Інститут математики НАН України

X Літня школа
"Алгебра, Топологія, Аналіз"

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

3-15 серпня 2015
Одеса, Україна

Київ • 2015

X Літня школа "Алгебра, Топологія, Аналіз", 3 15 серпня 2015 р., Одеса, Україна: Тези доповідей. Київ: Інститут математики НАН України, 2015. 72 с.

Організатори Літньої школи

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса

Інститут математики НАН України, Київ

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

Львівський національний університет ім. Івана Франка, Львів

Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника, Івано-Франківськ

Інститут прикладних проблем механіки і математики, імені Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Благодійний фонд "Наука", Одеса

On Möbius equivalence of rational differential forms

N. Konovenko, V. Lychagin
Department of Mathematics, ONAFT, Odessa, Ukraine
Department of Mathematics, University of Tromsø, Norway
konovenko@ukr.net, valentin.lychagin@uit.no

Let $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \infty$ be the Riemann sphere, equipped with the natural action of the Möbius group $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C})$. We say that two differential forms ω_i with rational coefficients on $\mathbb{CP}^1$ are Möbius equivalent if there is a Möbius transformation $A : \mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ such that $A^*(\omega_1) = \omega_2$ ([1]).

Let $\tau^* : \mathbf{T}^*_{1,0}\mathbb{CP}^1 \to \mathbb{CP}^1$ be the cotangent bundle, then differential forms with rational coefficients are exactly rational sections of the bundle.

Denote by $\mathbf{J}^k(\tau^*)$ the bundles of k-jets of holomorphic sections of τ^* and by $\pi_{k,l} : \mathbf{J}^k(\tau^*) \to \mathbf{J}^l(\tau^*)$, $k > l$, the natural projections. Functions on $\mathbf{J}^k(\tau^*)$ rational along fibres $\pi_{k,0}$ and invariant with respect to the Möbius group $\mathbf{PSL}_2(\mathbb{C})$ we call Möbius differential invariants of order $\leq k$.

Theorem. *The field of Möbius differential invariants is generated by basic differential invariant*

$$I_2 = \left(u_2 - \frac{u_1^2}{2}\right) e^{-2u}$$

and invariant derivation

$$\nabla = e^{-u} \frac{d}{dz}.$$

Remark.

- *In this theorem $z, u, u_1, \ldots, u_k$ are canonical coordinates in $\mathbf{J}^k(\tau^*)$.*
- *Due to Lie-Tresse theorem, [2], the field of Möbius differential invariants separates regular orbits.*

Let

$$I_3 = \nabla(I_2) = \left(u_3 - 3u_1u_2 + u_1^3\right) e^{-3u},$$
$$I_4 = \nabla(I_3) = \left(u_4 - 6u_1u_3 + 12u_1^2u_2 - 3u_2^2 - 3u_1^4\right) e^{-4u}$$

be the correspondent invariants of order 3 and 4.

Then values of differential invariants $\frac{I_4}{I_2^2}$ and $\frac{I_3^2}{I_2^3}$ on a differential 1-form ω with rational coefficients are rational functions on $\mathbb{CP}^1$ and therefore satisfied an algebraic equation

$$P_\omega\left(\frac{I_4}{I_2^2}, \frac{I_3^2}{I_2^3}\right) = 0,$$

for some irreducible polynomial $P \in \mathbb{C}[X, Y]$.

Theorem

- *If two differential 1-forms ω_i with rational coefficients are Möbius equivalent then polynomials P_{ω_1} and P_{ω_2} are proportional.*

- *If for regular differential* 1*-forms* ω_i *polynomials* P_{ω_1} *and* P_{ω_2} *are proportional then* ω_1 *Möbius equivalent to* $\omega_2 + c\ dz$, *with* $c \in \mathbb{C}$.

1. Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова думка"НАН України, (2013), 192 с.

2. B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., arXiv:1111.5480