B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $a_0 = 0 \in B_0$, $(k = \overline{1, n})$, we have inequality*

$$r^{\gamma}(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \left(\frac{4}{n}\right)^n \cdot \frac{\left(\frac{4\gamma}{n^2}\right)^{\frac{\gamma}{n}}}{\left(1 - \frac{\gamma}{n^2}\right)^{n + \frac{\gamma}{n}}} \cdot \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}{1 + \frac{\sqrt{\gamma}}{n}}\right)^{2\sqrt{\gamma}},$$

where equality holds if a_k *and* B_k, $k = \overline{0, n}$, *are, respectively, poles and circular domains of the quadratic differential*

$$Q(w)dw^2 = -\frac{(n^2 - \gamma)w^n + \gamma}{w^2(w^n - 1)^2}\, dw^2.$$

We also obtained another most strong result, but we need next function

$$F_\delta(x) = 2^{x^2+6} \cdot x^{x^2+2-2\delta} \cdot (2-x)^{-\frac{1}{2}(2-x)^2}(2+x)^{-\frac{1}{2}(2+x)^2},$$

$$x \in (0, 2], \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 0,7.$$

The next result holds:

Theorem 2. *Let* $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 5$, $\gamma \in (0, \gamma_0]$, $\gamma_0 = 1,75$, $0 \leqslant \delta \leqslant 0,7$. *Then for any system of different points* $A_n = \{a_k\}_{k=1}^n$, *which lie on the unit circle and any system of non-overlapping domains* B_k, $a_k \in B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, $k = \overline{0, n}$, $a_0 = 0$, *we have inequality*

$$r^\gamma(B_0, 0) \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leqslant \gamma^{-\frac{\delta \cdot n}{2}} \cdot \left(\prod_{k=1}^{n} \alpha_k\right)^\delta \cdot \left[F_\delta\left(\frac{2}{n}\sqrt{\gamma}\right)\right]^{\frac{n}{2}},$$

where equality holds in the same case as in Theorem 1.

1. V.N. Dubinin. *Separating transformation of domains and problems on extremal decomposition.* Notes scientific. sem. Leningr. Dep. of Math. Inst. AN USSR. **168**, 48–66 (1988) (Russian); translation in J. Soviet Math. 53, no.3, 252–263 (1991).

2. V.N. Dubinin. *Symmetrization method in geometric function theory of complex variables.* Successes Mat. Science. **49**, no.1 (295), 3–76 (1994) (Russian); translation in Russian Math. Surveys 49, no.1, 1–79 (1994).

3. L.V. Kovalev. *To the problem of extremal decomposition with free poles on the circle.* Far Eastern Math. collection. **2**, 96–98 (1996). (Russian)

4. A.K. Bakhtin, G.P. Bakhtina, Yu.B. Zelinskii. *Topological-algebraic structures and geometric methods in complex analysis.* Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. 308 (2008). (Russian)

5. V.N. Dubinin. *Capasities of condensers and symmetrization in geometric function theory of complex variables.* Vladivostok: Dal'nayka. 390 (2009). (Russian)

6. Y.V. Zabolotnii. *The problem of calculating the maximum of product of inner radii of non-overlapping domains in the complex plane.* Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. V.10, no.4-5, 557–564 (2013). (Ukrainian)

H-closed quasitopological groups

Serhii Bardyla[1], **Oleg Gutik**[1] **and Alex Ravsky**[2]

[1]Ivan Franko National University of Lviv, Lviv, Ukraine,

[2]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, Ukraine

sbardyla@yahoo.com, ovgutik@yahoo.com, oravsky@mail.ru

We shall follow the terminology of [2,4].

An *H-closed quasitopological group* (in the class of quasitopological groups) is a Hausdorff quasitopological group which is contained in each Hausdorff quasitopological group as a closed subspace. We obtained a sufficient condition for a quasitopological group to be H-closed, which allowed us to solve a problem by Arhangel'skii and Choban from [1]:

Theorem 1. *A topological group G is H-closed in the class of quasitopological groups if and only if G is Raĭkov complete.*

We shall call a quasitopological group G *Cauchy completty* if each Cauchy filter $\mathcal{F}$ on G with an base consisting of its open subsets, has a limit point. A filter $\mathcal{F}$ on a quasitopological group G we shall call *Cauchy filter*, provided for each neighborhood U of the unit e of the group G there exists a member $F \in \mathcal{F}$ such that $yU \cap Uy \in \mathcal{F}$ for each point $y \in F$ [3].

Theorem 2. *Let (G, τ) be a Cauchy completty quasitopological group, (G, σ) be a quasitopological group, $\sigma \supset \tau$, and the space (G, σ) has a π-base, consisting of open subsets of the space (G, τ). Then (G, σ) is a Cauchy completty quasitopological group.*

Also we present examples of non-compact quasitopological groups which are H-closed topological spaces.

1. A. Arhangel'skii and M. Choban, Semitopological groups and the theorems of Montgomery and Ellis, Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. **62**:8 (2009), 917–922.
2. A. Arhangel'skii and M. Tkachenko, Topological Groups and Related Structures, Atlantis Press, 2008.
3. B. Batíková, Completion of quasi-topological groups, Topology Appl. **156** (2009), 2123–2128.
4. R. Engelking, General Topology, 2nd ed., Heldermann, Berlin, 1989.

Combinatorian actions on CW complexes

Bohdan Feshchenko
Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine
fb@imath.kiev.ua

We will use the following notation: D^k is a k-disk, S^k is a k-sphere, ∂D^k is the boundary of D^k, which is a $(k-1)$-sphere, and for a set A denote by $\overline{A}$ the closure of A.

Let K be a Hausdorff topological space such that $K = \bigcup_i K^i$, where K^0 is a disjoint union of points and K^{i+1} obtained by attaching to K^i a disjoint union of $(i+1)$-disks $\bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} D^{i+1}_\alpha$, $i \geq 0$ via a continuous map $\phi^i : \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} \partial D^{i+1}_\alpha \to K^i$. The restriction $\phi^i|_{\partial D^{i+1}_\alpha}$ is denoted by ϕ^i_α. The map $\Phi^i_\alpha : D^{i+1}_\alpha \to K^{i+1}$ such that $\Phi^i_\alpha|_{\partial D^{i+1}_\alpha} = \phi^i_\alpha$ is called a *characteristic map* and the image of Φ^i_α is called *i-cell* of K. The subspace $K^i = \bigcup_{j\leq i} e^j_{\alpha_j}$ of K is called *i-skeleton* of K.

Let $\Theta^i = K^i \setminus K^{i-1}$ be a set of i-dimensional cells of K, $1 \leq i \leq n$, and for $i = 0$ we put $\Theta^0 = K^0$. The set $\Theta = \bigcup_i \Theta^i$ is said to be a *cellular partition* of K.

Definition 1.([1]) *A CW complex K is said to be regular if all its attaching maps ϕ^j_α : $\partial e^{j+1}_\alpha \to K^j$ are embeddings.*

Examples of regular complexes are polyhedrons, graphs without loops. Also note that if K is a regular CW n-complex, $n \geq 1$ then $\mathrm{card}(K^0) \geq 2$. The following result gives a description of the structure of regular CW complexes.

Theorem 1([1], Chapter 5) *Let K be a regular CW complex, and $\phi : \partial D^{i+1} \cong S^i \to K^i$ be a attaching map of some cell $e \in \Theta^i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Then $\phi(S^i)$ is a subpartition of K^i, i.e. $\phi^i(S^i)$ is a union of cells of K^i.*

Suppose G is a group and X is a topological space. A *(right) group action ψ of G on X* is a continuous map $\phi : X \times G \to X$ such that $\phi(x, gh) = \phi(x \cdot g, h)$ for all $g, h \in G$ and $\phi(x, 1) = x$, where 1 is the unit element of G, $x \in X$.

Let K be a CW complex, $\mathcal{H}(K)$ be a group of homeomorphisms of K. Denote by $\mathcal{H}_{CW}(K)$ the subgroup of $\mathcal{H}(K)$ which preserves cellular structure, i.e. $\mathcal{H}_{CW}(K) = \{h \in \mathcal{H}(K) \,|\, h(\Theta^i) = \Theta^i,\ i = 0, 1, \dots n\}$. Such homeomorphisms $h \in \mathcal{H}_{CW}(K)$ are said to be *cellular*. Endow $\mathcal{H}(K)$with the compact-open topology, i.e a topology with following base

$$W_{U,V} = \{f \in C(K,K) \,|\, f(U) \subset V\}, \quad U \text{ is compact }, \quad V \text{ is open}$$

This topology induces the topology on $\mathcal{H}_{CW}(K)$.

Evidently, every cellular G-action on K satisfies two following conditions: for each $g \in G$

(C1) $g(\Theta^i) = \Theta^i$,

(C2) for cells e, e' such that $e' \subset \overline{e}$ we have $g(e') \subset \overline{g(e)}$, $g \in G$.

So, G induces the action on Θ. Then conditions (C1) and (C2) can be taken as the definition.

Definition 2. *The action of a group G on Θ is said to be a* combinatorial G-action on K *if it satisfies* (C1) *and* (C2). Obviously, each cellular action induces a combinatorial action. The following theorem shows that for regular complex a combinatorial action is induced by some cellular action.

Theorem 2. *Suppose K is a regular complex. Then every combinatorial G-action on K is induced by some cellular G-action.*

1. W. S. Massey, *Homology and Cohomology Theory: An Approach Based on Alexander-Spanier Cochains*, Marcel Dekkon Inc. New York, 1978.

On Möbius equivalence of rational differential forms

N. Konovenko, V. Lychagin
Department of Mathematics, ONAFT, Odessa, Ukraine
Department of Mathematics, University of Tromsø, Norway
konovenko@ukr.net,valentin.lychagin@uit.no

Let $\mathbb{C}\mathbf{P}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$ be the Riemann sphere, equipped with the natural action of the Möbius group $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C})$. We say that two differential forms ω_i with rational coefficients on $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ are Möbius equivalent if there is a Möbius transformation $A : \mathbb{C}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ such that $A^*(\omega_1) = \omega_2$ ([1]).

Let $\tau^* : \mathbf{T}^*_{1,0}\mathbb{C}\mathbf{P}^1 \to \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ be the cotangent bundle, then differential forms with rational coefficients are exactly rational sections of the bundle.

Denote by $\mathbf{J}^k(\tau^*)$ the bundles of k-jets of holomorphic sections of τ^* and by $\pi_{k,l} : \mathbf{J}^k(\tau^*) \to \mathbf{J}^l(\tau^*)$, $k > l$, the natural projections. Functions on $\mathbf{J}^k(\tau^*)$ rational along fibres $\pi_{k,0}$ and invariant with respect to the Möbius group $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C})$ we call Möbius differential invariants of order $\leq k$.

Theorem. *The field of Möbius differential invariants is generated by basic differential invariant*

$$I_2 = \left(u_2 - \frac{u_1^2}{2}\right)\ e^{-2u}$$

and invariant derivation

$$\nabla = e^{-u}\ \frac{d}{dz}.$$

Remark.

- *In this theorem $z, u, u_1, \ldots, u_k$ are canonical coordinates in $\mathbf{J}^k(\tau^*)$.*
- *Due to Lie-Tresse theorem,* [2], *the field of Möbius differential invariants separates regular orbits.*

Let

$$I_3 = \nabla(I_2) = \left(u_3 - 3u_1u_2 + u_1^3\right)\ e^{-3u},$$
$$I_4 = \nabla(I_3) = \left(u_4 - 6u_1u_3 + 12u_1^2u_2 - 3u_2^2 - 3u_1^4\right)\ e^{-4u}$$

be the correspondent invariants of order 3 and 4.

Then values of differential invariants $\frac{I_4}{I_2^2}$ and $\frac{I_3^2}{I_2^3}$ on a differential 1-form ω with rational coefficients are rational functions on $\mathbb{C}\mathbf{P}^1$ and therefore satisfied an algebraic equation

$$P_\omega\left(\frac{I_4}{I_2^2}, \frac{I_3^2}{I_2^3}\right) = 0,$$

for some irreducible polynomial $P \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Theorem

- *If two differential 1-forms ω_i with rational coefficients are Möbius equivalent then polynomials P_{ω_1} and P_{ω_2} are proportional.*

- *If for regular differential* 1*-forms* ω_i *polynomials* P_{ω_1} *and* P_{ω_2} *are proportional then* ω_1 *Möbius equivalent to* $\omega_2 + c\ dz$*, with* $c \in \mathbb{C}$*.*

1. Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова думка"НАН України, (2013), 192 с.

2. B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., arXiv:1111.5480

Minimal generating systems and properties of $Syl_2 A_{2^k}$ and $Syl_2 A_n$

Ruslan Skuratovskii
PL of National Technical University "KPI" of Kyiv, Ukraine
ruslcomp@mail.ru

The aim of this paper is to investigate the structure of Sylow 2-subgroups and to construct a minimal generating system for such subgroups. The case of Sylow subgroup where $p = 2$ is very special because it admits odd permutations, this case was not investigated in [1,2]. There was a mistake in a statement about irreducibility that system of $k+1$ elements for $Syl_2(A_{2^k})$ which was in abstract [3] in 2015 year. All undeclared terms are from [4]. A minimal system of generators for a Sylow subgroup of A_n was found.

Let's denote by T_{k+1} a regular binary tree labeled by vertex. If the state in the vertex is non-trivial, then its label is 1, in other case it is 0. We denote by $v_{j,i}$ the vertex of L_j, which has the number i. An automorphism of T_{k+1} with non-trivial state in

$$v_{1,i_1}, \dots, v_{1,i_j}, v_{2,j_2}, \dots, v_{k,k_m}$$

is denoted by $\beta_{l_1,(i_1,\dots,i_J);l_1(i_1,\dots,i_J);\dots;l_{k-1}(i_1,\dots,i_J)}$ where the index l_i is the number of level with non-trivial state. In parentheses after this numbers we denote a cortege of vertices of this level, where the non-trivial states in this automorphism are present. Denote by τ the automorphism, which has a non-trivial vertex permutation only in the first and the last vertices $v_{k,1}$ and $v_{k,2^k}$ of the last level L_k.

Theorem 1. Every state from L_l, $l < k$ determinate a even permutation at vertexes of L_{k+1}.

Vertex permutations from T_{k-1} form a group: $B_{k-1} = \underbrace{C_2 \wr \dots \wr C_2}_{k-1}$ which acts at L_{k+1} by even permutations, because Lemma 1. Order of B_{k-1} equal to $2^{2^{k-1}-1}$.

On L_{k-1} we have 2^{k-1} vertexes where can be group $V_{k-1} \simeq C_2 \times C_2 \times \dots \times C_2 \simeq (C_2)^{k-1}$ but as a result of the fact that L_{k-1} contain only even permutations there only half of all permutations from V_{k-1}. So it's subgroup of V_{k-1}: $W_{k-1} \simeq C_2^{2^{k-1}} /_{C_2}$. So we can state:

Proposition 1. Order of W_{k-1} or number of pairs of transpositions on L_{k-1} is equal to $2^{2^{k-1}-1}$, $k \geq 2$.

Theorem 2. Orders of groups $\langle \alpha_{0,(1)}, \alpha_{1,(1)}, \alpha_{2,(1)}, \alpha_{k-2,(1)}, \tau \rangle$ and $Syl_2(A_{2^k})$ are equal to 2^{2^k-2}.

In accordance with formula of Legendre power of 2 in $2^k!$:

$$\left[\frac{2^k}{2}\right] + \left[\frac{2^k}{2^2}\right] + \left[\frac{2^k}{2^3}\right] + \dots + \left[\frac{2^k}{2^k}\right] = \frac{2^k - 1}{2 - 1}.$$

We need to subtract 1 from it because we have only $\frac{n!}{2}$ of all permutations as a result:

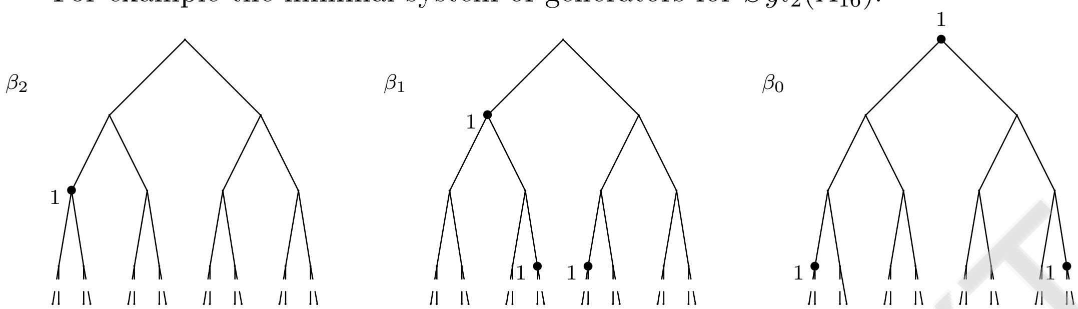
$$\frac{2^k - 1}{2 - 1} - 1 = 2^k - 2.$$

So $|Syl(A_{2^k})| = 2^{2^k-2}$. The same order has group $G_k = B_{k-1} \ltimes W_{k-1}$: $|G_k| = |B_{k-1}| \cdot |W_{k-1}|$.

Theorem 3. The set $S_\alpha = \{\alpha_{0,(1)}, \alpha_{1,(1)}, \alpha_{2,(1)}, \dots, \alpha_{k-2,(1)}, \tau\}$, of elements from subgroup of $AutT_k$ generates for a group G_k which is isomorphic to $Syl_2(A_{2^k})$.

Theorem 1. The set $S_\beta = \{\beta_{0,(1);k,(1,2^k)}, \beta_{1,(1);k,(2^{k-1},2^{k-1}+1)}, \beta_{2,(1)}, \beta_{k-2,(1)}\}$ of elements from subgroup of $AutT_k$ is minimal generators for a group isomorphic to Sylow 2-subgroup of A_{2^k}.

For example the minimal system of generators for $Syl_2(A_{16})$:



Let's deduce S_α from S_β for G_4. Note that $\beta_0^2 = \tau_{23}$ and $\tau_{23}\beta_1 = \alpha_1$. Moreover $\beta_1 = \alpha_1\tau_{23}$ this implies $\alpha_1 = \tau_{23}^{-1}\beta_1$. So it follows that $\alpha_0 = \tau_{14}\beta_0$.

It was proved that the structure of Sylow 2-subgroup of A_{2^k} is the following:

$$\wr_{i=1}^{k-1} C_2 \ltimes \prod_{i=1}^{2^{k-1}-1} C_2,$$

where we take C_2 as group of action on two elements and the action is faithful.

Number of such minimal systems of generators for G_k:

$$C^1_{2^{k-1}} C^1_{2^{k-1}-1} + C^1_{2^{k-2}} C^1_{2^{k-2}-1} + \dots + C^1_2 C^1_{2-1}.$$

1. U. Dmitruk, V. Suschansky, Structure of 2-Sylow subgroup of symmetric and alternating group. Ukr. Mat. Journ. **3** (1981) 304–312.
2. R. Skuratovskii, Generators and relations for Sylow p-subgroup of group S_n. Naukovi Visti KPI. **4** (2013) 94–105.
3. V. Ivanchenko, System of generators for 2-Sylow subgroup alternating group, Fourth Ukraine Conference of Young Scientists. Kiev: *KPI* (2015) 60 p.
4. P. Grigorchuk, P. Nekrashevich, P. Sushchanskii, Automata, Dynamical Systems, and Groups, Trudy mat. inst. Steklova. no. 231. (2000) 134–214.

X Літня школа

“Алгебра, Топологія, Аналіз”

3 – 15 серпня 2015 року

Одеса, Україна

Тези доповідей

Комп’ютерна верстка та підготовка оригінал-макета
С. І. Максименко, Б. Г. Фещенко

Підп. до друку 23.07.2015. Формат 60x90/16. Папір офс. Офс. друк. Обл. вид. арк. 21.5. Ум. друк. арк. 30.1. Зам. 50. Тираж 300 пр.

Ін-т математики НАН України
01601 Київ-4, МСП, вул. Терещенківська, 3