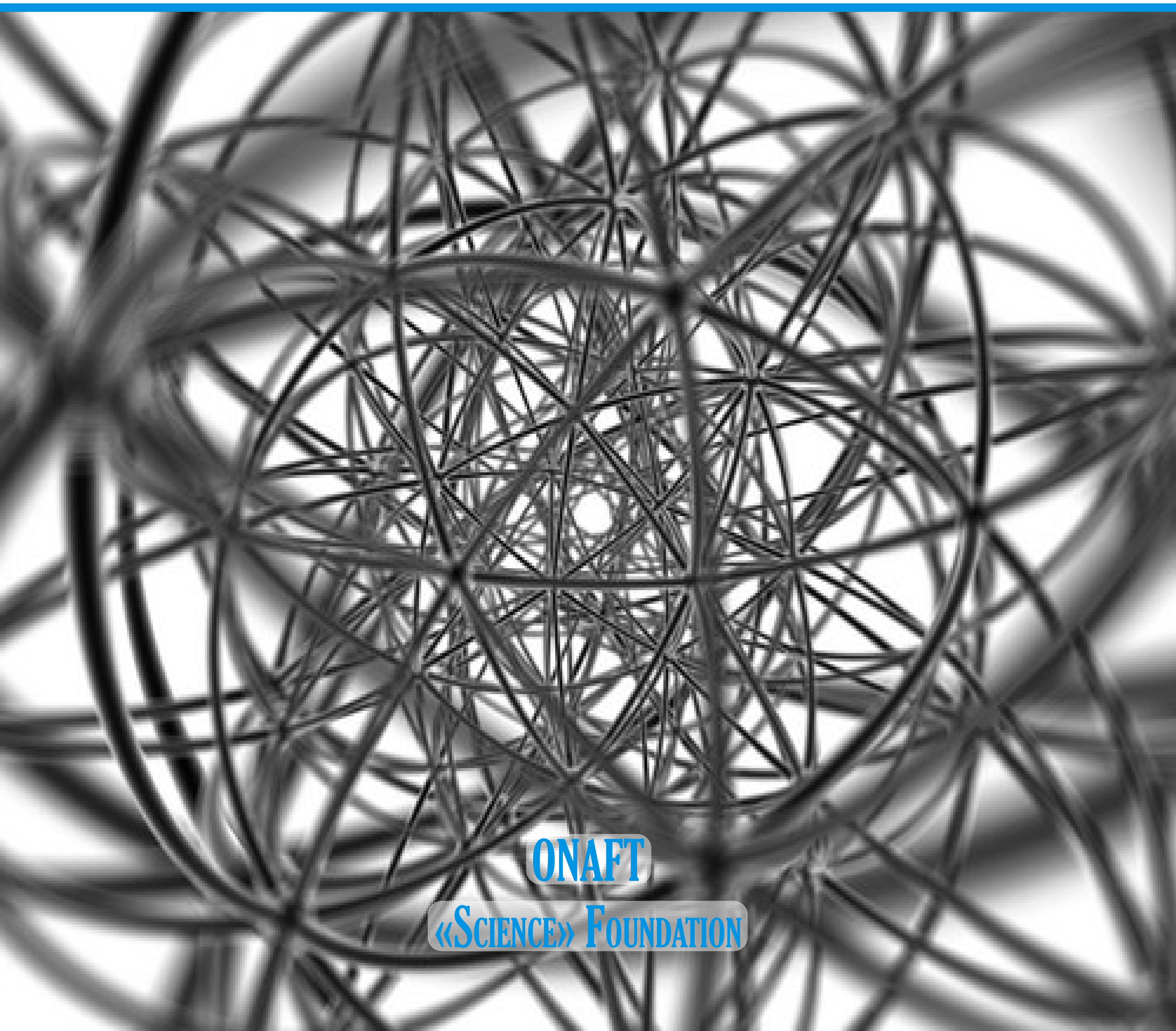
www.geometry-center.com

ABSTRACTS OF INTERNATIONAL CONFERENCE «GEOMETRY AND TOPOLOGY IN ODESSA - 2016»



Міністерство освіти і науки України
Одеська національна академія харчових технологій
Інститут математики НАН України
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский государственный педагогический университет
Тверской государственный университет
Одеський національный університет ім. І. І. Мечникова
Одеський державний екологічний університет
Міжнародний геометричний центр (Одеса)
Фонд "Наука"(Одеса)

Abstracts of the International Conference
«Geometry and topology in Odessa - 2016»
2 – 8 June, 2016

Тези доповідей міжнародної конференції
«Геометрія і топологія в Одесі-2016»
2 - 8 червня 2016р.

Тезисы докладов международной конференции
«Геометрия и топология в Одессе – 2016»
2 - 8 июня 2016 г.

ОДЕСА - 2016

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Abstracts of the International Conference
«Geometry and topology in Odessa - 2016»

Abstracts contain the results of researching of participants of the International Conference on geometry, topology and applications. The publication is addressed to researchers, lectures, post-graduate students.

ISBN 978-966-389-171-2

International Scientific Committee:
Prishlyak A. (Ukraine), Shelekhov A. (Russia) — Chairmans, Balan V. (Romania), Banah T. (Ukraine), Gandel Yu. (Ukraine), Glushkov A. (Ukraine), Haddad M. (Syria), Zarichnyi M. (Ukraine), Kirichenko V. (Russia), Kirillov V. (Ukraine), Kiosak V. (Ukraine), Konovenko N. (Ukraine), Kuzakon V. (Ukraine), Maksimenko S. (Ukraine), Marchenko V. (Ukraine), Matsumoto K. (Japan), Mashkov O. (Ukraine), Mikityuk I. (Ukraine), Milka A. (Ukraine),Mikes J. (Czech Republic), Mormul P. (Poland), Panzhenskiy V. (Russia), Pastur L. (Ukraine), Pokas' S. (Ukraine), Rahula M. (Estonia), Sabitov I. (Russia), Savchenko A. (Ukraine), Strikha M. (Ukraine), Fedchenko Yu. (Ukraine), Fomenko A. (Russia), Fomenko V. (Russia), Khruslov E. (Ukraine), Shurygin V. (Russia).

Organizing-Administrative Committee:
Egorov B. - chairman, rector ONAFT,
Mardar M. - deputy chairman, vice-rector of scientific-pedagogical and international communications ONAFT
Povarova N. - deputy chairman, vice-rector of scientific work ONAFT
Fedosov S. - head of the international department ONAFT,
Volkov V. - Director P.M. Platonova ESIMACS,
Sergeeva A. - head of the chair of physics.

Organizing Committe:
Kuzakon V. - Chairman of the Organizing Committee, President of the Charity Fund «Science» (kuzakon_v@ukr.net);
Konovenko N. - Chairman of the Organizing Committee (konovenko@ukr.net);
Fedchenko Yu. - deputy chairman (fedchenko_julia@ukr.net);
Moiseenok A. - WEB-administrator (geom-odessa@ukr.net);
Afonina N., Bashkaryov P., Chepurnaya E., Cherevko E., Gladish B., Khudenko N., Kuzakon G., Kurbatova I., Malina A., Melnik L., Nosenko L., Nuzhnaya N., Osadchuk E., Prokip V., Vityuk A., Zadorozhnyi V.,

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тези доповідей міжнародної конференції
«Геометрія і топологія в Одесі-2016»

Тези містять результати досліджень учасників Міжнародної конференції в галузі геометрії, топології та застосувань. Видання спрямоване на наукових співробітників, викладачів, аспірантів, студентів.

ISBN 978-966-389-171-2

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тезисы докладов международной конференции
«Геометрия и топология в Одессе – 2016»

Тезисы содержат результаты исследований участников Международной конференции в области геометрии, топологии и приложений. Издание адресовано научным работникам, преподавателям, аспирантам, студентам.

ISBN 978-966-389-171-2

Международный научный комитет:
Пришляк А. (Украина), Шелехов А. (Россия) — сопредседатели, Балан В. (Румыния), Банах Т. (Украина), Гандель Ю. (Украина), Глушков А. (Украина), Заричный М. (Украина), Кириченко В. (Россия), Кириллов В. (Украина), Киосак В. (Украина), Коновенко Н. (Украина), Кузаконь В. (Украина), Максименко С. (Украина), Марченко В. (Украина), Матсумото К. (Япония), Машков О. (Украина), Микитюк И. (Украина),Милка А. (Украина), Микеш Й. (Чехия), Мормул П. (Польша), Паньженский В. (Россия), Пастур Л. (Украина), Покась С. (Украина), Рахула М. (Эстония), Сабитов И. (Россия), Савченко А. (Украина), Стриха М. (Украина), Федченко Ю. (Украина), Фоменко А. (Россия), Фоменко В. (Россия), Хаддад М. (Сирия), Хруслов Е. (Украина), Шурыгин В. (Россия).

Организационно-административный комитет:
Егоров Б. - председатель оргкомитета, ректор ОНАПТ,
Мардар М. - зам. председателя, проректор по научно-педагогической работе и международным связям ОНАПТ,
Поварова Н. - зам. председателя, проректор по научной работе ОНАПТ,
Федосов С. - начальник отдела международных связей ОНАПТ,
Волков В. - директор УНИМАиКС им. П.М. Платонова,
Сергеева А. - заведующая кафедрой физики и материаловедения.

Организационный комитет:
Кузаконь В. - председатель оргкомитета, президент БФ "Наука" (kuzakon_v@ukr.net);
Коновенко Н. - председатель оргкомитета (konovenko@ukr.net) ;
Федченко Ю. - заместитель председателя оргкомитета (fedchenko_julia@ukr.net) ;
Мойсеенок А. - WEB-администратор (geom-odessa@ukr.net);
Афонина Н., Башкарев П., Витюк А., Гладиш Б, Задорожный В., Кузаконь Г., Курбатова И., Малина А., Мельник Л., Носенко Л., Нужная Н., Осадчук Е., Прокип В., Худенко Н., Чепурная Е., Черевко Е.

ISBN 978-966-389-171-2

Майстер математичної освіти: Кузаконь Віктор Михайлович

16 березня 2016 року на 68 році життя зупинилося серце відомої в світі людини, видатного математика, гарного організатора та чудового керівника, завідувача кафедри вищої математики ОНАХТ, директора благодійного фонда наукових досліджень «Наука», відповідального редактора наукового журналу «Праці міжнародного геометричного центру», голови оргкомітету міжнародної конференції «Геометрія в Одесі» Кузаконя Віктора Михайловича.

В нашій академії мало хто не знав чи не чув про енергійного, веселого і талановитого математика та мало хто знає про життєвий шлях Віктора Михайловича, який не завжди був легким і простим, шлях від інженера до почесного доцента академії, "Заслуженого працівника освіти України".

Віктор Михайлович Кузаконь народився 31 серпня 1947 року в м. Кандалакша Мурманської області в родині військовослужбовця. У 1970 закінчив механіко - математичний факультет Одеського державного університету ім. І. І. Мечникова за фахом "Математика". З 1970 по 1972 роки проходив військову службу в лавах радянської армії, потім працював інженером і старшим інженером науково - дослідного відділу Одеського вищого інженерно - морського училища.

У 1972 році перейшов на роботу асистентом кафедри вищої математики Одеського технологічного інституту ім. М.В.Ломоносова, де і пропрацював до кінця своїх днів. Багато зусиль віддавав викладацькій роботі. Написано і опубліковано ряд навчальних посібників, збірник задач, методичні вказівки тощо. За відгуками студентів його лекції надовго запам'яталися своєю простотою і доступністю. Завжди знаходив час для допомоги студентам у навчанні, для поради в житті.

З 1974 по 1976 роки В. М. Кузаконь навчався в аспірантурі за фахом "Геометрія і топологія" під науковим керівництвом доцента М. О. Рахули. Кандидатська дисертація на тему "Диференціальні інваріанти розшарування ріманових многовидів зі зв'язністю і їх симетрії" захищена в Московському державному педагогічному університеті ім. В. І. Леніна.

В. М. Кузаконь - послідовник наукових шкіл професорів В.В. Личагіна і М.О. Рахули. Основний напрямок його наукової діяльності - теорія диференціальних інваріантів. Його дослідження знайшли відображення у великій кількості статтей, доповідях та монографій.

Віктор Михайлович вніс великий вклад в організацію наукових геометричних конференцій в Одесі. У період з 2004 року він очолював організаційний комітет міжнародних конференцій "Геометрія в Одесі". В. М. Кузаконь був президентом благодійного фонду наукових досліджень "Наука", членом ради Міжнародного геометричного центру.

З 2007 року Віктор Михайлович був відповідальним редактором наукового журналу "Праці міжнародного геометричного центру".

Ентузіазм і активність Віктора Михайловича притягували у науковому світі інтерес відомих геометрів. Колеги згадують його виступи, які залучали до найсучасніших ідей і досягнень геометрії, в служінні якої він виявляв зразок для наслідування

З 2010 року Віктор Михайлович завідував кафедрою вищої математики в Одеській національній академії харчових технологій. Лекції для студентів читались із захопленим блиском, супроводжувалися потужною мотивацією та викликати в них оптимізм і бажання досягати більшого.

Протягом багатьох років Віктор Михайлович очолював одеську міську організацію Української республіканської партії «Собор», брав активну участь у виборах до органів влади.

Кузаконь В.М. завжди був поціновувачем усього прекрасного, полюбляв філософію, психологію, поезію – сам писав ліричні, філософські вірші.

Друзі, колеги знали і завжди згадують про улюблені дві пісні, які любив співати Віктор Михайлович: «Скрипка грає» на вірші Юрія Рибчинського та «Есть только миг» на вірші Леоніда Дербеньова, які підкреслюють як романтизм, так і спрямованість особистості.

Він з честю пройшов свій земний шлях і в наших серцях назавжди залишиться мудрим Вчителем, великим Патріотом і достойним Громадянином. Світла пам'ять залишиться надовго в душах колег, учнів і друзів.

Майдо Оскарович Рахула вспоминает

Год 1949. Послевоенная Эстония. Колхозное строительство. Раскулачивание. Семья оказывается в верховьях Енисея, где Хакассия, Минусинск. Впрочем, Минусинск – место бывшей ссылки В. И. Ленина. Так и шутили: нас повезли по "ленинским местам".

Изучаем русский язык, чтобы стал он нам вторым родным. Учёба в школе идёт успешно. Выхожу победителем краевой олимпиады по математике, заканчиваю школу с серебряной медалью и поступаю на мехмат Томского университа.

Тепло вспоминаю своих руководителей-геометров по ТГУ – Николая Георгиевича Туганова, Романа Николаевича Щербакова и Владислава Степановича Малаховского.

1953, смерть Сталина. XX съезд партии, осуждение культа личности. Хрущёвская "оттепель". Реабилитация депортированных.

С женой Ларисой (девочка из Красноярска) заканчиваем учёбу в университете и с детьми, с сыном и дочерью, приезжаем в Эстонию. Проблема с жильём, но помогает случай. Из Минвуза поступает запрос, сможет ли Тартуский унивеситет подготовить двух математиков для работы за рубежом. Даём согласие, садимся за французский и в 1967-ом летим преподавать математику в Алжире. СССР в то время помогал развивающимся африканским странам "строить социализм". В Алжире пробыли четыре года. Интересными для меня были последние два года работы в Алжирском университете вместе с французами.

Вернувшись в 1971-ом в Эстонию, нас ожидала там та же квартирная проблема. Помнил разговор с коллегой Коваленко, с кем работали в Алжире на одной кафедре. Ректор Чайковский как бы наказал ему найти хорошего зав. каферой математики. Решил позвонить Чайковскому, договорились встретиться. При встрече Владислав Феликсович рассказал мне седующую историю. Когда он работал советником при Советском посольстве в Каире, случилось, что он тяжело заболел и его могло спасти одно лекарство, которое можно было купить лишь в Лондоне. Один молодой человек из Посольства полетел в Лондон и вечером того же дня со слезами на глазах преподнёс Владиславу Феликсовичу лекарство. Этот человек оказался парнем из Эстонии.

Тут же Владислав Феликсович предложил мне кафедру и наше сотрудничество продолжалось долгие годы. Важные вопросы, касающиеся комплектования кафедры либо отчётности кафедры на Совете института и перед Министерством, обсуждались в кабинете ректора. В начале моей работы на кафедре было лишь четыре математика с учёными степенями, а в

1987-ом их было 14. Конечно, это результат совместных усилий ректора и зав. кафедрой, но не только, признаться, кафедра стала известной по городу среди пяти вузов Одессы.

Кафедральные будни заключались в проведении занятий на пяти факультетах, обсуждении методики преподавания, составлении учебных пособий с учётом той или иной специальности и согласовании программ.

Специалисты-математики не обходятся и без научной работы. Геометрический семинар ОТИПП наряду с семинаром ОГУ стал активным научным центром в городе. На семинаре обсуждались в основном результаты исследовательской работы участников семинара. Успешно защитили свои кандидатские работы самые активные из участников – прежде всего два Виктора, Виктор Леонидович Спесивых и Виктор Михайлович Кузаконь. На геометрические конференции и с чтением лекций на нашем семинаре в Одессу приезжали известные учёные А. Д. Александров, В. Т. Фоменко, В. В. Шарко, Г. Ф. Лаптев, А. П. Широков, Б. Л. Лаптев, Л. Е. Евтушик, В. Ф. Кириченко, А. М. Виноградов, М. А. Акивис, В. И. Близникас, Ю. Г. Лумисте и др. Да и мы сами не в Одессе сидели. Пусть в шутку сказано, но территория от Мадрида до Пекина и от Сахары до Тромсо на Полярном круге мною достаточно изъезжена с разными докладами и выступлениями.

Геометрические традиции кафедры продолжаются и поныне, т. е. 25 лет спустя после моего возвращения в Тарту. По инициативе заведующего Виктора Михайловича проводятся ежегодные международные конферении "Геометрия в Одессе". Участники приезжают с Украины, из России и из-за рубежа.

Каковы же злободневные проблемы современной дифференциальной геометрии?

Во-первых, вся дифференциальная геометрия строится на итерациях касательного функтора. Касательные расслоения – эти структуры охватывают, по существу, всю геометрию последних двух столетий. По этой теме защищал я свою докторскую диссертацию.

Во-вторых, исключительно важно проявляет себя т. н. экспоненциальный закон. Этот закон охватывает теорию инвариантов, начиная с теории алгебраических инварианов Гильберта и до сингулярностей отображеий – теорию катастроф Р. Тома. Сюда следует добавить и обширную тему симметрий дифференциальных уравнений.

Как-то в Одессе после моего доклада подошёл профессор Г. Атанасиу из Румынии и сказал: "Это всё очень интересно!" Мы познакомились, я был у них в Бражове, они у нас в Тарту. В результате появились две общие монографии, одна на русском языке, другая на английском.

В заключение вспоминаю слова, однажды сказанные мне А. З. Петровым: "Молодой человек, ваши идеи интересные, но они не будут признаны, пока вы не покажете приложения!" Привожу пример. В геометрии хорошо знают производные Ли. Производная Ли векторного поля – это же производная поля скоростей или поле ускорений, которое можно истолковывать как силовое поле. Оказывается, при смещении вращающегося тела в этом теле возникают силовые линии, направленные перпендикулярно к направлению сдвига. Всякие круговороты в природе – торнадо в атмосфере, орканы в океане, стаи птиц и косяки рыб – порождают такую силу. Конечно же и волчки и гироскопы. В космосе эта сила проявляет себя особенно мощно. Не под влиянием ли этой силы наше Солнце летит в сторону созвездия Лебедя со скоростью 230 км/сек? Похоже, что галактики и солнечные системы – плоские диски, а планеты и луны – круглые шары, результат того, что в первом случае вращения совершаются вокруг одной оси, а во втором случае вокруг двух осей. Призводные Ли это объясняют. Наша последняя книга этой теме посвящается.

Таким образом, геометрическая мысль не должна останавливаться. Мы постоянно должны заботиться о том, чтобы наши структуры доходили действенно до прикладных наук и до практики.

Quantization of states of the bispinor Dirac equation with special radiation potentials and parity nonconservation effect in heavy finite Fermi-system

O. A. Antoshkina, O. Yu. Khetselius, V. F. Mansarliysky

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `quantant@mail.ru`

In this work we go on our investigation of a problem of the eigen-values spectrum and eigen-functions for an effective relativistic many-body Dirac Hamiltonian of the finite heavy many-body Fermi-systems and further application to quantitative description of the electroweak interactions with calculating the corresponding radiation (including the electroweak) amplitudes for transition, in which the parity non-conservation effect takes a place. Here we present an new improved scheme to quantization of the quasistationary states of the relativistic bispinor Dirac equation with a non-singular (singular) electromagmetic potential and additional radiation potentials. The basis for to quantization of the Dirac equation quasistationary states and their computing is consitent gauge-invariant formalism of the nuclear-QED perturbation thepry [1]. New element is development of the optimal scheme for computing radiation (electroweak) amplitudes of the forbidden and allowable transitions with using the optimized one-quasiparticle representation [2]. There are considered the conditions when a gauge invariance of theory is violated. The corresponding theorem is proven.

New scheme is applied to computing the complex quantum system hyperfine structure integrals, parity non-conservation radiation (electroweak) amplitudes for a set of the heavy finite Fermi-systems with accounting of exchange-correlation, Breit, weak e-e interactions, radiative and nuclear (magnetic moment distribution, finite size, neutron “skin”) corrections, nuclear-spin dependent corrections due to anapole moment, Z-boson ((AnVe) current) exchange, combined hyperfine and Z boson exchange ((VnAe) current) interactions [3]. The data for test systems are compared with the Standad Model predictions. It has been found a essential difference of the standard data.

References

[1] O. Yu. Khetselius *Quantum structure of electroweak interaction in heavy finite Fermi-systems.*,- Odessa, Astroprint, (2011), 452p.

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] O. Yu. Khetselius, *Quantum Geometry: New approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac equation for relativistic many-body system and calculating some spectral parameters.*,- Proceedings of International Geometry Center. 6, N1: (2013), P.60-66.

Construction of the Open Extension Topology

V. Babych, V. Pyekhtyeryev

(Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: vyacheslav.babych@gmail.com, vasiliy@univ.kiev.ua

Open extension topology is introduced in [1] for the case when its carrier differs from the one of the starting topological space by one point. A particular case of this construction is excluded point topology which appears as an open extension of the discrete topology. The most famous example of excluded point topology is Sierpinski space. We generalize this construction to the case of an arbitrary superset of the carrier of the original space.

Let (X, τ) be a topological space and let X^* be a superset of X. Then the family $\tau^* = \{U \subset X^* \mid U \supset X \text{ or } U \in \tau\}$ is a topology for X^*, which is called *the open extension topology of X to X^**. Thus the open sets of X^* are all the sets containing X and all open sets of X. Respectively, closed sets in X^* are all subsets of the complement $X^* \backslash X$ and all unions $(X^* \backslash X) \cup A$ where A is closed in X. The open extension topology τ^* is the supremum of topology $\tau \cup \{X^*\}$ and X-included topology for X^*.

A map $f : X \to Y$ of topological spaces (X, τ) and (Y, σ) is called *inducing*, if the topology τ is induced by σ and f.

Theorem 1. *Let (X, τ) be a topological space, let X^* be a superset of the set X and let τ^* be the open extension topology of X to X^*. Then the natural embedding $X \ni x \overset{i}{\mapsto} x \in X^*$ is open inducing map. In particular, (X, τ) is open subspace of X^*.*

Unlike extension topology [2] open extension topology is not transitive. Hence the natural embedding $X \ni x \mapsto x \in X^*$ is not quotient.

Proposition 1. *A base of the least cardinality of the open extension topology of a space X to X^* has the form $\beta^* = \{X \cup \{x\}, x \in X^* \backslash X\} \cup \beta$ where β is a base of the least cardinality of the space X.*

Proposition 2. *Let τ^* be the open extension topology of a space X to $X^* \supset X$. Then a local base of the least cardinality at any point $x \in X^*$ has the form $\{X \cup \{x\}\}$ for $x \in X^* \backslash X$, and β_x where β_x is a local base of the least cardinality at point x in X, for $x \in X$.*

Proposition 3. *Let τ^* be the open extension topology of a space X to $X^* \supset X$ and let $A \subset X^*$. Then the interior, the closure, the sets of isolated and limit points of A are obtained by formulae:*

1) $\operatorname{Int}_{X^*} A = A$ when $A \supset X$, and $\operatorname{Int}_{X^*} A = \operatorname{Int}_X (A \cap X)$ otherwise;

2) $\overline{A}_{X^*} = A$ when $A \subset X^* \backslash X$, and $\overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X}_X \cup (X^* \backslash X)$ otherwise;

3) $I_{X^*}(A) = A$ when $A \subset X^* \backslash X$, and $I_{X^*}(A) = I_X(A \cap X)$ otherwise;

4) $A'_{X^*} = \varnothing$ when $A \subset X^* \backslash X$, and $A'_{X^*} = (A \cap X)'_X \cup (X^* \backslash X)$ otherwise;

5) A is dense (nowhere dense) in X^* if and only if the intersection $A \cap X$ is dense (nowhere dense) in X.

References

[1] Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, Jr. *Counterexamples in topology.* – New York: Dover publications, 1978. – 256 p.

[2] Babych V. M., Filonenko O. M. *Extension Topology* // Scientific Bulletin of Uzhhorod University. Series of Mathematics and Informatics. – 2015. – **1 (26)**. – p. 7-11. [in Ukrainian]

[3] Babych V. M., Pyekhtyeryev V. O. *Open Extension Topology* // Proc. Intern. Geom. Center. – 2015. – Vol. 8.– No. 2. – p. 20-25. [in Ukrainian]

S-Dimension versus Hölder dimension in Peano continua

T. Banakh, T. Martynyuk

Ivan Franko National University of Lviv, Ukraine

E-mail address: t.o.banakh@gmail.com tetyanka.martynyuk@gmail.com

Let X be a (locally connected) compact metrizable space. By $\mathcal{M}(X)$ we denote the family of metrics generating the topology of X. For any metric $d \in \mathcal{M}(X)$ and $\varepsilon > 0$ denote by $N_\varepsilon(X)$ (resp. $S_\varepsilon(X)$) the smallest cardinality of a cover of X by (connected) subsets of diameter $< \varepsilon$. The real number $\mathrm{Dim}(X,d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln N_\varepsilon(X)}{\ln(1/\varepsilon)}$ is known in Theory of Fractals as the *box-counting dimension* of the compact metric space (X,d). For example, the standard Cantor set on the real line has box-counting dimension equal to $\frac{\ln 2}{\ln 3}$. In spite of the fact that $\mathrm{Dim}(X,d)$ is real-valued, its minimum $\dim(X) = \min_{d\in\mathcal{M}(X)} \mathrm{Dim}(X,d)$ is an integer number, equal to the topological dimension $\dim(X)$ of X (according to the classical theorem proved by Pontryagin and Schnirelman in 1932).

On the other hand, for a locally connected compact metrizable space an analogous function

$$S\text{-}\dim(X) = \inf_{d\in\mathcal{M}(X)} S\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) \text{ where } S\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\ln S_\varepsilon(X)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

is not necessarily integer-valued, see [2].

In this talk we shall discuss the relation of the S-dimension to another dimension function called the Hölder dimension. It is defined for a Peano continuum as follows. We recall that a compact metrizable space X is called a *Peano continuum* if X is a continuous image of the unit interval $[0,1]$. By Hahn-Mazurkiewicz Theorem (1914), a compact metrizable space is a Peano continuum if and only if it is connected and locally connected.

A function $f : X \to Y$ between two metric spaces (X, d_X) and (Y, d_Y) is called *α-Hölder* if there exists a positive real constant L such that $d_Y(f(x), f(x')) \le L \cdot d_X(x,x')^\alpha$ for all $x, x' \in X$. For a Peano continuum X its *topological Hölder dimension* is defined as

$$H\ddot{o}\text{-}\dim(X) = \inf_{d\in\mathcal{M}(X)} H\ddot{o}\text{-}\mathrm{Dim}(X,d)$$

where $H\ddot{o}\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) = \inf\{\alpha \in (0,\infty] : \exists \text{ an } \frac{1}{\alpha}\text{-Hölder map } f : [0,1] \to X\}$ is the *Hölder dimension* of the metric Peano continuum (X,d). The main result of the talk is

Theorem 1. *Any metric Peano continuum (X,d) has*

$$S\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) \le H\ddot{o}\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) \le 4\cdot S\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) \text{ and } S\text{-}\dim(X) \le H\ddot{o}\text{-}\dim(X) \le 4 \cdot S\text{-}\dim(X).$$

This theorem gives a partial answer to Problem 5.2 [2] which asks if $S\text{-}\dim(X) = H\ddot{o}\text{-}\dim(X)$ for any Peano continuum X. Theorem 1 also has a nice application to the problem of detecting Peano continua homeomorphic to deterministic fractals.

A compact metric space (X,d) is called a *deterministic fractal* if $X = \bigcup_{i=1}^n f_i(X)$ for some contracting maps $f_1, \dots, f_n : X \to X$. A map $f : X \to X$ is *contracting* if its has Lipschitz constant $\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x\ne y} \frac{d(f(x),f(y))}{d(x,y)} < 1$.

Theorem 2. *Each deterministic fractal (X,d) has finite Hölder dimension. More precisely, if $X = \bigcup_{i=1}^n f_i(X)$ for contracting maps $f_1,\dots,f_n : X \to X$, then $H\ddot{o}\text{-}\dim(X) \le H\ddot{o}\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) \le \frac{\ln n}{\ln(1/\lambda)}$ where $\lambda = \max_{1\le i\le n} \mathrm{Lip}(f_i) < 1$.*

This theorem improves the upper bound $S\text{-}\dim(X) \le S\text{-}\mathrm{Dim}(X,d) \le \frac{\ln n}{\ln(1\lambda)}$ proved in [1].

Theorem 3. *A Peano continuum X containing an open subset homeomorphic to the real line $\mathbb{R}$ is homeomorphic to a deterministic fractal iff $S\text{-}\dim(X)$ is finite iff $H\ddot{o}\text{-}\dim(X)$ is finite.*

References

[1] T.Banakh, M.Nowak, *A 1-dimensional Peano continuum which is not an IFS attractor*, Proc. Amer. Math. Soc. **141**:3 (2013) 931–935.

[2] T. Banakh, M. Tuncali, *Controlled Hahn-Mazurkiewicz Theorem and some new dimension functions of Peano continua*, Topology Appl. **154**:7 (2007), 1286–1297.

On the type number of almost contact metric hypersurfaces in special Hermitian manifolds

M. B. Banaru, G. A. Banaru

Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation

E-mail address: `mihail.banaru@yahoo.com`

1. The classification of the almost Hermitian structures on first order differential-geometrical invariants can be rightfully attributed to the most significant results obtained by the outstanding American mathematician Alfred Gray and his Spanish colleague Luis M. Hervella [1].

The class of special Hermitian manifolds (or W_3-manifolds, using Gray-Hervella notation) has been studied not so detailed as other so-called "small" Gray–Hervella classes of almost Hermitian manifolds.

We remark also that the present work is a continuation of researches of the authors in the area of Hermitian manifolds, mainly six-dimensional (see, for example, [2], [3] and many others).

2. An almost Hermitian manifold is a $2n$-dimensional manifold M^{2n} with a Riemannian metric $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ and an almost complex structure J. Moreover, the following condition must hold

$$\langle JX,\ JY \rangle = \langle X,\ Y \rangle\,, \quad X, Y \in \aleph(M^{2n}),$$

where $\aleph(M^{2n})$ is the module of smooth vector fields on M^{2n} [1]. An almost Hermitian manifold is called Hermitian, if its structure is integrable. A special Hermitian structure in addition must comply with the condition $\delta F = 0$, where δ is the codifferentiation operator and F is the fundamental (or Kählerian) form [1], [4].

3. The main results are the following:

1) A characterization in terms of the type number of some important almost contact metric structures (cosymplectic, Sasaki, Kenmotsu etc.) on hypersurfaces in special Hermitian manifolds is obtained;

2) A criterion of the minimality of such hypersurfaces in the terms of their type number is established;

3) It is proved that if a special Hermitian manifold satisfies the 0- or 1-cosymplectic hypersurfaces axiom then it is Kählerian.

These results are detailed for six-dimensional planar submanifolds of Cayley algebra that carry special Hermitian structures.

References

[1] A. Gray and L. M. Hervella *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants.*,- Ann. Mat. Pura Appl., 123 (4), (1980), P.35-58

[2] M. B. Banaru *Geometry of 6-dimensional Hermitian manifolds of the octave algebra.*,- Journal of Mathematical Sciences (New York), 207 (3), (2015), P.354-388.

[3] M. B. Banaru, G. A. Banaru, 1-*cosymplectic hypersurfaces axiom and six-dimensional planar Hermitian submanifolds of the Octonian.*,- SUT Journal of Mathematics, 51 (1), (2015), P.1-9.

[4] V. F. Kirichenko *Differential-geometrical structures on manifolds.*,- Pechatnyi Dom, Odessa, (2013), 458 pp(in Russian).

H-closed quasitopological groups

Serhii Bardyla, Oleg Gutik, Alex Ravsky

Ivan Franko National University of Lviv , Lviv, Ukraine

E-mail address: sbardyla@yahoo.com

An H-closed quasitopological group is a Hausdorff quasitopological group which is contained in each Hausdorff quasitopological group as a closed subspace. We obtained a sufficient condition for a quasitopological group to be H-closed, which allowed us to solve a problem by Arhangel'skii and Choban and to show that a topological group G is H-closed in the class of quasitopological groups if and only if G is Raikov-complete. Also we present examples of non-compact H-closed quasitopological groups.

Our main propositions are following:

Theorem 1. *A topological group G is H-closed in the class of quasitopological groups if and only if G is Raĭkov complete.*

Theorem 2. *Let (G, τ) be a Cauchy completty quasitopological group, (G, σ) be a quasitopological group, $\sigma \supset \tau$, and the space (G, σ) has a π-base, consisting of open subsets of the space (G, τ). Then (G, σ) is a Cauchy completty quasitopological group.*

On hyperspaces of max-plus and max-min convex sets

L. E. Bazylevych, A. G. Savchenko, M. M. Zarichnyi

(Lviv Polytechnica, Lviv, Ukraine; Kherson Agrarian University, Kherson, Ukraine; Ivan Franko Lviv National University, Lviv; Ukraine)

E-mail address: izar@litech.lviv.ua, savchenko1960@rambler.ru, mzar@litech.lviv.ua

In the last decades, the notions of max-plus and max-min convex set played an important role in the idempotent mathematics (see, e.g., [3, 4]). Informally speaking, idempotent mathematics is the part of mathematics in which the ordinary algebraic operations on the reals are replaced with idempotent ones (e.g., max).

Some results are obtained in the theory of hyperspaces of max-plus and max-min convex sets (see, e.g., [2, 1]). The talk is devoted to generalizations and extensions of the known results. In particular, we deal with (nonseparable) Hilbert spaces, countable direct limits. We also consider the hyperspaces of max-plus and max-min convex polyhedra.

References

[1] L. E. Bazylevych *On the hyperspace of max-min convex compact sets.*,- Methods of Functional Analysis and Topology 15:4 (2009), P. 322-332.

[2] L. Bazylevych, D. Repovs, M. Zarichnyi *Hyperspaces of max-plus convex subsets of powers of the real line.*,- J. Math. Anal. Appl. 394 (2012), P. 481-487.

[3] Gaubert S., Katz R. *Max-Plus Convex Geometry*,- // Relations and Kleene Algebra in Computer Science. Volume 4136 of the series Lecture Notes in Computer Science. - Springer, Berlin, (2006), P. 192-206.

[4] G. L. Litvinov, S. N. Sergeev *Tropical and Idempotent Mathematics and Applications.*,- Contemporary Mathematics, V. 616 (2014), 300p.

On the functor of semiadditive τ-smooth functionals

R.B.Beshimov, N.K.Mamadaliev

Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Institute of Mathematics of National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek

E-mail addresses: `rbeshimov@mail.ru, nodir_88@bk.ru`

In the work we investigate categorical and topological properties of the functor OS_τ semiadditive τ-smooth functionals in the category $Tych$ of Tychonoff spaces and their continuous mappings.

For a compactum X by $O(X)$ [1] denote the set of all weakly additive order-preserving normed functionals. Elements of the set $O(X)$, are shortly called weakly additive functionals. Note that each functional $\nu \in O(X)$ is a continuous mapping of $C(X)$ to R, i.e. the set $O(X)$ is a subset of $C_p(C(X))$. By $OS(X)$ [2] denote the set of all positively-homogeneous and semiadditive functionals from $O(X)$. Elements of the set $OS(X)$, are shortly called semiadditive functionals. These sets are equipped with the pointwise topology.

Functor $OS : Comp \to Comp$ is defined in [2]. Our main goal is to extend the functor OS over the category $Tych$ and investigate its categorical propeties.

Let X be a Tychonoff space and let $C_b(X)$ be the space of all continuous bounded functions $f : X \to R$ with usual pointwise operations and sup-norm, i.e. with the norm $\|f\| = \sup\{|\mathrm{f\,(x)}| : \mathrm{x} \in \mathrm{X}\}$.

Definition We say that a functional $\mu \in OS(\beta X)$ is τ-smooth, if $\mu(\varphi_\alpha) \to 0$ for every monotone net $\{\varphi_\alpha\} \subset C_b(X)$ decreasing to zero on X.

For a Tychonoff space X, by $OS_\tau(X)$ denote the set of all τ-smooth functionals from $OS(\beta X)$. The set $OS_\tau(X)$ is equipped with pointwise convergence topology (or equivalently, topology induced from $OS(\beta X)$). Put $OS_\tau(f) = OS(\beta f)|OS_\tau(X)$.

Proposition 1. *The construction OS_τ is a covariant functor in the category $Tych$ of Tychonoff spaces.*

Theorem 1. *The functor $OS_\tau : Tych \to Tych$*

1) preserves the weight of infinite Tychonoff spaces;

2) preserves singletons and empty set;

3) monomorphic (preserves embedding);

4) epimorphic (transfers surjections into mappings with dense image);

5) preserves intersections of closed subsets of Tychonoff spaces, i.e. for every family $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X

$$OS_\tau\Big(\bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in A} OS_\tau(X_\alpha)$$

holds;

6) preserves inverse images, i.e. $OS_\tau(f)^{-1}(OS_\tau(Z)) = OS_\tau(f^{-1}(Z))$ for any closed subset Z of Y;

7) is continuous with respect to inverse limits.

References

[1] Radul T., On the functor of order-preserving functionals, Comm. Math. Univ. Carol. 39 (1998), no. 3, 609–615.

[2] Davletov D.E., Djabbarov G.F. Functor of semiadditive functionals. Methods of Functional Analysis and Topology. Vol. 14 (2008), No. 4, pp. 314–322.

Twisted Product CR-submanifolds in a Locally Conformal Kaehler Space Form

V. Bonanzing, K. Matsumoto

University of Reggio Calabria, Italy

Yamagata University, Japan

Certain twisted product CR-submanifolds in a Kaehler manifold and some inequalities of the second fundamental form of these submanifolds are presented ([1]). Then the length of the second fundamental form of a twisted product CR-submanifold in a locally conformal Kaehler manifold is considered (2013), ([2]).

In this talk, we determine inequalities involving the length of the second fundamental form and the mean curvature, characterizing two cases where the equalities hold in two twisted product CR-submanifolds in a locally conformal Kaehler space form.

References

[1] K. Matsumoto and Z. Şentürk, *Certain twisted product CR-submanifolds in a Kaehler manifold*, Proc. of the conference RIGA 2011, Riemannian Geometry and Applications, 2011.

[2] K. Matsumoto and Z. Şentürk, *Twisted product CR-submanifolds in a locally conformal Kaehler manifold*, Publications de l'Institut Mathematique, **94** (2013), 131–140.

New scheme to quantization and computing of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation and computing the satellites spectra of three-quasiparticle systems

Yu. G. Chernyakova, L. A. Vitavetskaya, I. N. Serga

OSENU, Odessa, Ukraine

E-mail address: quantche@mail.ru

Here we predent an new numerical algorithm to computing energy spectra of N-particle finite quantum (atomic) systems and implemented new scheme of quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the Dirac-Fock equation. In difference of our previous similar self-conjunctive versions [1], new method has a few new elements which provide its more effectiveness. The first new element is using of ab initio gauge-invariant version of the quantum electrodynamics perturbation theory for the N-quasi-particle systems with using optimized Dirac-Fock-Slater equation relativistic orbital basis's generation scheme [2]; second element is using optimized Fano-Byorke type procedure for computing the perturbation operator matrix elements between the N-quasi-particle states. The third element is taken from our previous theory and results in an accurate accounting the complex exchange-correlation effects by using the mnost effective many-body density dependent functionals [3]. It has been prooved the theorem establishing a link between gauge non-invariant contributions into the matrix elements and quality of the relativistic eigen functions basis of the corresponding Dirac-Fock-Slater Hamiltonian.

As applicatin of a new approach we present the results of computing energy and spectral parameters for dielectronic satellites of in spectra of the neon- and sodium mulcicharged ions. There are listed new data on the spectra levels energies, different contributions of the relativistic and exchange-correlation corrections, line intensities distribution for transitions between configurations with great number of lines [3]. For comparison there are listed the test data obtained within different methods, namely, multi-configuration Dirac (Hartree)-Fock calculation, standard and advanced density-functional theories. It has been shown that a new scheme provides quite high accuracy in comparison with the stadard methods and is to be most effective in studying the complex configurations, where it is realized an intermediate case [3].

References

[1] Yu. G. Chernyakova, Yu. V. Dubrovskaya, T. A. Florko, et al, *An advanced approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Slater equation.*,-Proceedings of International Geometry Center. 6: (2013), P.29-34.

[2] A. V. Glushkov, *Advanced relativistic energy approach to radiative decay processes in multielectron systems.*,- Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications (Springer). 26: (2012), P. 231-254.

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

A simple proof of the short-time existence and uniqueness for Ricci flow

K. Eftekharinasab

Institute of Mathematics of NAS, Kyiv, UKraine

E-mail address: kaveheft@gmail.com

We give a simple proof for the local existence for Ricci flow. We give to the space of Riemannian metrics on a compact manifold the structure of a generlized Fréchet manifold, bounded (or MC^k) Fréchet manifold, introduced in [2]. These generlized manifolds surpass the calculus and geometry of Fréchet manifolds and we would expect more of their applications to problems in global analysis.

For the basic defintions of bounded Fréchet context we refer to [2]. The space of Riemannian metric on a compact manifold is a Fréchet manifold. It is known that this space also has the structures of ILH manifold and the projective limit of Banach manifolds. We suggest a new structure for these spaces namely bounded Fréchet manifolds. Bounded Fréchet manifols have desirable propperties that provide a suitable setting to study spaces of sections in particular Riemannian metrics. Here we demonstrate one of their applications.

We can consider a Ricci flow on a comapct manifold as the inregral curve of a vector field but a vector field on a Fréchet manifold does not always has a uique integral curve. However, in the case of bounded Fréchet manifold it always has. More precisely,

Theorem 1. *[1, Theorem 5.1] Let M be a bounded Fréchet manifold and let $\xi : M \to TM$ be a vector field. Then there exits an integral curve for ξ at $p \in M$. Furthermore, any two such curves are equal on the intersection of their domains.*

Suppose $\mathcal{X}$ is the MC^∞ smooth vector field on the space of Riemannian metrics that maps a Riemannian metric g to $-2Rc(g)$. Then the Ricci flow curve is the smooth integral curve of this vector field. Hence the Theorem 1 guarantees its local existence and uniqueness with any initial metric at $t = 0$. In this way we can get a simple proof of the short-time existence.

References

[1] K. Eftekharinasab, *Geometry of bounded Fréchet manifolds.*, to appear in Rocky Mountain J. Math.

[2] O. Müller O. *A metric approach to Fréchet geometry.*, -Journal of Geometry and physics 11 (2008), P. 1477 -1500.

Actions of finite groups and smooth functions on surfaces

B. Feshchenko

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail address: fb@imath.kiev.ua

Let $f : M \to \mathbb{R}$ be a Morse function on a smooth closed surface, V be a connected component of some critical level of f, and $\mathcal{E}_V$ be its atom. Let also $\mathcal{S}(f)$ be a stabilizer of the function f under the right action of the group of diffeomorphisms $\mathrm{Diff}(M)$ on the space of smooth functions on M, and $\mathcal{S}_V(f) = \{h \in \mathcal{S}(f) \,|\, h(V) = V\}$. The group $\mathcal{S}_V(f)$ acts on the set $\pi_0\partial\mathcal{E}_V$ of connected components of the boundary of $\mathcal{E}_V$. Therefore we have a homomorphism $\phi : \mathcal{S}(f) \to \mathrm{Aut}(\pi_0\partial\mathcal{E}_V)$. Let also $G = \phi(\mathcal{S}(f))$ be the image of $\mathcal{S}(f)$ in $\mathrm{Aut}(\pi_0\partial\mathcal{E}_V)$.

Suppose that the inclusion $\partial\mathcal{E}_V \subset M \setminus V$ induces a bijection $\pi_0\partial\mathcal{E}_V \to \pi_0(M \setminus V)$. Let H be a subgroup of G. We present a sufficient condition for existence of a section $s : H \to \mathcal{S}_V(f)$ of the homomorphism ϕ, so, the action of H on $\partial\mathcal{E}_V$ lifts to the H-action on M by f-preserving diffeomorphisms of M, [4] .

Group actions having similar «combinatorial» properties on surfaces are studied by Bolsinov and Fomenko [1], Brailov [3], Brailov and Kudryavtseva [2], Kudryavtseva [7], Maksymenko [8], Kudryavtseva and Fomenko [5, 6].

This result holds for a larger class of smooth functions $f : M \to \mathbb{R}$ having the following property: for each critical point z of f the germ of f at z is smoothly equivalent to a homogeneous polynomial $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ without multiple linear factors.

References

[1] A. Bolsinov and A. Fomenko. *Some actual unsolved problems in topology of integrable Hamiltonian systems.* In Topological classification in theory of Hamiltonian systems, pages 5–23. Factorial, Moscow, 1999.

[2] Yu. Brailov and E. Kudryavtseva. *Stable topological nonconjugacy of Hamiltonian systems on two-dimensional surfaces.* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (2):20–27, 72, 1999.

[3] Yu. Brailov. *Algebraic properties of symmetries of atoms.* In Topological classification in theory of Hamiltonian systems, pages 24–40. Factorial, Moscow, 1999.

[4] B. Feshchenko. *Actions of finite groups and smooth functions on surfaces*, submited to Methods of Functional Analysis and Topology, 2016.

[5] E. Kudryavtseva and A. Fomenko. *Symmetry groups of nice Morse functions on surfaces.* Dokl. Akad. Nauk, 446(6):615–617, 2012.

[6] E. Kudryavtseva and A. Fomenko. *Each finite group is a symmetry group of some map (an "Atom"-bifurcation).* Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., 68(3):148–155, 2013.

[7] E. Kudryavtseva. *Realization of smooth functions on surfaces as height functions.* Mat. Sb., 190(3):29–88, 1999.

[8] S. Maksymenko. *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms.* 2013, arXiv:1311.3347

Quantum Geometry: An effective approach to quantization of quasi-stationary states for bispinor Dirac equation and photon propagator gauge problem

A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, V. V. Buyadzhi

Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine

E-mail address: dirac13@mail.ru

We present a new generalized operator approach to quantization of the quasi-stationary (scattering, resonance) states of relativistic bispinor Dirac equation and their using in problems of computing special (radiation, autoionization, collision widths)matric elements for a few classes of non-stationary and collision tasks. Earlier we have developed an naive operator approach to quantization of the quasi-stationary (scattering, resonant) for Dirac equations in a class of non-stationary tasks. New algorithm has been developed and based on the gauge-invariant QED perturbation theory with the gauge-invariant zeroth approximation, relativistic energy approach (S-matrix Gell-Mann and Low adiabatic formalism) and mapped Fourier grid technique [1]-[4]. We make more advanced an computational block of an approach to take into account the many-body correlations (are corresponding to a few classes of the polarization, screnning diagrams, continuum pressure, mass operator self-iterations etc) in the quantum systems.

It is quatitatively analyzed a contribution into the cited matrix elements of the high-lying Rydberg, autionization, resonant states in spectrum of the energy eigen-values of the total Hamiltonian [2]. The generalized Grant theorem is proved, stating the non-zeroth contribution of the fourth order QED perturbation theory into imaginary part of the energy shift due to the polarization, screening effects, if the many-body Dirac hamiltonian eigen functions are used. This contribution describes collective effects and it is dependent upon the photon propagator gauge (the gauge non-invariant contributions). It is also presented proof of the generalized theorem regarding limiting the asymptotic behaviour of the collision cross-section at infinite energy for systems, described by the Dirac equation.

References

[1] A. V. Glushkov, *New Operator perturbation theory for quantum systems in a strong AC/DC electric field.*,- Advances in Quantum Methods and Applications in Chemistry, Physics, and Mathematics (Springer). 27: (2013), P. 161-198.

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] A. V. Glushkov, *Advanced relativistic energy approach to radiative decay processes in multielectron systems.*,- Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications (Springer). 26: (2012), P. 231-254.

[4] A. V. Glushkov, *Quantum algebra and Geometry: New science and its perspectives*,- Proc. of Internat.Conf. "Quantum Geometry, Dynamics and Spectroscopy" Odessa (Ukraine).- 2015.- P.3-36.

Geometry of a Chaos: New advanced technique to treating a deterministic chaos in complex dynamical systems

M. Yu. Gurskaya, A. V. Glushkov, A. V. Ignatenko

(Odessa State Environmental University, Odessa, Ukraine)

E-mail address: gurskaya.marina@gmail.com

Developing quantitative basis of a chaos geometry, we present combined advanced technique to treating a deterministic chaos in the complex dynamical systems. In particular, the technique includes a number of the methods and algorythms such as predictiory trajectories algorythm, stochastic Green's functions method, multi-fractal geometry methods,incl. the fractal Green's functions method, advanced averaged mutual information scheme, correlation integral analysis, false nearest neighbor algorithm, Lyapunov exponent's analysis with computing the Kolmogorov entropy and predictability limit, advanced surrogate data method etc [1]. The chaos-geometrical approach is designed for analyzing the space-temporary data series in modelling interactions in a complex dynamical system of any mathematical or physical nature [2] and formal search of characteristic features of chaotic behaviour of the system. The predictiory trajectories algorythm, stochastic Green's functions and optimal propagators methods provide an effective basis for high-qualitative forecasting evolution of the low- and even high-attractors dynamical systems [3].

As the concrete example, we present the results of numerical studying connection between chaotic classical motion and quantum and overlap statistics. The special case of the system with compact phase space and nonstandard momentum dependence of the classical Hamiltonian is examined. Application of the technique to studying chaotic and hyperchaotic behavior of atomic system in the crossed electromagnetic fields [4] and laser and spin-generator systems is presented. The topological and dynamical invariants of the system are computed.

References

[1] A. V. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa, OSENU, (2013), 400p.

[2] A. V. Glushkov, V. M. Kuzakon, et al, *Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on basis of temporal series analyses.*,- Dyn.Systems - Theory and Appl. 1, (2011), P.31-38.

[3] A. V. Glushkov, A. A. Svinarenko, et al, *Chaos-geometric attractor and quantum neural networks approach to simulation chaotic evolutionary dynamics.*,- Adv. in Neural Networks, Fuzzy Systems and Artificial Intelligence, Ser.: Recent Advances in Computer Engineering,.(Springer) 21, (2014), P.143-150.

[4] A. V. Glushkov, *New Operator perturbation theory for quantum systems in a strong AC/DC electric field.*,- Advances in Quantum Methods and Applications in Chemistry, Physics, and Mathematics (Springer). 27: (2013), P. 161-198.

Theorems about includings for multivalued mappings

B. Klishchuk

Institute of Mathematics of the NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine

E-mail address: bogdanklishchuk@mail.ru

Let E^n be n-dimensional Euclidean space (real or complex) and $\langle *, * \rangle$ be an inner product in E^n, *conv* A be a convex hull of some subset A of E^n . Consider the multivalued mappings (including single-valued and discontinuous mappings) of subsets of Euclidean space.

Let X and Y be some topological spaces. The mapping $F : X \to Y$ is called *a multivalued mapping* if the set $F(x) \subset Y$ is the image of the point $x \in X$.

Let $F_1, F_2 : X \to Y$ be two multivalued mappings. The mapping F_2 is *the restriction* of F_1 if $F_1(x) \supset F_2(x)$ for all points $x \in X$.

Definition 1. The mapping F satisfies *"an acute angle condition"* at the set A if $X = Y$ and $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle \geq 0$ for all pairs of points $x \in A$, $y \in F(x)$.

Theorem 1. *Let D be a domain in Euclidean space E^n containing the origin 0. Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of the closure of this domain and K has the following property (α): any ray, emanating from the origin, contains at least one point belonging to K. Suppose that the restriction of the multivalued mapping $F : \overline{D} \to E^n$ to K satisfies "the acute angle condition" and conv $F(K)$ is a compact set. If conv $F(K) \subset F(\overline{D})$ then $0 \in F(\overline{D})$.*

Let $G = Id - F$ be a multivalued mapping $G : X \to X$ such that the set $G(x) = \{x - y | y \in F(x)\}$ is the image of the point $x \in X$.

Corollary 1. *Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of the domain $\overline{D}$ and K satisfies the property (α). Suppose that the restriction G_1 of the multivalued mapping $G = Id - F : \overline{D} \to E^n$ to K satisfies "the acute angle condition" and conv $G_1(K)$ is a compact set. If conv $G_1(K) \subset G(\overline{D})$ then the mapping F has the fixed point $x \in F(x)$.*

Definition 2. The mapping F satisfies *"a strict acute angle condition"* at the set A if $X = Y$ and $\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle > 0$ for all pairs of points $x \in A$, $y \in F(x)$.

Theorem 2. *Let D be a domain in Euclidean space E^n containing the origin 0. Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of the closure of this domain and K satisfies the property (α). Suppose that the restriction of the multivalued mapping $F : \overline{D} \to E^n$ to K satisfies "the strict acute angle condition". If conv $F(K) \subset F(\overline{D})$ then $0 \in F(\overline{D})$.*

Corollary 2. *Let $K \subset \overline{D}$ be a subset of the domain $\overline{D}$ and K satisfies the property (α). Suppose that the restriction G_1 of the multivalued mapping $G = Id - F : \overline{D} \to E^n$ to K satisfies "the strict acute angle condition". If conv $G_1(K) \subset G(\overline{D})$ then the mapping F has the fixed point $x \in F(x)$.*

References

[1] K. N. Soltanov *Remarks on Separation of Convex Sets, Fixed-Point Theorem and Applications in Theory of Linear Operators.*,- Fixed Point Theory and Applications, (2007), 14p.

[2] Yu. B. Zelinski *Multivalued mappings in analysis.*,- Kiev: Naukova dumka, (1993), 264p.

[3] Yu. B. Zelinski, B. A. Klishchuk, M. V. Tkachuk *Theorems about includings for multivalued mappings.*,- Ukrainian Mathematical Journal 66:7, (2014), P. 1003-1005.

Möbius invariants in conformal and projective geometries and their applications

N. Konovenko, V. Lychagin

Department of Mathematics, ONAFT, Odessa, Ukraine

Department of Mathematics, University of Tromsø, Norway

E-mail address: `konovenko@ukr.net`, `valentin.lychagin@uit.no`

In this talk we give a survey of applications of Möbius invariants of conformal and projective geometries to analysis of various shapes ([1], [2], [3], [5]). We'll consider a connected and simply connected domain $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ with smooth boundary $\gamma = \partial \mathbf{D}$. Sharon E. and Mumford D. ([5]) suggested the following scheme to study shapes of the curve γ.

Due to the Riemann theorem there are conformal mappings $\phi_i : \mathbf{D} \to \mathbb{D}$ and $\phi_o : \mathbf{D}^c \to \mathbb{D}^c$ of the inner and outer parts of $\mathbf{D}$ on the inner and outer part of the unit disk $\mathbb{D}$. Restriction of $\phi_0 \circ \phi_i^{-1}$ on the unit circle gives us a diffeomorphism $\psi : \mathbf{S}^1 \to \mathbf{S}^1$ which is defined up to $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$-action on the group of diffeomorphisms $\mathbf{Diff}\left(\mathbf{S}^1\right)$: $\psi \mapsto A \circ \psi \circ B^{-1}$.

In paper ([5]) some additional conditions on ϕ_0 were imposed which lead to the right action of $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ and give the remakable homogeneous space $\mathbf{Diff}\left(\mathbf{S}^1\right)/\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$.

In paper ([2]) these conditions we revised in such a way that they gives another spaces $\mathbf{SO}(2)\backslash\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)/\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ and $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})\backslash\mathbf{Diff}(\mathbf{S}^1)/\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$.

The situation becomes to be much more rigid if we consider domains $\mathbf{D} \subset \mathbb{C}\mathbf{P}^1$ equipped with some geometrical object, say set of points, curves, functions etc. We call such domains *decorated*.

Applying the Riemann theorem we arrive at a classification problem of the same type objects on the Lobachevsky plane with respect to Lie group isometries $\mathbb{P}\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$.

In both these cases we use differential invariants to describe the corresponding orbit spaces.

Remark that the actions of the above Lie groups on the corresponding jet bundles are algebraic and it allows us to use the Lie-Tresse theorem ([4]) to describe the field of rational differential invariants. These fields separate regular orbits in jet bundles and we use them to get the classification of the corresponding geometrical objects.

We discuss shape spaces and related to them different types of fingerprints. In all cases we give complete description of fields of rational differential invariants and show their relations to the Hill equations and projective structures on the projective line $\mathbb{P}\mathbb{R}^1$.

For the cases of regular orbits these invariants are used to get smooth classification of fingerprints.

For decorated domains we analyze three types of geometrical objects: functions, differential 1-forms and foliations. For all these cases the fields of Möbius invariants are found and used to get smooth classification of corresponding objects.

References

[1] Н. Г. Коновенко. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии // Київ: "Наукова Думка" НАН України, (2013), 192 с.

[2] N. Konovenko, V. Lychagin. Invariants of projective actions and their application to recognition of fingerprints // Anal. Math. Phys., 113 (2015). // DOI 10.1007/s13324-015-0113-5.

[3] N. Konovenko, V. Lychagin. Lobachevskian geometry in image recognition // Lobachevskii J.Math., Vol.36, issue 3, (2015), p. 286-291. // DOI 10.1134/S1995080215030075.

[4] B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf

[5] E. Sharon, D. Mumford. 2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping // International Journal of Computer Vision 70(1), p. 55 - 75, (2006) // DOI: $10.1007/s11263-006-6121$

Monads and $\mathbb{R}$-trees

O. Lozinska, M. Zarichnyi

Ivan Franko Lviv National University, Lviv; Ukraine

E-mail address: olja.lviv133@gmail.com, mzar@litech.lviv.ua

A real tree ($\mathbb{R}$-tree) is a geodesic metric space X satisfying the condition: for every $x, y, z \in X$, there exists $u \in X$ such that the intersection of the geodesic segments $[z, x]$ and $[z, y]$ is $[z, u]$ and also $u \in [x, y]$.

In the paper [4], the authors considered the hyperspaces and the spaces of probability measures on rooted $\mathbb{R}$-trees. It turned out that the obtained spaces are also $\mathbb{R}$-trees. Actually, the constructions of hyperspace and space of probability measures determine functors in a suitable category of $\mathbb{R}$-trees.

In this talk, we also consider the functor of upper semicontinuous capacities ([3]; see also [2]) in the category of rooted $\mathbb{R}$-trees.

Another aim of the talk is to demonstrate that these functors are the functorial parts of monads (see, e.g., [1]) in the categories of $\mathbb{R}$-trees.

References

[1] M. Barr, C. Wells, *Toposes, Triples and Theories* ,- // Grundlehren der mathematischen Wissenschaften (Book 278). - Springer, Berlin, (1985), 347p.

[2] М. М. Заричный, О. Р. Никифорчин *Функтор емкостей в категории компактов.*,- Матем. сб., 199:2 (2008), С.3-26.

[3] Lin Zhou *Integral Representation of Continuous Comonotonically Additive Functionals.*,- Trans. Amer. Math. Soc. 350 (1998), P.1811-1822

[4] O. Lozinska, A. Savchenko, M. Zarichnyi *Hyperspaces and spaces of probability measures on* $\mathbb{R}$-*trees.*,- Праці міжнародного геометричного центру. т. 7:3 (2014), С. 48-57.

Foliations with non-compact leaves on surfaces

Sergiy Maksymenko, Yeugene Polulyakh

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine

E-mail addresses: `maks@imath.kiev.ua`, `polulyah@imath.kiev.ua`

In a series of papers W. Kaplan, e.g. [1], [2], studied non-singular foliations $\mathcal{F}$ without closed leaves on $\mathbb{R}^2$. He proved that for every such foliation $\mathcal{F}$ the plane can be decomposed into at most countable family of open strips $\mathbb{R} \times (-1, 1)$ with at most countably many boundary intervals foliated by parallel lines $\mathbb{R} \times t$ and glued along those intervals.

In [3] the authors considered a class of surfaces Σ glued from open strips in a similar way. The foliations on strips give a foliation F on Σ. Let $\mathcal{H}(F)$ be the group of homeomorphisms $h : \Sigma \to \Sigma$ such that for each leaf ω of F its image $h(\omega)$ is also a leaf of F. Endow $\mathcal{H}(F)$ with the compact open topology and let $\mathcal{H}_0(F)$ be the path component of $\mathcal{H}(F)$ containing the identity homeomorphism id_Σ.

Theorem. [3] *The group $\mathcal{H}_0(F)$ is contractible.*

Thus the homotopy type of $\mathcal{H}(F)$ is determined by quotient group $\pi_0\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}(F)/\mathcal{H}_0(F)$.

References

[1] Wilfred Kaplan. *Regular curve-families filling the plane, I*, Duke Math J. **7** (1940), 154–185.

[2] Wilfred Kaplan. *Regular curve-families filling the plane, II*, Duke Math J. **8** (1941), 11–46.

[3] Sergiy Maksymenko, Eugene Polulyakh. *Foliations with non-compact leaves on surfaces*, Proceedings of Geometric Center **8** (2015), no. 3-4, 17–30.

k - Network of Superextensions

F. G. Mukhamadiev

(Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Tashkent, Uzbekistan)

E-mail address: farhod8717@mail.ru

In this work showed that some subfunctors the functor of the superextension λ prezerve the cardinality of k - networks of infinite T_1 - spaces.

A system $\xi = \{F_\alpha : \ \alpha \in A\}$ of closed subsets of a space X is called linked if any two elements from ξ intersect. Any linked system can be complemented to a maximal linked system (MLS), but this complement is, a rule, not unique [1].

Proposition 1 [1]. A linked system ξ of a space X is a MLS iff it possesses the following completeness property: if a closed set $A \subset X$ intersects with any element form ξ, then $A \in \xi$.

Denote by λX the set of all MLS of the space X. For a closed set $A \subset X$, put $A^+ = \{\xi \in \lambda X : \ A \in \xi\}$.

For an open set $U \subset X$, set $O(U) = \{\xi \in \lambda X : \ \textit{there is an } F \in \xi \textit{ such that } F \subset U\}$.

The family of subsets in the form of $O(U)$ covers the set λX $(O(X) = \lambda X)$, that's why it forms an open subbase of the topology on λX. The set λX equipped with this topology is called the superextension of X.

Theorem 1 [2]. Let X be an infinite T_1-space. $O\langle V_1, V_2, \ldots, V_k\rangle \subset O\langle U_1, U_2, \ldots, U_n\rangle$ iff $\bigcup\limits_{i=1}^{k} V_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} U_j$ and for each $j \in \{1, 2, ..., n\}$ there exists $i \in \{1, 2, ..., k\}$ such that $V_i \subset U_j$.

Let μ be a maximal linked system of a infinite T_1 - space X. The MLS μ will be said a thin maximal linked system if μ contains at least one finite element. We denote a thin maximal linked system μ by a TMLS.

We call an λ - thin kernel of a topological space X the space $\lambda^* X = \{\mu \in \lambda X : \ \mu \ is \ TMLS\}$.

Definition 1. Let P be a family of subsets of a space X and $\tau(X)$ is the topology on X. P is called a k - network if whenever K is a compact subset of X and $K \subset U \in \tau(X)$, there is a finite subfamily $P' \subset P$ such that $K \subset \bigcup P' \subset U$ [3].

Theorem 2. Suppose that topological space X have k-network of cardinality $\tau \geq \aleph_0$, then the space $\lambda^* X$ has a k-network of cardinality $\geq \tau$.

Let μ be a maximal linked system of a infinite T_1 - space X. The MLS μ will be said a thin maximal linked system if μ contains at least one compact element. We denote a compact maximal linked system μ by a CMLS.

We call an λ - compact kernel of a topological space X the space $\lambda_c X = \{\mu \in \lambda X : \ \mu \ is \ CMLS\}$.

Theorem 3. Suppose that topological space X have k-network of cardinality $\tau \geq \aleph_0$, then the space $\lambda_c X$ has a k-network of cardinality $\geq \tau$.

Corollary 1. Functors λ^*, λ_c preserve k-network of infinite T_1 - spaces.

References

[1] V. V. Fedorchuk, V. V. Filippov *General topology. Basic constructions.* // Moscow: Fizmatlit, (2006), 332 p.

[2] E. Michael *Topologies on spaces of supsets.* // Trans.Amer.Math.Soc., (1951), 1 (71). - P. 152-172.

[3] Li Zhaowen, Lin Fucai, Liu Chuan *Networks on free topological groups.* // Topology and its Applications, 180 (2015), p. 180-198.

K-theory and phase transitions at high energies

T.V. Obikhod

(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine)

E-mail address: obikhod@kinr.kiev.ua

The duality between $E_8 \times E_8$ heteritic string on manifold $K3 \times T^2$ and Type IIA string compactified on a Calabi-Yau manifold induces a correspondence between vector bundles on $K3 \times T^2$ and Calabi-Yau manifolds [1]. Vector bundles over compact base space $K3 \times T^2$ form the set of isomorphism classes, which is a semi-ring under the operation of Whitney sum and tensor product [2]. The construction of semi-ring $Vect\ X$ of isomorphism classes of complex vector bundles over X leads to the ring $KX = K(Vect\ X)$, called Grothendieck group [3]. As $K3$ has no isometries and no non-trivial one-cycles, so vector bundle winding modes arise from the T^2 compactification. Since we have focused on supergravity in $d = 11$, there exist solutions in $d = 10$ for which space-time is Minkowski space and extra dimensions are $K3 \times T^2$. The complete set of soliton solutions of supergravity theory is characterized by RR charges, identified by K-theory [4]. Toric presentation of Calabi-Yau through Batyrev's toric approximation enables us to connect transitions between Calabi-Yau manifolds, classified by enhanced symmetry group, with K-theory classification.

References

[1] Philip Candelas, Anamaria Font *Duality Between the Webs of Heterotic and Type II Vacua.*,- Nucl.Phys.B511: (1998), P. 295-325.

[2] Klaus Wirthmuller *Vector Bundles and K-Theory.*,- http://www.mathematik.uni-kl.de/˜ wirthm/de/top.html;
A. Hatcher *Vector Bundles and K-Theory.*, - (2009), 115p.

[3] Atiyah, Michael *New invariants of three and four dimensional manifolds.*, - Proc. Symp. Pure Math. (American Math. Soc.) 48: (1988), P. 285–299.

[4] E. Witten *Topological quantum field theory.*, - Communications in Mathematical Physics 117 (3): (1988a), P. 353–386.

Topological equivalence of pseudo-harmonic functions of general position in the plane

Ye. O. Polulyakh

Institute of mathematics NASU, Kyiv, Ukraine

E-mail address: polulyah@imath.kiev.ua

Yu. Yu. Soroka

Taras Shevchenko National Univerity, Kyiv, Ukraine

E-mail address: soroka.yulya@ukr.net

Let $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ be a continuous function. Let us designate by $\Im$ the following conditions.

a) At each point x of the plane f is locally topologically equivalent to $\operatorname{Re} z^n$, $n \in \mathsf{N}$, in the neighbourhood of origin (if $n = 1$, then x is called a regular point; if $n > 1$, then x is a singular point of f).

b) Number of all singular points of f is finite.

c) Consider the partition of R^2 elements of which are connected components of level sets of f. Let $\Gamma_{K\ \ R}(f)$ be the quotient space of R^2 with respect to this partition (it is called Kronrod-Reeb space of f). Then the space $\Gamma_{K\ \ R}(f)$ is Hausdorff.

It is known that if f satisfies $\Im$ then its Kronrod-Reeb space is a topological graph with stalks, see [1].

If a function f satisfies $\Im$ and each level set of f contains no more than one singular point then f is of general position

In order to distinguish functions of this class up to topological equivalence we endow their Kronrod-Reeb graphs with the additional structure which includes an orientation of their edges and a partial order on their vertices induced by the direction of growth of the corresponding function. Another element of this structure is a spin at the vertices of Kronrod-Reeb graph. Spin at a vertex is a certain cycle of incident edges.

An additional structure on Kronrod-Reeb graph allows us to define notions of weighted and weekly weighted Kronrod-Reeb graphs and introduce corresponding equivalence relations.

In addition to the relation of topological equivalence we introduce more weak relation of oriented foliated equivalence of functions from the class we consider.

Theorem 1 (see [2]). Let $f, g : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ be a functions of general position satisfying $\Im$.

f and g are oriented foliated equivalent if and only if their weakly weighted Kronrod-Reeb graphs are equivalent.

f and g are topologically equivalent if and only if their weighted Kronrod-Reeb graphs are equivalent.

Theorem 2. Let G be a finite weakly weighted tree with stalks. There exists a function $f : \mathsf{R}^2 \to \mathsf{R}$ of general position satisfying $\Im$ such that G is equivalent to weakly weighted Kronrod-Reeb graph of f.

References

[1] Е. А. Полулях Графы Кронрода – Риба функций на некомпактных двумерных поверхностях. I , Укр. мат. журн. – 2015. – 67, No 3. – С. 375-396.

[2] В. В. Шарко, Є. О. Полулях, Ю. Ю. Сорока Про топологічну еквівалентність псевдогармонічних функцій загального положення на площині, Топологія відображень маловимірних многовидів, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, том 12, №6 (2015), Київ: Інститут математики НАН України, с. 7-47

Minimal generating systems and properties of alternating groups $Syl_2 A_{2^k}$ and $Syl_2 A_n$

R. V. Skuratovskii

NPU, Kiev, Ukraine

E-mail address: ruslcomp@mail.ru

The aim of this investigation is to research the structure of Sylow 2-subgroups of A_n and to construct a minimal generating system for it. The authors of [1] didn't proof minimality of finding by them system of generators for such Sylow 2-subgroups of A_n and structure of it was not fully investigated in [1, 2]. Case of Sylow subgroup where $p = 2$ is very special because group $C_2 \wr C_2 \wr C_2 \ldots \wr C_2$ admits odd permutations. Denote by $X^{[k]}$ regular binary rooted tree with k levels.

There was a mistake in a statement about irreducibility that system of $k+1$ elements for $Syl_2(A_{2^k})$ which was in abstract [3] in 2015 year.

Theorem 1. *A maximal 2-subgroup G_k in $AutX^{[k]}$, that acts by even permutation on $X^{[k]}$ has structure of inner semidirect product $G_k \simeq (\underbrace{S_2 \wr S_2 ... \wr S_2}_{k-1}) \ltimes (\underbrace{C_2 \times ... \times C_2}_{2^{k-1}-1})$ and isomorphic to A_{2^k}.*

In accordance with Legender's formula, the power of 2 in $2^k!$ is $\frac{2^k-1}{2-1}$. We need to subtract 1 from it because we have only $\frac{n!}{2}$. $|G_k| = |\underbrace{S_2 \wr ... \wr S_2}_{k-1}| \cdot |\underbrace{C_2 \times ... \times C_2}_{2^{k-1}-1}| = |Syl_2 A_{2^k}| = 2^{2^k-2}$.

Statement 1. *A quotient group ${}^{G_k}/_{G_k^2 G_k'}$ is isomorphic to $\underbrace{C_2 \times C_2 \times ... \times C_2}_{k}$.*

Also it was deduced that derived length of $Syl_2 A_2^k$ is not always equal to k as it was said in Lemma 3 of [1] because in case A_{2^k} if $k = 2$ its $Syl_2 A_4 \simeq K_4$ but K_4 is abelian group so its derived length is 1.

Theorem 2. *A minimal generating system of Sylow 2-subgroups of alternating group A_{2^k} consists of k elements.*

There are function of Morse [4] $f : D^2 \to \mathbb{R}$ and correspondent to it a graph of Kronrod-Reeb [5] which obtained by contraction every set's component of level of $f^{-1}(c)$ in point. Group of automorphism of this graph is isomorphic to $Syl_2 S_{2^k}$ where $k = 2$ in general case we have regular binary rooted tree for arbitrary $k \in \mathbb{N}$.

References

[1] U. Dmitruk, V. Suschansky *Structure of 2-sylow subgroup of symmetric and alternating group.* UMJ. 3 (1981) P. 304-312.

[2] R. Skuratovskii *Generators and relations for sylows p-subgroup of group S_n*. Naukovi Visti KPI. 4 (2013) P. 94 -105.

[3] V. Ivanchenko *System of generators for 2-sylow subgroup alternating group*, Four ukraine conferense of young scientists. Kiev: *KPI* (2015), 60 p.

[4] Sharko V. V. *Smooth topological equivalence of functions of surfaces.* // Ukrainian Mathematical Journal, 5 (2003), P. 687-700.

[5] Maksymenko S. I. *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces*, Annals of Global Analysis and Geometry, vol. 29, no. 3 (2006), P. 241-285.

Quantization of quasi-stationary states of the local Dirac-Fock equation with ab initio effective non-singular potentials: New scheme

A. V. Smirnov, T. A. Florko, A. A. Svinarenko

OSENU, Odessa, Ukraine

E-mail address: `quantsmi@mail.ru`

The paper goes on our work on carrying out an effective procedure of quantization of quasi-stationary states of the relativistic bispinor equations. Here we examine the quantization of quasi-stationary states of the Dirac-Fock equation [1] with ab initio effective non-singular potential and developing a new scheme to computing energy and spectral characteristics of the resonances in spectra of heavy finite Fermi-systems, includinbg high-lying states, autoionization, Rydberg resonances. The new approach is based on the relativistic many-body perturbation theory with local Dirac-Fock zeroth approximation combined with the generalized relativistic energy approach (Gell-Mann and Low S-matrix formalism) [2] and applied to quantitative studying spectra of heavy few-body systems such as the He-, Be-like multicharged ions.

As usually, the relativistic wave function zeroth basis is calculated from the Dirac-Fock "local" equation with a potential, which includes non-singular electric potential plus exact Fock exchanege functional [3]). All correlation corrections of the second order and dominated classes of the higher orders diagrams (electrons screening, particle-hole interaction, mass operator iterations, continuum pressure etc) are taken into account.

It has been proven a generalized minmax theorem establishing a link between the relativistic many-body perturbation theory zeroth-approximation orbital basis quality and value of the gauge non-invariant contribution to autoionization resonance width. Some applications of new approach are presented [4], in particular, energies for the low-lying, Rydberg and autoionization states in spectra of the He-,Be-like multicharged ions, and numerical estimates of the different contributions of the relativistic and exchange-correlation corrections.

References

[1] A. N. Svinarenko *An advanced approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac-Kohn-Sham equation.*,-Proceedings of International Geometry Center. 6,N3: (2013), P.67-72.

[2] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, A. A. Svinarenko *Frontiers in Quantum Systems in Chem. And Physics.*,- Progress in Theoretical Chem. and Phys. (Berlin, Springer) 18: (2008), P. 505-5703

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[4] A. V. Svinarenko *Study of spectra for lanthanides atoms with relativistic many- body perturbation theory: Rydberg resonances.*,- Journal of Physics: C Ser.(IOP, London, UK). 548: (2014), P.012039 (6p.).

Generalized convex envelops and shadow's problem

Yu. B. Zelinskii

Institute of Mathematics Ukrainian National Academy of Science, Kyiv, Ukraine

E-mail address: `zel@imath.kiev.ua`

Definition. We shall say that a family of sets $\mathfrak{J} = \{E_\alpha\}$ will assign the shade tangent to a manifold M in the point $x \in M$, if each straight line, tangent to variety M in the point $x \in M \backslash \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha$, has a nonempty intersection with some set F_α from family $\mathfrak{J}$.

Problem. Find the minimal number of balls, which two by two are not crossed, with the centre on sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, which will provide the shade tangent to the sphere S^2 in each point $x \in S^2 \backslash \bigcup\limits_{\alpha} F_\alpha$.

For reception of the estimation necessary minimal number overhand we will use next easy checked statement for plane.

Theorem. *There exists the family from 14 open (closed) balls, which two by two are not crossed, with the centre on a sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, which will provide the shade tangent to the sphere S^2 in each point $x \in S^2 \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{14} F_i$.*

The Opened questions. 1) What minimal number of balls solves the problem 2?

2) What minimal number of balls with the same radius solves the problem 2?

3) What is minimal family of balls $\mathfrak{J} = \{B_i\},\ i = 1, 2, \ldots, m$, which two by two are not crossed, with the centre on a sphere $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, will provide that each straight line getting through the arbitrary point $x \in B^3 \backslash \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$, where B^3 be the closed ball bounded by the sphere S^2, will cross at least one of chosen balls?

Remark 2. From lemma follows that in Euclidean plane, for solution of the problem 3 it is necessary and enough three balls.

References

[1] G. Khudayberganov: *On uniform-polynomial convex shell of the union balls* // Manuscript dep. in VINITI 21.02.1982, N.1772, 85 Dep. [in Russian].

[2] Yu. B. Zelinskii, I. Yu. Vygovs'ka, M. V. Stefanchuk: *Generalized convex sets and shadows problem* // Ukrainian Math. Journal, (2015), **67**, No.12. – P. 1659–1666 [in Russian].

[3] Yu. B. Zelinskii: *The problem of shadow for a family of sets*, [in Russian], Proc. of Inst. of Mathem. NAS of Ukraine, **12**, No. 4, (2015), 197–204.

[4] Yu. B. Zelinskii: *Generalized Convex Envelopes of Sets and the Problem of Shadow* // Journal of Mathematical Sciences, (2015), **211**, No.5, – P. 710–717.

[5] Yu. B. Zelinskii: *Problem of shadow (complex case)* // Advances in Mathematics: Scientific Journal, (2016), **5**, No.1, – P. 1–5.

Паралельні поверхні та їх варіації при нескінченно малих деформаціях

Л. Л. Безкоровайна, В. А. Лазукіна

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

E-mail address: liliyabezk@gmail.com, lazukina93@gmail.com

Розглянемо сімейство паралельних поверхонь $\widetilde{S}$, які задані рівнянням $\widetilde{r} = r + hn$, де $r = r(x^1, x^2)-$ деяка базова регулярна поверхня S класу C^3, а $n-$ орт нормалі цієї поверхні. Припустимо, що поверхня S піддана нескінченно малій деформації S^* з полем зміщення U:

$$r^*(x^1, x^2, t) = r(x^1, x^2) + tU(x^1, x^2).$$

При цій деформації паралельні поверхні теж деформуються:

$$\widetilde{r}^* = r^* + hn = r + tU + hn = r + hn + tU = \widetilde{r} + tU.$$

В даній роботі виводяться закони змінювання геометричних величин паралельної поверхні. Передусім визначені формули, що виражають залежність величин поверхонь S та S^*:

$$g^*_{ij} = g_{ij} + t(r_iU_j + r_jU_i) + O(t^2) = g_{ij} + t2\varepsilon_{ij} + O(t^2), \quad g^* = g + 2tgg^{ij}\varepsilon_{ij} + O(t^2),$$

де $2\varepsilon_{ij}-$ варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні S, $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні $\widetilde{S}^*$ та їх дискримінант мають вигляд:

$$\widetilde{g}^*_{ij} = \widetilde{g}_{ij} + t2\varepsilon_{ij} + h(n_iUj + n_jU_i) + O(t^2) = \widetilde{g}_{ij} + t(2\varepsilon_{ij} + h\sigma_{ij}) + O(t^2) = \widetilde{g}_{ij} + t2\widetilde{\varepsilon}_{ij} + O(t^2),$$

$$\widetilde{g}^* = \widetilde{g} + 2t\widetilde{g}\widetilde{g}^{ij}\widetilde{\varepsilon}_{ij} + O(t^2),$$

де $2\widetilde{\varepsilon}_{ij} = 2\varepsilon_{ij} + h\sigma_{ij}-$ варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми здеформованої паралельної поверхні, а $\sigma_{ij} = n_iU_j + n_jU_i$.

Для $\widetilde{g}^*$ знайдено також представлення через дискримінант поверхні S:

$$\widetilde{g}^* = gw^2 + 2tg[g^{ij}\varepsilon_{ij}(1 + 3h^2K - 4hH) + 2h^2Kd^{ij}\varepsilon_{ij}(H - hK)].$$

Звідси випливає, що при нескінченно малому згинанні поверхні S, коли $\varepsilon_{ij} = 0$, паралельні поверхні $\widetilde{S}$ допускають ареальні нескінченно малі деформації.

Також знайдені вирази елементів матриці оберненої до матриці $\widetilde{g}_{ij}$:

$$\widetilde{g}^{ij} = \frac{1}{w^2}(g^{ij} - 2hKd^{ij} + h^2c^{i\alpha}c^{j\beta}\upsilon_{\alpha\beta}).$$

В роботі доведено, що дискримінантні тензори поверхні $\widetilde{S}$ виражаються через дискримінантні тензори поверхні S:

$$\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}w, \ \ \widetilde{c}^{ij} = c^{ij}\frac{1}{w}, \ \ w = 1 - 2hK + h^2K.$$

На паралельних поверхнях ми розглядаємо лише неособливі точки, коли $w \neq 0$. В роботі [1] проводиться класифікація усіх особливих точок паралельної поверхні.

Список літератури

[1] Fukui Toshirumi, Hosegawa Masaru *Singularites of parallel surfaces.* - Tohoku Math. j. 2012, 64, №3, с. 387-408.

Явний вигляд поля зміщення А-деформації катеноїда

Л. Л. Безкоровайна, Ю. С. Хомич

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, Одеса, Україна

E-mail address: liliyabezk@gmail.com, khomych.yuliia@gmail.com

Нехай поверхня катеноїда задана векторно-параметричним рівнянням

$$\overline{r} = \left\{ \operatorname{ch} x^1 \cos x^2, \operatorname{ch} x^1 \sin x^2, x^1 \right\}.$$

Розглянемо ареальну нескінченно малу деформацію катеноїда з полем зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$

$$\overline{r^*}(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2).$$

Припустимо, що на А-деформацію накладена умова: відхилення точки катеноїда від дотичної площини залишається стаціонарним у будь-якому напрямі.

Доведена

Теорема 1. *Поверхня катеноїда допускає нетривіальну ареальну нескінченно малу деформацію, при якій відхилення від дотичної площини зберігається у будь-якому напрямі, з полем зміщення*

$$\overline{U} = \left\{ \left((cx^1 + c_0) chx^1 - cshx^1 \right) sinx^2; - \left((cx^1 + c_0) chx^1 - cshx^1 \right) cosx^2; -cx^2 \right\} + \overline{C}, \tag{1}$$

де c, c_0-*довільні сталі,* $c \neq 0$, *а* $\overline{C}-$ *сталий вектор. При цій деформації у головному не змінюються гаусова та середня кривини катеноїда.*

Для того, щоб явно виразити деформуюче поле $\overline{U}$ катеноїда, ми спочатку припустимо, що частинні похідні $\overline{U}_i$ представлені у вигляді лінійної комбінації базисних векторів $\overline{r}_i, \overline{n}$, де $\overline{r}_i = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^i}, \overline{n}-$ орт нормалі поверхні

$$\overline{U_i} = c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} \overline{r_\beta} + c_{i\alpha} T^{\alpha} \overline{n}. \tag{2}$$

Симетричний тензор $T^{\alpha\beta} \in C^2$ і контраваріантний вектор $T^\alpha \in C^2$ задовольняють наступну систему рівнянь, яка є умовою інтегрованості (2)

$$\begin{cases} T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - T^\alpha b^\beta_\alpha = 0, \\ c_{i\alpha} T^{\alpha\beta} b_{\beta j} + c_{i\alpha} T^\alpha_{,j} = 0, \\ c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \end{cases} \tag{3}$$

де $c_{\alpha\beta}-$ дискримінантний тензор поверхні, $b_{ij}-$ коефіцієнти другої квадратичної форми.

Для поверхні катеноїда знайдено розв'язок системи рівнянь (3), а саме компоненти тензорів деформації $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$

$$T^{11} = \frac{c - (cx^1 + c_0) thx^1}{ch^2 x^1},\ T^{12} = 0,\ T^{22} = \frac{-(cx^1 + c_0) thx^1}{ch^2 x^1},\ T^1 = \frac{cx^1 + c_0}{ch^2 x^1},\ T^2 = 0, \tag{4}$$

де c, c_0- довільні сталі, $c \neq 0$.

Після внесення виразів $T^{\alpha\beta}, T^\alpha$ з (4) в систему рівнянь (2) вона набуває вигляду

$$\begin{cases} \overline{U}_1 = \left(-(cx^1 + c_0) thx^1 \right) \overline{r_2}, \\ \overline{U}_2 = \left((cx^1 + c_0) thx^1 - c \right) \overline{r_1} - (cx^1 + c_0) \overline{n}. \end{cases} \tag{5}$$

Оскільки здобутий розв'язок (4) задовольняє (3), то система рівнянь (5) є цілком інтегрованою. Розв'язок цієї системи (5) нами представлений у явному вигляді (1).

Незважаючи на те, що варіації гаусової та середньої кривин дорівнюють нулю, ареальна деформація катеноїда зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини у будь-якому напрямі є нетривіальною, оскільки варіації коефіцієнтів першої квадратичної форми не дорівнюють нулю.

$A-$деформації другого порядку, при яких сітка ліній 2-стаціонарної довжини збігається з сіткою асимптотичних ліній

С. О. Бура, Л. Л. Безкоровайна

(Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: svetlanabur0304@mail.ru, liliyabezk@gmail.com

Нехай $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)-$ векторно-параметричне рівняння поверхні $S \in C^3$ у тривимірному евклідовому просторі. Розглянемо нескінченно малу ареальну деформацію (А-деформацію) другого порядку цієї поверхні з векторами зміщення $\overline{U}(x^1, x^2)$, $\overline{V}(x^1, x^2)$:

$$\overline{r}^*\left(x^1, x^2, t\right) = \overline{r}\left(x^1, x^2\right) + t\overline{U}\left(x^1, x^2\right) + t^2\overline{V}\left(x^1, x^2\right).$$

Розкладемо частинні похідні векторів $\overline{U}$, $\overline{V}$ по базису $\overline{r}_i$, $\overline{n}$, $i = 1, 2$:

$$\overline{U}_i = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n},$$
$$\overline{V}_i = c_{i\alpha}\left(P^{\alpha\beta} + \nu c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}P^\alpha\overline{n},$$

де $T^{\alpha\beta}$, $P^{\alpha\beta}-$ поля деяких двічі контраваріантних тензорів класу C^2, T^α, $P^\alpha-$ поля контраваріантних векторів на S класу C^2, $\nu \in C^2-$ деяка функція. При деформації перша квадратична форма поверхні S змінюється:

$$I^* = I + t\delta I + t^2\delta^2 I + O(t^3) = ds^2 + t2\epsilon_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + t^2 4\mu_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta + O(t^3).$$

Означення. *Геометричну величину поверхні будемо називати 2-стаціонарною при нескінченно малій деформації другого порядку, якщо її друга варіація дорівнює нулю.*

Припустимо, що $\delta^2 I = 0$. Рівняння $\mu_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0$ являє собою диференціальне рівняння відносно $dx^1 : dx^2$, яке в загальному вигляді визначає два однопараметричних сімейства ліній на поверхні (при $\mu_{12}^2 - \mu_{11}\mu_{22} > 0$). В даній роботі досліджувалась задача про існування А-деформації другого порядку, при яких сітка ліній 2-стаціонарної довжини збігається з сіткою асимптотичних ліній. Ця задача звелася до системи рівнянь:

$$\begin{aligned} &P^{\alpha\beta}_{,\alpha} - P^\alpha b^\beta_\alpha + \nu_{,\alpha}c^{\alpha\beta} = 0, \quad P^{\alpha\beta}\left(c_{j\alpha}a_{i\beta} + c_{i\alpha}a_{j\beta}\right) - 2a_{ij}\nu - 4b_{ij}\lambda = -2A_{ij}, \\ &P^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} + P^\alpha_{,\alpha} = 0, \quad -4\nu + L = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

де $2A_{ij} = c_{i\alpha}c_{j\gamma}\left(a_{\mu\beta}T^{\alpha\beta}T^{\gamma\mu} + T^\alpha T^\gamma\right)$, $L = a_{\alpha\gamma}\left(a_{\beta\mu}T^{\alpha\beta}T^{\gamma\mu} + T^\alpha T^\gamma\right) - \frac{4\epsilon}{a}$.

Праві частини цієї системи рівнянь виражаються виключно через тензори $T^{\alpha\beta}$, T^α. Ці тензори будемо вважати відомими, оскільки вони є розв'язками основної системи рівнянь $A-$деформації першого порядку. Система рівнянь (1) являє собою систему семи диференціальних рівнянь відносно семи невідомих функцій: $P^{\alpha\beta}$, P^α, ν, λ. В роботі доведено, що довільна регулярна поверхня класу C^3 $(K \neq 0,\ H \neq 0)$ допускає $A-$деформації другого порядку, при яких сітка ліній 2-стаціонарної довжини збігається з сіткою асимптотичних ліній. При цьому тензорні поля P^{ij}, P^i і функції ν, λ у явному вигляді виражаються через T^{ij}, T^i:

$$P^{ij} = \frac{K}{2H}(d^{\alpha i}c^{j\beta} + d^{\alpha j}c^{i\beta})A_{\alpha\beta} - \frac{a^{ij}}{2H}P^\alpha_{,\alpha} + \frac{(k_2 - k_1)}{2H}c^{ij}\nu;$$
$$P^i = P^{\alpha\beta}_{,\alpha}d^i_\beta + \nu_{,\alpha}c^{\alpha\beta}d^i_\beta; \quad \nu = \frac{1}{4}L; \quad \lambda = -\frac{1}{2H}\nu + \frac{1}{4H}a^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}.$$

Гомотопічні властивості скінченних топологічних просторів та двоїстих до них

А. О. Гагай, О. О. Хохлюк

КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: balerynka@bigmir.net, voronchychechka@rambler.ru

Теорема 1.

1. *Якщо X — зв'язний скінченний топологічний простір з числом точок ≤ 3, то він слабко гомотопічно еквівалентний точці.*
2. *Існує єдиний зв'язний нестягуваний чотирьохточковий топологічний простір, і він є слабко гомотопічно еквівалентним колу.*
3. *Кожен зв'язний скінченний граф, що має k циклів, слабко гомотопічно еквівалентний скінченному топологічному простору з $k+3$ точок.*

Нехай X — скінченний топологічний простір з топологією τ. Розглянемо сім'ю множин $\tau^* = \{X \setminus U \colon U \in \tau\}$. Оскільки X — скінченний, то легко перевірити, що τ^* є топологією на X, яку називатимемо ***двоїстою***, а пару (X, τ^*) – ***двоїстим топологічним простором*** і позначатимемо X^*.

Теорема 2.

1. *Тотожне відображення* $\mathrm{id} \colon X \to X$ *індукує біекцію між компонентами зв'язності просторів X та X^*. Зокрема, X — зв'язний тоді і лише тоді, коли X^* — зв'язний.*
2. *Простір X є T_0-простором тоді і лише тоді, коли X^* — T_0-простір.*
3. *$(\tau^*)^* = \tau$, а тому (X, τ) є двоїстим до (X, τ^*).*

Список літератури

[1] K. A. Hardie, J. J. C. Vermeulen and P. J. Witbooi, *A nontrivial pairing of finite T_0-spaces.*,— Top. Appl. 125: 3, (2002), P. 533–542.

[2] R. E. Stong, *Finite topological spaces.*,— Trans. Amer. Math. Soc. 123: 2, (1966), P. 325–340.

[3] Barmak Jonathan, *Algebraic Topology of Finite Topological Spaces and Applications.*,— Springer, (2011), 191p.

Топологічно нееквівалентні функції з трьома ізольованими критичними точками на межі орієнтованої поверхні

Б. І. Гладиш, О. О. Пришляк

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: `biv92@ukr.net, prishlyak@yahoo.com`

На замкненій зв'язній поверхні, крім сфери, функція з мінімальним числом критичних точок (оптимальна функція) буде мати три таких точки. Аналогічно, для компактних зв'язних поверхонь з межею, крім двовимірного диска, оптимальна функція має три критичні точки. З цих трьох точок одна є мінімумом, одна - максимумом, а третю будемо називати сідловою.

Теорема. Для гладкої функції, заданої на поверхні M з межею ∂M, для якої $p_0 \in \partial M$ є ізольованою сідловою критичною точкою як функції f, так і її обмеження на межу $f|_{\partial M}$, можна знайти локальне представлення у вигляді:

$$f(x, y) = Re(x + iy)^n, y \geq 0 \tag{1}$$

для деякого натурального n.

Для отримання глобальної топологічної класифікації ми використовуємо хордові діаграми. Функція на орієнтованій поверхні роду g задається хордовою діаграмою з $2g + 1$ хордами, у якої $2g$ хорд не орієнтовані, а одна орієнтована. За хордовою діаграмою, поверхню, і функцію на ній, задаємо склеївши на двовимірному диску пари дуг, що є околами кінців неорієнтованих хорд на одиничному колі. Критична точка відповідає початку орієнтованої хорди, а інша точка критичного рівня, що лежить на межі поверхні відповідає кінцю орієнтованої хорди.

В результаті, ми отримали, що на торі з діркою існує одна (з точністю до топологічної і пошарової еквівалентності) функція з трьома критичними точками, на поверхні роду 2 з діркою - 5 пошарово нееквівалентні та 8 топологічно нееквівалентних функцій, а на поверхні роду 3 з діркою - 94 пошарово нееквівалентних та 182 топологічно нееквівалентних функцій.

Зауважимо, що для замкнених орієнтованих поверхонь роду 1, 2, 3 маємо 1 (1), 3 (4), 16 (25) пошарово (топологічно) не еквівалентних функцій, відповідно.

Список літератури

[1] Д. М. Полтавець *Топологія динамічних систем на поверхнях.*,- дис. на здобуття наукового ступеня канд. фіз.-мат. наук: 01.01.02. - Диференціальні рівняння: Київ, 1996. - 77 с.

[2] О. А. Кадубовський *Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях.*,- Збірник праць Інституту математики НАН України, (2015), 12 №6 , С. 105-145.

[3] Б. І. Гладиш, О. О. Пришляк *Функції з невиродженими критичними точками на межі поверхні.*,- Укр.мат.журн. 68: 1, (2016), С. 28-37.

[4] В. М. Кузаконь, В. Ф. Кириченко, О. О. Пришляк *Гладкі многовиди. Геометричні та топологічні аспекти.*,- Праці інституту математики НАН України, 97 (2013), 499с.

Дослідження груп, всі 3-максимальні підгрупи яких є групами Мілера-Морено

С. В. Драганюк

ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна

E-mail address: olachepok@ukr.net

Дослідження груп, всі 3-максимальні підгрупи яких є групами Мілера-Морено, відноситься до класу задач теорії груп, які вивчають групи методом введення обмежень на певні системи їх підгруп.[1]

p-група - це група, всі елементи якої мають порядок, який дорівнює деякому степеню простого числа p.

Група Міллера-Морено - це неабелева група, всі власні підгрупи якої є абелевими.

Підгрупою Фраттіні певної групи називається перетин всіх максимальних підгруп даної групи, якщо такі є, або сама група у супротивному випадку.[2]

Скінченні примарні групи, всі 3-максимальні підгрупи яких є групами Мілера-Морено, знаходяться серед скінченних р-груп, всі 4-максимальні підгрупи яких є абелевими. Групи класу, що досліджується, мають наступні властивості:

1) при простому р $>$3 вони є регулярними;

2) вони мають не більше чотирьох твірників,

3) вони мають абелевий нижній шар;

4) їх підгрупа Фраттіні є групою Міллера- Морено, або абелевою.

При дослідженні виділено декілька конкретних типів груп даного класу, з них вилучені ізоморфні групи. При цьому суттєво використовувалося розв'язання системи конгруенцій за простим модулем.

Властивості стандартних підгруп довільної групи в значній мірі визначають як властивості самої групи, так і її будову. Чим більшим є порядок центру скінченої групи фіксованого порядку r, тим меншого порядку неабелеві підгрупи вона містить.

Досліджено деякі властивості ідемпотентних скінченних непримарних груп, другий комутант яких знаходиться у центрі, зокрема стосовно будови їх максимальних підгруп та Силовських підгруп. Для примарних груп цього класу отримано будову комутанту та підгрупу Фраттіні, описано декілька типів підгруп з двома та трьома твірниками та виключено з них ізоморфні групи. Ці типи відносяться до класу підгруп, всі 3-максимальні підгрупи яких є абелевими.

Вивчення примарних груп має велике значення для теорії груп. Зокрема, воно дозволяє спростити описання одного з основних класів груп, а саме скінченних простих груп.

Список літератури

[1] Каргаполов М.И. *Локально конечные группы, имеющие нормальные системы с конечными факторами*,- Сиб. мат. журн. -1961. - 2, № 6.- С. 853 - 873.

[2] Сенашов В.И.*Основы теории групп.* - Версия1.0 [Электронный ресурс]: курс лекций - Электрон. дан. (1Мб).- Красноярск: ИПК СФУ, 2008.

Автоморфізми дерев

Ю. В. Драниця

КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: dragcia@meta.ua

Розглянемо мінімальний клас груп $g = \{G\}$, що задовільняє такі умови:

1. $1 \in g$.

2. Якщо $A, B \in g$, то $A \times B \in g$.

3. Якщо $A \in g$, то $A \wr \mathbb{Z}_2 \in g$.

Групи з класу g виникають як групи автоморфізмів графів Кронрода-Ріба простих функцій Морса на 2-диску, [5].

З теореми Жордана [1] випливає, що для кожної групи $G \in g$ існує скінченне дерево T_G таке, що $G \cong Aut(T_G)$. Зв'язок між числом елементів групи автоморфізмів дерева та числом ребер вивчався в багатьох роботах, див.напр.[2]-[4] та посиланнях в цих статтях. Нехай $E(T_G)$ - мінімальне число ребер серед усіх графів з $Aut(T) = G$. Мета роботи: дослідити залежність між порядком групи G та числом $E(T_G)$.

Приклад 1. *Нехай* $G = \underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2}_{n}$, *тоді* $|G| = 2^n$ *і* $E(T_G) = 3n - 1 = 3\log_2 |G| - 1$.

Приклад 2. *Нехай* $G = \underbrace{(\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2) \wr \mathbb{Z}_2 \ldots) \wr \mathbb{Z}_2}_{n}$, *тоді* $|G| = 2^{2^n - 1}, E(T_G) = 2^{n+1} - 2 = 2log_2|G|$.

Приклад 3. *Нехай* $G = \underbrace{(\overbrace{\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2 \wr \ldots \wr \mathbb{Z}_2}^{m}) \times (\overbrace{\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2 \wr \ldots \wr \mathbb{Z}_2}^{m}) \times \ldots \times (\overbrace{\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2 \wr \ldots \wr \mathbb{Z}_2}^{m})}_{n}$, *тоді* $|G| = (2^m - 1)^n$ *і* $E(T_G) = 2^{m+1} - n - 1$.

Приклад 4. *Нехай* $G = (((\underbrace{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \ldots \times \mathbb{Z}_2)}_{m}) \underbrace{\wr \mathbb{Z}_2) \wr \mathbb{Z}_2) \ldots \wr \mathbb{Z}_2}_{n}$, *тоді* $|G| = (2^{2^m - 1})^n$ *і* $E(T_G) = 2^{m+1} - n - 1$.

Теорема 1. *Нехай A - довільна група із g, тоді* $E(T_{A \wr \mathbb{Z}_2}) \leqslant 2E(T_A) + 2$.

Теорема 2. *Якщо групи $A, B \in g, |A| \leqslant |B|$, то $E(T_{A \times B}) \leqslant E(T_A) + E(T_B) + \frac{l(l-1)}{2} + 3$, де l - найменше натуральне число, що в графі T_B не існує вершини степеня, рівного цьому числу.*

Також отримані оцінки значення $E(T_G)$ для всіх груп з класу g до 2^9 порядку включно.

Список літератури

[1] *Camille Jordan.* Sur les assemblages de lignes, J. Reine Angew. Math. 70 (1869), 185-190

[2] *D. Erwin, F Harary.* Destroying automorphisms by fixing nodes, Discrete mathematics. 306 (24), (2006) 3244-3252

[3] *F. Harary.* Methods of Destroying the Symmetries of a Graph, Bulletin of the Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. 24 (2001) 183-191

[4] *M. Albertson and K. Collins.* Symmetry breaking in graphs, Electronic J. Combin. 3 (1996).

[5] *S. Maksymenko.* Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms, (2013) arXiv:1311.3347v2

Потоки на двовимірному диску з однією нерухомою точкою на межі

Н. В. Зубарук, О. О. Пришляк

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: zubaruknatashka@mail.ru, prishlyak@yahoo.com

Ми розглядаємо потоки на двовимірному диску D, у якому є єдина нерухома точка, що лежить на межі. Нашою метою є знаходження умов топологічної еквівалентності таких потоків та обчислення числа топологічно не еквівалентних потоків з заданим числом сепаратрис.

Зафіксуємо орієнтацію диску D так, що вона породжує орієнтацію на межі, яка задається напрямком руху по граничній траєкторії. Оскільки сепаратриси починаються і закінчуються в нерухомій точці, то вони утворюють набір петель на D. Для кожного потоку побудуємо граф G, який буде зображати розташування і напрямки сепаратрис. Для цього в кожній області, на які сепаратриси розбивають двовимірний диск D, виберемо по одній вершині графа G. Через середину кожної сепаратриси проведемо ребро графа G, що з'єднує вершини із сусідніх областей. Через граничну сепаратрису проведемо ребро, що починається в "зовнішній" області. На кожному ребрі графа G виберемо орієнтацію так, що вона разом з орієнтацією відповідної сепаратриси, заданою напрямком руху за сепаратрисою, породжує зафіксовану орієнтацію диску D. Оскільки двовимірний диск D є однозв'язним, то і граф G буде однозв'язним, тобто деревом.

Теорема 1. *Граф G має такі властивості:*

1) зафіксоване перше ребро і орієнтація на ньому з точки валентності 0;

2) якщо всі ребра сходяться в дану вершину, або всі інцендентні до неї ребра виходять з неї, то така вершина називається правильною, при підрахунку числа графів це число множиться на добуток валентностей правильних вершин;

3) якщо в графі G ребра мають валентності $k_1, k_2, \ldots, k_n$, то число ребер графа дорівнює $L = \frac{k_1+k_2+\ldots+k_n}{2}$. Крім того, $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n) - n - L = -1$.

За допомогою графа G обчислюється число топологічно не еквівалентних потоків: для однієї внутрішьої сепаратриси існує три потоки, для двох - 15 потоків, для трьох - 91 потік.

Список літератури

[1] Дж. Милнор, А. Уоллес *Дифференциальная топология. Начальный курс.*,- Издательство "Мир". Москва. (1972)

[2] Ж. Палис, В. Ди Мелу *Геометрическая теория динамических систем.*,- Издательство "Мир". Москва. (1986)

[3] А. О. Пришляк *Топологическая классификация m-полей на двух- и трехмерных многообразиях с краем* // Укр.мат. журн., т.55, No.6, 2003.- с.799-805.

[4] О. О. Пришляк, Д. М. Скочко *Топологія потоків Морса з нерухомими точками на межі повного кренделя* // Зб. праць Ін-ту мат. НАН України. — 2015.—Т.12, №6,- С.164-182.

Число топологічно нееквівалентних «напівмінімальних» функцій на орієнтовних поверхнях роду 1 і 2

О. А. Кадубовський

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет», Слов'янськ, Україна

E-mail address: kadubovs@ukr.net

Нехай M_g – замкнена гладка орієнтовна поверхня роду $g \geq 1$, а $C^m_{1;1}(M_g)$ – клас гладких функцій на M_g (з трьома критичними значеннями), які мають точно один локальний мінімум (максимум), m локальних максимумів (мінімумів) та одну (в загальному випадку *вироджену*) критичну точку типу сідла (індекс Пуанкаре якої становить $1 - n = 1 - m - 2g$) — клас «напівмінімальних» функцій на M_g. Функції f_1 і f_2 з класу $C^m_{1;1}(M_g)$ називають топологічно еквівалентними, якщо існують гомеоморфізми $h : M_g \to M_g$ і $l : R^1 \to R^1$ (l зберігає орієнтацію), такі що $f_2 = l \circ f_1 \circ h^{-1}$. Якщо h зберігає орієнтацію, функції f_1 і f_2 називають топологічно спряженими або ж O-топологічно еквівалентними.

Твердження 1. Число $d^*(n)$ O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C^m_{1;1}(M_1)$ можна обчислити за формулою

$$d^*(n) = \frac{1}{n}\left(C^4_{n+1} + \sum_{j|n;j\in\{2,3,4\}} \phi(j)\cdot\rho(n;\tfrac{n}{j})\right), \tag{1}$$

де $n = m+2$, $m \geq 1$, $\phi(q)$ – функція Ейлера, $\rho(n;\frac{n}{2}) = \frac{1}{2}n(n-2)$, $\rho(n;\frac{n}{3}) = \frac{1}{3}n$, $\rho(n;\frac{n}{4}) = \frac{1}{4}n$.

Лема 1. Число $d^{**}(n)$ топологічно нееквівалентних функцій з класу $C^m_{1;1}(M_1)$ можна обчислити за допомогою співвідношення

$$2\cdot d^{**}(n) - d^*(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}k(k+1), & n = 2k+1 \\ \frac{1}{2}(k-1)(k+2), & n = 2k. \end{cases} \tag{2}$$

Твердження 2. Число $d^*(n)$ O-топологічно нееквівалентних функцій з класу $C^m_{1;1}(M_2)$ можна обчислити за формулою

$$d^*(n) = \frac{1}{n}\left(C^6_{n+1}\cdot\frac{3n^2-n-6}{8} + \sum_{j|n;j\in\{2,3,4,5,6,8\}} \phi(j)\cdot\rho(n;\tfrac{n}{j})\right), \tag{3}$$

де $n = m+4$, $m \geq 1$, $\rho(n;\frac{n}{2}) = \frac{1}{8}n(n-2)$, $\rho(n;\frac{n}{5}) = \frac{3}{5}n$, $\rho(n;\frac{n}{j}) = \frac{1}{j}n$ для $j \in \{3,4,6,8\}$.

Лема 2. Число $d^{**}(n)$ топологічно нееквівалентних функцій з класу $C^m_{1;1}(M_2)$ можна обчислити за допомогою співвідношення

$$2\cdot d^{**}(n) - d^*(n) = \begin{cases} 5C^4_{k+2} - C^3_{k+1}, & n = 2k+1 \\ 5C^4_{k+1} + 3C^3_k + 2C^2_{k-1}, & n = 2k. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. Нехай $n = 2g + m$, $m \in N$. Тоді при $g \to \infty$

$$d^{**}(n) \sim d(n) = \frac{S_H(n-1;n-2g)}{4g}, \tag{5}$$

де величина $S_H(p;q)$ («the Hultman number») може бути обчислена так, як це зроблено в [1] (Theorem 4.1.).

Список літератури

[1] S. Grusea, A. Labarre *The distribution of cycles in breakpoint graphs of signed permutations* // Discrete Applied Mathematics. — 2013. — Vol. 161, Iss. 10–11. – P. 1448–1466.

Про спеціальні майже ейнштейнові простори

В. А. Кіосак, О. В. Лесечко

КНУ, Київ, Україна

ОДАБА, Одеса, Україна

E-mail address: vkiosak@ukr.net

E-mail address: olesechko@ukr.net

Псевдоріманові простори V_n $(n > 2)$ називають майже ейнштейновими, якщо в них виконуються вимоги

$$R_{ij} = \frac{R}{n} g_{ij} + U_i U_j,$$

де U_i — за визначенням градієнтний вектор, g_{ij} — метричний тензор V_n, R_{ij} — тензор Річчі V_n, R — скалярна кривина [1], [2].

Майже ейнштейнові простори цікаві своїм застосуванням в гідромеханіці та теорії відносності, тому вивчення геометричних властивостей їх спеціальних класів є актуальним об'єктом досліджень.

Доведені наступні теореми

Теорема 1. *Для того, щоб майже ейнштейнів простір V_n був Річчі симетричним, необхідно и достатньо, щоб вектор U_i був коваріантно сталим.*

Річчі симетричними називають простори, в яких коваріантна похідна тензора Річчі дорівнює нулю.

Теорема 2. *Майже ейнштейнові простори V_n , для яких*

$$R_{ij,\,k} + R_{jk,\,i} + R_{ki,\,j} = 0,$$

являються Річчі симетричними.

Теорема 3. *Якщо в майже ейнштейнових просторах*

$$R_{ij,\,k} - R_{ik,\,j} = 0,$$

то в них виконуються умови

$$R_{ij,k} = M U_i U_j U_k.$$

Тут M — деякий інваріант, кома — знак коваріантної похідної.

На паралельних поверхнях ми розглядаємо лише неособливі точки, коли $w \neq 0$. В роботі [2] проводиться класифікація усіх особливих точок паралельної поверхні.

Список літератури

[1] M. C. Chaki, R. K. Maity *On quasi Einstein manifolds.*,- Publ. Math. Debrecen 57 (2000), P. 297-306.

[2] В. А. Кіосак *Про конформні відображення майже Ейнштейнових просторів.*,- Математичні методи та фізико-механічні поля. 54 (2011), No.2, С. 17-22.

Про графи Маркова та плоскі вкладення скінченних дерев

С. О. Козеренко

КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: kozerenkosergiy@ukr.net

Нехай X скінченне дерево (тобто, скінченний зв'язний ациклічний граф), $\sigma : V(X) \to V(X)$ деяке відображення множини його вершин в себе. Графом Маркова $\Gamma = \Gamma(X, \sigma)$ називається орграф з множиною вершин $V(\Gamma) = \{v_e : e \in E(X)\}$ та множиною дуг $A(\Gamma) = \{(v_{e_1}, v_{e_2}) : u_2, v_2 \in [\sigma(u_1), \sigma(v_1)]_X, e_i = u_i v_i, i = 1, 2\}$ (тут через $[a, b]_X$ ми позначаємо множину вершин єдиного найкоротшого ланцюга, який з'єднує вершини a і b в дереві X). Таким чином, вершини графа Маркова Γ відповідають ребрам дерева X та в Γ існує дуга $v_{e_1} \to v_{e_2}$, якщо ребро e_1 "накриває" ребро e_2 під дією відображення σ. Графи Маркова виникли при комбінаторному доведенні відомої теореми Шарковського та її аналогів для топологічних дерев загального вигляду (див. [1, 2]).

Вершина в дереві називається висячою, якщо її степінь дорівнює одиниці. Множина всіх висячих вершин дерева X позначається через $L(X)$. Плоским вкладенням графа будемо називати будь–яке його правильне вкладення в площину (тобто таке вкладення, при якому внутрішності ребер графа не перетинаються). Легко бачити, що кожному плоскому вкладенню дерева X відповідає єдина (при фіксованій орієнтації площини) циклічна перестановка множини його висячих вершин $L(X)$.

Приклад 1. *Розглянемо дерево X з множиною вершин $V(X) = \{1, \ldots, 6\}$ та множиною ребер $E(X) = \{12, 23, 34, 26, 35\}$. Тоді циклічна перестановка $\sigma = (1564)$ не відповідає жодному плоскому вкладенню дерева X.*

Для кожної циклічної перестановки σ множини висячих вершин $L(X)$ дерева X визначимо її продовження на всю множину вершин $V(X)$ наступним чином: покладемо $\sigma' : V(X) \to V(X)$, де $\sigma'(x) = \sigma(x)$ для всіх $x \in L(X)$ та $\sigma'(x) = x$ для всіх $x \in V(X) - L(X)$. Маємо таку нижню оцінку на кількість дуг в графі Маркова $\Gamma(X, \sigma')$.

Лема 1. *Нехай X дерево з $n \geq 3$ вершинами та $l \geq 2$ висячими вершинами, $\sigma : L(X) \to L(X)$ циклічна перестановка. Тоді $|A(\Gamma(X, \sigma'))| \geq 3n - 2l - 3$.*

Наступний результат показує, що циклічна перестановка σ множини висячих вершин $L(X)$ дерева X відповідає деякому його плоскому вкладенню тоді й тільки тоді, коли кількість дуг в графі Маркова $\Gamma(X, \sigma')$ є мінімально можливою.

Теорема 1. *Нехай X дерево з $n \geq 3$ вершинами та $l \geq 2$ висячими вершинами. Тоді циклічна перестановка $\sigma : L(X) \to L(X)$ відповідає деякому плоскому вкладенню дерева X тоді й тільки тоді, коли $|A(\Gamma(X, \sigma'))| = 3n - 2l - 3$.*

Список літератури

[1] C. Bernhardt *Vertex maps for trees: algebra and periods of periodic orbits.*,- Disc. Contin. Dyn. Syst. 14 (2006), 399-408.

[2] C-W. Ho, C. Morris *A graph theoretic proof of Sharkovsky's theorem on the periodic points of continuous functions.*,- Pacific J. of Math. 96 (1981), 361-370.

Гомотопічні властивості гладких на стрічці Мебіуса функцій

І. В. Кузнєцова , С. О. Лахтадир

КНУ ім. Т. Шевченка, Київ, Україна

E-mail:ira.kuzn99@gmail.com, serguiy.lakhtadyr@gmail.com

В роботі ([1]) була досліджена структура стабілізаторів функцій Морса на орієнтованих поверхнях. В даній роботі розглядається випадок стрічки Мебіуса. Нехай M — стрічка Мебіуса.

Через $\mathrm{Morse}(M,\mathbb{R})$ будемо позначати множину таких функцій $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, які є функціями Морса та задовольняють умову: відображення f приймає постійні значення на краю ∂M, а множина критичних точок функції f міститься у внутрішності множини M.

Лема. *Нехай $f \in \mathrm{Morse}(M,\mathbb{R})$ і K — компонента зв'язності критичного рівня f, така що одна з компонент зв'язності $M \setminus K$ містить край ∂M та не містить критичних точок. Нехай A — атом компоненти зв'язності K. Тоді $\overline{M \setminus A}$ складається з компонент зв'язності $X_0, X_1, \ldots, X_n$ таких, що:*

1. *$\partial M \subset X_0$, $X_0 \simeq S^1 \times [0,1]$, X_0 не містить критичних точок.*
2. *X_i — 2-диск для всіх $i = \overline{1,n}$.*

Для кожної замкненої підмножини $Y \subset M$ позначимо через $\mathcal{D}(M,Y)$ групу C^{∞}-дифеоморфізмів, сталих на Y. Для кожної $f \in \mathrm{Morse}(M,\mathbb{R})$ визначимо стабілізатор відносно дії групи $\mathcal{D}(M,Y)$ на просторі функцій $\mathrm{Morse}(M,\mathbb{R})$ як множину

$$\mathcal{S}(f,Y) = \{h \in \mathcal{D}(M,Y) \mid f \circ h = f\}$$

та оснастимо його C^{∞}-топологією.

Теорема. *Нехай $f \in \mathrm{Morse}(M,\mathbb{R})$. Припустимо, що існує таке $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, що для будь-якого $h \in \mathcal{S}(f,\partial M)$ виконується умова $h(X_i) = X_i$ і h зберігає орієнтацію X_i . Тоді*

$$\pi_0\mathcal{S}(f,\partial M) \simeq \prod_{i=1}^{n} \pi_0\mathcal{S}(f|_{X_i},\partial X_i) \times \mathbb{Z}.$$

Список літератури

[1] Sergiy Maksymenko, *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms*, (2013) arXiv:math/1311.3347v2.

Про спеціальні майже геодезичні перетворення просторів афінного зв'язку зі скрутом

Л. П. Ладиненко

ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна

E-mail address: kolyalada@rambler.ru

Розглядаються простори A^n класу C^r $(n > 2,\ r > 1)$ афінного зв'язку зі скрутом. Як відомо ([1]), крива L називається майже геодезичною лінією простору A^n, якщо існує такий компланарний вздовж L двовимірний розподіл, якому у кожній точці належить дотичний вектор цієї кривої.

Нескінченно мале перетворення

$$\widetilde{x}^h = x^h + \varepsilon\xi^h(x^1; x^2; ...; x^n)$$

простору афінного зв'язку A^n називається майже геодезичним, якщо у наслідок нього кожна геодезична лінія простору A^n переходить у криву, яка у головному, тобто нехтуючи доданками другого і більш високих порядків малості відносно параметру ε, є майже геодезичною лінією простору A^n.

Досліджено спеціальні майже геодезичні перетворення $\Pi_2^4(\xi;\mu)$ просторів афінного зв'язку A^n зі скрутом. Для випадку, коли векторне поле ξ^h є аналітичним відносно структури μ_i^h, отримані рівняння, які цілком характеризують відповідні перетворення.

Досліджено також групу Лі нескінченно малих майже геодезичних перетворень $\Pi_2^4(\xi;\mu)$, знайдено її максимальний порядок.

Список літератури

[1] Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств* .,- М.: Наука, (1979).

[2] Синюков Н.С., Яблонская Н.В. *Группы Ли обобщенных симметрий пространств аффинной связности.*, - Всесоюзн. Симпозиум по теории симметрии и её обобщениям. Кишинев, (1980), С. 99-100

Множина чисел з обмеженням на вживання символа у Q_∞^*-зображенні числа, визначеного двічі стохастичною матрицею

В. П. Маркітан

Інститут математики НАН України

E-mail address: v.p.markitan@npu.edu.ua

Значний клас математичних об'єктів зі складною локальною будовою відносно просто можна описати і вивчити завдяки використанню різних систем зображення дійсних чисел: зі скінченним та нескінченним алфавітом, суттєво надлишкових та з нульовою надлишковістю, з самоподібною геометрією та несамоподібною.

Пропонується уточнення результатів Q_∞^*-зображення числа, що є кодуванням дійсних чисел з нескінченним алфавітом за умови визначення його двічі стохастичною матрицею, породженою одним параметром. Досліджуються тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з обмеженнями на використання символів у Q_∞^*-зображенні числа.

Означення 1. *Нескінченною двічі стохастичною матрицею називають невід'ємну матрицю $Q_\infty^* = ||q_{ik}||$, елементи якої задовольняють умови $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_{ik} = 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} q_{ik} = 1$.*

З [1] випливає, що якщо всі $q_{ik} > 0$, то для будь-якого числа $x \in [0;1)$ існує єдина нескінченна послідовність цілих невід'ємних чисел (α_n) така, що

$$x = \beta_{\alpha_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left[\beta_{\alpha_k k} \prod_{j=1}^{k-1} q_{\alpha_j j} \right], \quad \text{де} \quad \beta_{0k} \equiv 0, \beta_{ik} \equiv \sum_{j=0}^{i-1} q_{jk}, \quad i \in N, k \in N \tag{1}$$

Розклад числа $x \in [0;1)$ в ряд (1) називається Q_∞^*-*представленням*, а скорочений його запис $\Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \ldots \alpha_k \ldots}$ – Q_∞^*-*зображенням числа* x, визначеного матрицею Q_∞^*. При цьому число (символ) $\alpha_n = \alpha_n(x)$ називається n-ою *цифрою (символом)* цього зображення.

Зафіксуємо $q \in (0;1)$, покладемо $b = 1 - q$ і побудуємо нескінченну двічі стохастичну матрицю Q_∞^* за правилом: $q_{01} = b$; $q_{ik} = bq^{i+k-1}$ для всіх $i \neq k-1$, $k \in N$; $q_{ik} = bq^{2(k-1)} + 1 - q^{k-1}$ для всіх $i = k-1$, $k \in N$. Тоді для ряду (1) справедливо:

$$\begin{cases} \beta_{0k} = 0, \\ \beta_{\alpha_k k} = q^{k-1}\left(1 - q^{\alpha_k}\right) \quad \text{для всіх} \quad \alpha_k < k \in \mathbb{N}, \\ \beta_{\alpha_k k} = 1 - q^{\alpha_k + k - 1} \quad \text{для всіх} \quad \alpha_k \geq k \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_{\alpha_k} = bq^{\alpha_k + (k-1)} \quad \text{для всіх} \quad \alpha_k \neq k-1, k \in \mathbb{N}, \\ q_{\alpha_k} = bq^{2\alpha_k} + 1 - q^{\alpha_k} \quad \text{для всіх} \quad \alpha_k = k-1, k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для фіксованого невід'ємного цілого числа c множина чисел, Q_∞^* - зображення яких не містить символа c, тобто*

$$D_c \equiv [Q_\infty^*; \bar{c}] = \left\{ x : x = \Delta^{Q_\infty^*}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \quad \text{де} \quad \alpha_k \neq c \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}$$

є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

Отримано оцінки міри множини D_c, зокрема $q - q^2 < \lambda(D_0) < q - \frac{q^2}{1+q^2}$.

Список літератури

[1] Працьовитий М. В. *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.* — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

Топологічна стійкість неперервних функцій відносно усереднень за мірами з кусково постійними щільностями

О. В. Марункевич

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

E-mail address: oxanamarunkevysh@rambler.ru

В [1] отримано достатні умови топологічної стійкості неперервних функцій зі скінченним числом локальних екстремумів відносно усереднень. Показано, що ця проблема може бути зведена до перевірки локальної топологічної стійкості усереднень f в околах цих локальних екстремумів. В статті [1] також отримано достатні умови для топологічної стійкості усереднень функцій відносно дискретних мір зі скінченими носіями.

В даній роботі [2] наведено достатні умови для топологічної стійкості паростків функцій відносно мір з кусково неперервними (і зокрема з локально постійними) щільностями, див теореми 1 та 2.

Теорема 1. *Нехай $f, g : [-\epsilon, \epsilon] \to$ — дві кусково 1–диференційовні функції і $h = f - g$. Припустимо, що виконані такі умови:*

(a) f та g строго спадають на $[-\epsilon, 0]$ і строго зростають на $[0, +\epsilon]$;

(b) існує таке $C > 0$, що для всіх $x \in [-\alpha, \alpha]$ виконана нерівність

$$f''_{\alpha}(x) \geq C\alpha\,;$$

(c) похідна $h' = g' - f'$ "— неперервна в точці 0 і $h'(0) = 0$.

Тоді функція g в точці 0 є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ.

Теорема 2. *Нехай $g : [-\epsilon, \epsilon] \to$ — кусково 1–диференційовна функція, що задовольняє такі умови:*

(a) g строго спадає на $[-\epsilon, 0]$ і строго зростає на $[0, +\epsilon]$;

(b) існують скінчені границі зліва та справа

$$L = \lim_{x \to 0-0} g'_x, \qquad\qquad R = \lim_{x \to 0+0} g'_x.$$

Для $i = 0, \ldots, n+1$ визначимо числа

$$X_i = L\mu[t_0, t_i] + R\mu[t_i, t_{n+1}] = L\sum_{j=0}^{i-1}(t_{j+1} - t_j)p_j + R\sum_{j=i-1}^{n}(t_{j+1} - t_j)p_j.$$

Припустимо, що для кожного $i \in \{0, \ldots, n\}$ хоча б одне з чисел X_i або X_{i+1} відмінне від нуля. Тоді функція g в точці 0 є топологічно стійкою відносно усереднень за мірою μ.

Список літератури

[1] С. І. Максименко, О. В. Марункевич, *Топологічна стабільність функцій відносно усереднень* // Укр. мат. журн., (2015).

[2] С. І. Максименко, О. В. Марункевич, *Топологічна стійкість неперервних функцій відносно усереднень за мірами з кусково постійними щільностями.*,— // Збірник праць Інституту математики Національної академії наук України - Київ, Ін-т математики НАН України, (2015), №6 (12), С. 146-163.

Деякі методи пізнавальної активності студентів на практичних заняттях з вищої математики

Н. В. Нужна

ОНАХТ, Одеса, Україна

E-mail address: `lada5.00@ukr.net`

В сучасному світі перед вітчизняною вищою школою стоїть завдання підготовки інженера, здатного творчо вирішувати професійні завдання, швидко набувати нові знання та вміти їх застосовувати до розв'язання нових нестандартних ситуацій.

У даний час в умовах скорочення числа аудиторних годин і збільшення обсягу самостійної роботи для формування евристичних навичок на практичних заняттях з вищої математики доцільно використовувати методи навчання, які налаштовують студентів на самостійну евристичну діяльність.

До них відносимо дослідницький, а також евристичні методи (методи суттєвого, символьного та образного бачення, метод евристичних питань, метод евристичного дослідження, метод конструювання понять, метод гіпотез, метод випадковостей, помилок та асоціацій, метод конструювання теорій, метод "мозкового штурму", метод синектики, метод морфологічного ящика).

Переваги евристичних методів навчання:

1. збільшується роль самостійності в освітньому процесі, з'являється позитивна внутрішня мотивація в процесі пошуку рішення проблем;
2. стимулюють розвиток інтуїтивного мислення, формується творчий підхід до вирішення завдань, застосовуються отримані вміння та знання в нових, нетипових ситуаціях;
3. розвивається взаємодія в колективі;
4. підвищується рівень засвоєння нового навчального матеріалу.

Недоліки евристичних методів навчання:

1. відсутність механізму для складання списку всіх можливих варіантів;
2. відсутність об'єктивних критеріїв відбору кращих варіантів;
3. евристичний метод вимагає більшої витрати часу, якщо порівнювати його з повідомленням готових знань. Ось чому викладач не має можливості на всіх уроках його використовувати.

Список літератури

[1] А. В. Хуторской. Дидактическая эвристика. Теория и технология креативного обучения // М.: Изд-во МГУ, (2003), 416 с.

[2] З. І. Слєпкань. Методика навчання математики // Підр. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів, Зодіак-ЕКО, (2000), 512 с.

Математичне моделювання напружено-деформованого стану трубопроводів

Т. Ю. Подоусова

Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна

Н. В. Вашпанова, О. П. Угольніков

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Проблема порушення стійкості циліндричних оболонок багато років продовжує залишатися актуальною, оскільки при прокладанні і експлуатації нафтогазопроводів потрібна обов'язково оцінка ресурсу трубопроводів.

Відомо [1], що всяке ареальне поле регулярної поверхні $S \in C^3$ у цілому визначає неоднорідне статичне поле безмоментного напруженого стану рівноваги оболонки з серединною поверхнею S, що відповідає певним статистичним силам.

У роботі [2] задача про існування нетривіальної А-деформації першого порядку однозв'язної поверхні S без омбілічних точок із стаціонарною довжиною LGT-ліній зводиться до дослідження наступної системи рівнянь:

$$T^{\alpha\beta}_{,\alpha} - b^{\beta}_{\alpha} T^{\alpha} = 0, \quad b_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} + T^{\alpha}_{,\alpha} = 0, \quad c_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} = 0, \quad T^{\alpha\beta} \left(c_{i\alpha} g_{j\beta} + c_{j\alpha} g_{i\beta} \right) = \mu \left(b_{ij} - H g_{ij} \right),$$

яка містить шість рівнянь відносно шести невідомих: симетричного тензора $T^{\alpha\beta}$,компонентів вектора T^{α} та функції $\mu(x^1, x^2) \in C^3, (\mu \neq 0)$.

Доведена наступна

Теорема. *Прямий круговий циліндр допускає нетривіальні А-деформації першого порядку, що не змінюють довжину LGT-ліній, кожна з яких моделює безмоментний стан рівноваги навантаженої оболонки за умови, що її поверхневе навантаження має вигляд*

$$X = -\frac{1}{4R} \frac{du(x^1)}{dx^1} \overline{r_2},$$

де R*- радіус циліндра,* $\overline{r_2} = \frac{\partial \overline{r}}{\partial x^2}$*,* $u(x^1)$*-довільна функція однієї змінної класу* C^2*, від якої залежать знайдені тензори деформації і функція* μ*.*

Список літератури

[1] Л. Л. Безкоровайна *Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки.*,- Навч.посіб.-Одеса(1999)-168 с.

[2] Л. Л. Безкоровайна, Т. Ю. Вашпанова *А-деформації поверхні зі стаціонарною довжиною LGT-ліній.*,- Укр.мат.журн., 2010,т.62, №7, с.878-884.

Про продовження А-деформацій поверхонь в аналітичні

Т. Ю. Подоусова

Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Н. В. Вашпанова

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна

Нехай S-регулярна поверхня класу $C^m(m \geq 3)$, гомеоморфна області G площини, задана векторно-параметричним рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$,де $\overline{r}$ - радіус-вектор точки поверхні, (x^1, x^2) - внутрішні координати цієї точки.

Деформація поверхні S, яка визначається рівністю [1]

$$\overline{r}^*(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \overline{y}^k(x^1, x^2)$$

називається **аналітичною ареальною (аналітичною А-деформацією)**, якщо

1) ряд у правій частині рівності збігається в околі $t = 0$;

2) усі поля зміщення $\overline{y}^k(x^1, x^2)$ задовольняють умові неперервної диференційовності до порядку m включно;

3) елемент площі S при деформації стаціонарний.

Розглянемо поверхню $S \in C^{l+4}_{\lambda}, 0 < \lambda < 1, l \geq 0$ [2], яка не містить точок заокруглення і разом зі своєю границею ∂S є строго внутрішньою частиною деякої замкненої поверхні $\widetilde{S} \in C^{l+4}_{\lambda}$ додатньої гаусової кривини. Поверхня S допускає нетривіальну нескінченно малу (н.м.) ареальну деформацію першого порядку, при якій зберігається повний скрут $(\delta\widetilde{K} = 0)$ вздовж її границі $\partial S \in C^{l+4}_{\lambda}$ [3], яку можна продовжити в А-деформації скінченного порядку n зі стаціонарним геодезичним скрутом вздовж ∂S [4].

Позначимо через $\Delta\widetilde{K}(t) = \widetilde{K_t} - \widetilde{K}$- приріст повного скруту вздовж ∂S, який залежить від $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Справедлива наступна

Теорема. *Кожну нетривіальну н.м. ареальну деформацію першого порядку однозв'язної поверхні S класу $C^{l+4}_{\lambda}, 0 < \lambda < 1, l \geq 0$ додатньої гаусової кривини і без точок заокруглення, вздовж границі якої $\partial S \in C^{l+4}_{\lambda}$ зберігається повний скрут, можна продовжити в аналітичну А-деформацію з граничною умовою $\Delta\widetilde{K}(t) = 0$ в класі C^{l+3}_{λ} поверхонь.*

Список літератури

[1] Н. В. Дерманец *Аналитические ареальные деформации овалоидов с краем.*,- Сб. "Восьмая Всесоюз. науч.конф. по современ. проблемам диф. геометрии".-Одеса(1984)-с.43.

[2] И. Н. Векуа*Обобщенные аналитические функции.*,- М.: Наука, 1988.– 509 с.

[3] Т. Ю. Подоусова, Л. Л. Безкоровайна, Н. В. Вашпанова. *Про існування А-деформацій першого порядку поверхонь додатньої гаусової кривини з краєм.*,- Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2014".-Одеса(2014)-с.7-8.

[4] Т. Ю. Подоусова, Н. В. Вашпанова. *О продолжении А-деформаций поверхностей положительной кривизны с краем.*,- Труды международного геометрического центра.-том 7, №3, 2014,с.38-47.

Топологія 1-потоків на поверхнях з межею

О. О. Пришляк, М. В. Лосєва.

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: prishlyak@yahoo.com,mv.loseva@gmail.com

Ми розглядаємо потоки на зв'язних компактних поверхнях зі зв'язною межею, у яких є єдина нерухома точка, що лежать на межі поверхні. Наша мета — описати структуру потоків на зв'язних поверхнях зі зв'язною межею з однією нерухомою точкою на межі поверхні без замкнених траєкторій та скінченим числом сепаратрис.

Потік на компактній поверхні з межею будемо називати простим, якщо у нього немає замкнених траєкторій і всі особливості лежать на межі. Простий потік на поверхні з межею називається оптимальним, якщо він має найменше число нерухомих точок серед усіх простих потоків на цій поверхні. Простий потік на зв'язній компактній поверхні зі зв'язною межею, що не гомеоморфна листу Мьобіуса, буде оптимальним тоді і тільки тоді, коли він містить лише одну нерухому точку.

Сепаратриси розбивають досить малий окіл нерухомої точки на частини, які будемо називати кутами. Можливі три типи кутів: 1) *Гіперболічний кут.* В ньому кожна траєкторія перетинається з цим кутом по обмеженому значенню параметру, тобто нерухома точка не є граничною точкою для частини траєкторії, що лежить в куті. 2) *Еліптичний кут.* В цьому куті для довільного околу нерухомої точку існують траєкторії, що повністю лежать в цьому околі і куті. Н 3) *Параболічний кут.* В ньому кожна траєкторія перетинається з межею довільного малого околу в одній точці. Нерухома точка є граничною точкою кожної траєкторії. У кутів параболічного типу можливі два випадки: a) всі траєкторії починаються в нерухомій точці – *кут-витік*, b) всі траєкторії закінчуються в нерухомій точці – *кут-стік.*

Теорема 1. *Всі сепаратриси розбивають поверхню на області в кожній з яких буде єдиний кут-стік і єдиний кут-витік або єдиний параболічний кут, а решта кутів є гіперболічними.*

Траєкторію, що лежить на межі також будемо вважати сепаратрисою і називати граничною сепаратрисою.

Розрізняючим графом потоку будемо називати орієнтований граф G, двоїстий до множини сепаратрис, в якому для кожної вершини задано циклічний порядок інцидент них до неї ребер і зафіксовано початкову вершину.

Теорема 2. *Розрізняючий граф має такі властивості: 1) Ребро, яке інциндентне до початкової вершини, орієнтовано так, що воно виходить з цієї вершини. 2) Для кожної вершини починаючи з деякого ребра при циклічному обході ідуть спочатку всі ребра що входять в неї, а потім всі, що виходять з неї. 3) d-зв'язність: існує шлях, який починається і закінчується в початковій вершині, в якому кожні два послідовні ребра є також послідовними ребрами в циклічному порядку в їх спільній вершині і кожне ребро в цьому шляху зустрічається 2 рази.*

Теорема 3. *Два 1-потоки топологічно еквівалентні тоді та тільки тоді, коли їх розрізняючи графи ізоморфні. Орієнтований граф, з заданими циклічними порядками ребер для кожної вершини і заданою початковою вершиною буде розрізняючим графом деякого потоку, якщо він задовольняє властивостям 1) - 3).*

Список літератури

[1] А.О.Пришляк. Топологическая классификация m-полей на двух- и трех-мерных многообразиях с краем // Укр.мат. журн., т.55, No.6, 2003.- с.799-805.

Про структуру симетричних розв'язків матричного рівняння $AX = B$

В. М. Прокіп

ІППММ НАН України, Львів

E-mail address: v.prokip@gmail.com

Нехай $M_{m,n}(\mathbb{F})$ – множина $(m \times n)$-матриць над полем $\mathbb{F}$. Позначимо: I_n – одинична $(n \times n)$-матриця, $0_{m,n}$ – нульова $(m \times n)$-матриця, " T " – символ транспонування матриць.

Розглянемо матричне рівняння

$$AX = B, \tag{1}$$

де $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ і X – невідома $(n \times n)$-матриця над полем $\mathbb{F}$. Задача про розв'язність цього рівняння традиційно привертала увагу багатьох математиків. Центральне місце серед таких досліджень займають роботи, в яких встановлено умови, за яких розв'язки рівняння (1) належать до певних класів матриць: симетричних, кососиметричних, ермітових, додатньо визначених, із заданим характеристичним многочленом та інших (див. [1]–[6]).

Якщо рівняння (1) розв'язне, то воно має симетричний розв'язок X_0 $(X_0 = X_0^T)$ тоді і тільки тоді, коли $AB^T = BA^T$ (див. [1]–[3]). В даному повідомленні запропонуємо інші умови, за яких для рівнняння (1) існують симетричні розв'язки та опишемо їх структуру.

Теорема. *Нехай $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$ і $\operatorname{rank} A = r$. Рівняння $AX = B$ має симетричний розв'язок тоді і тільки тоді, коли для матриць $U \in GL(m, \mathbb{F})$ та $V \in GL(n, \mathbb{F})$ таких, що $UAV = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{m-r,r} & 0_{m-r,n-r} \end{bmatrix}$ виконується*

$$UB(V^{-1})^T = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ \multicolumn{2}{c}{0_{m-r,n}} \end{bmatrix},$$

де $D_{11} \in M_{r,r}(\mathbb{F})$ – симетрична матриця.

Якщо ж (при наведених вище умовах) для рівняння $AX = B$ існує симетричний розв'язок, то для довільної симетричної матриці $P \in M_{n-r,n-r}(\mathbb{F})$ матриця $X_p = V \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12}^T & P \end{bmatrix} V^T$ – загальний симетричний розв'язок цього рівняння.

Наслідок. *Нехай $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{F})$. Якщо $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = 1$, то рівняння $AX = B$ має симетричні розв'язки.*

Список літератури

[1] Don F.J.H. *On the symmetric solutions of a linear matrix equation.* Linear Algebra Appl., **93** (1987), P.1–7.

[2] Chu K-W.E. *Symmetric solutions of linear matric equations by matrix decompositions.* Linear Algebra Appl., **119** (1989), P.35–50.

[3] Hua Dai. *On the symmetric solutions of linear matrix equations.* Linear Algebra Appl., **131** (1990), P.1–7.

[4] Horn R.A., Sergeichuk V.V., Shaked-Monderer N. *Solution of linear matrix equations in a *-congruence class.* Electron. J. Linear Algebra, **13** (2005), P.153–156.

[5] Dajic A., Koliha J.J. *Equations $ax = c$ and $xb = d$ in rings and rings with involution with applications to Hilbert space operators.* Linear Algebra Appl., **429** (2008), P.1779–1809.

[6] Прокіп В.М. *Про розв'язки матричного рівняння $XA_0 = A_1$ із заданими характеристичними многочленами.* Праці міжнар. геомет. центру, **7**, № 4 (2014), С.23–33.

Спеціальна геометрія дотичного розшарування, індукована інваріантними наближеннями базового ріманова простору

О. М. Синюкова

ДЗ «ПНПУ імені К.Д. Ушинського», Одеса, Україна

E-mail address: marbel@ukr.net

Використання ріманової системи координат з початком координат у довільній точці відповідного ріманова простору дозволило отримати інваріантний ряд типу Тейлора, який залежить не тільки від координат змінної точки, а й від дотичного елемента у ній, як для довільного тензора, так і для об'єкта афінного зв'язку ріманова простору V^n [1].

Якщо у рядах для компонент g_{ij} метричного тензора простору V^n і для компонент Γ^h_{ij} об'єкта афінного зв'язку простору V^n відмовитися від доданків другого і більших порядків малості відносно компонент y^h дотичного елемента, отримуємо, відповідно, компоненти метричного тензора

$$\widetilde{g}_{ij} = g_{ij}(x) + \frac{1}{3} R_{i\alpha\beta j}(x) y^\alpha y^\beta$$

і компоненти об'єкта зв'язку

$$\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x;y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3} R^h_{(ij)\alpha}(x) y^\alpha,$$

які визначають на V^n геометрію, подібну до фінслерової.

На дотичному розшаруванні $T(V^n)$ розглянуто метрику

$$ds^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y) \widetilde{D}y^\alpha \widetilde{D}y^\beta,$$

де

$$\widetilde{D}y^h = dy^h + \widetilde{\Gamma}^h_{\alpha\beta}(x;y) y^\alpha dx^\beta.$$

Досліджені певні геометричні властивості дотичного розшарування $T(V^n)$ з такою метрикою. Зокрема, розглянуті питання існування проективних перетворень таких просторів у випадку, коли базовий простір V^n є простором постійної кривини. При цьому частково використано апарат дослідження автоморфізмів розшарованих просторів, побудований Б.Н. Шапуковим [2].

Список літератури

[1] Синюков Н.С., Синюкова Е.Н., Мовчан Ю.А. *Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и ее обобщений.*, - Изв. вузов, Математика, № 3(382), (1994), С. 76-80.

[2] Шапуков Б.Н. *Автоморфизмы расслоенных пространств*,- Труды геометр. сем. Казанск. ун.-та., (1982), 14, С.97-108.

f-атоми складності 4 функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах

Д. М. Скочко

КНУ ім. Т.Г.Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: geroyasf@gmail.com

Нехай $f-$ функція Морса на орієнтованому двовимірному многовиді M^2 і c критичні значення функції, тобто такі, в прообразі яких є хоча б одна критична точка. Критичні точки, що знаходяться на одному критичному рівні можна розвести на сусідні рівні таким чином, щоб на кожному було по одній критичній точці.

Функція Морса є *простою*, коли вона містить по одній критичній точці на кожному критичному рівні, у всіх інших випадках її називають *складною*.

Атомом називається окіл P^2 критичного шару, що задається нерівністю $P^2 = \{x \in M^2 | c - \varepsilon \leq f(x) \leq c + \varepsilon\}$ для досить малого ε, який розшарований на лінії рівнів функції f і розглядається з точністю до пошарової еквівалентності. Іншими словами, атом – це клас пошарової еквівалентності функції, заданої на досить малому околі критичного рівня. Атом називається *простим*, якщо функція Морса f в парі (P^2, f) – проста. Інші атоми називаються *складними*.

Кожному атому відповідає два $f-$ атоми [1].

Складністю атома ($f-$ атома) називається кількість критичних точок, що йому належать. В [1] та [2] було знайдено всі атоми та $f-$ атоми складності 2 та 3.

Кожному $f-$ атому можна поставити у відповідність окремий клас $f-$графів [3]. $f-$ граф це зв'язний граф, що представляє собою множину орієнтованих кіл, на яких виділено n пар точок - вершин, кожна з яких з'єднана неорієнтованим ребром. $f-$атомам складності 4 відповідають $f-$графи, що мають 4 пари вершин.

Теорема 1. *Для складних функцій Морса на замкнених орієнтованих двовимірних многовидах існує 96 $f-$атомів складності 4.*

Всі $f-$атоми розбиваються на 58 пар (в парі можуть бути однакові $f-$атоми), кожна з яких відповідатиме одному атому складності 4 функцій Морса на замкненому орієнтованому двовимірному многовиді.

Список літератури

[1] А. В. Болсинов , А. Т. Фоменко, Интегрируемые гамильтоновы системы, Иж.:Удмуртский университет. 1999, т.1, с 74-75.

[2] О. М. Іванюк, О. О. Пришляк, Атоми скалдності 2 на поверхнях з краєм. Proc. Intern. Geom. Center, Vol.6, No.3, 2013.- c.40–53.

[3] А. А. Ошемков, Топология изоенергетических поверхностей и бифуркационные диаграммы интегрируемых случаев динамики твердого тела на $SO(4)$. УМН, 1990, т.42, вып. 2, с. 199-200.

[4] І. М. Іванюк, О. О. Пришляк, Топологічна структура деформацій веторних полів Морса-Смейла на тривимірних многовидах роду 2. Proc. Intern. Geom. Center, Vol.7, №4, 2014. c.12-22.

[5] A. O. Prishlyak, The topological sructure of the functions with isolated critical points on 3-manifold Algebras, Groups and Geometries, Vol. 32, No. 4, 2015.- pp. 400-422.

Метадосконалі групи і їх властивості

Р. В. Скуратовський

НПУ, Київ, Україна

E-mail address: `ruslcomp@mail.ru`

У даній роботі досліджується введений автором [1] новий клас груп – метадосконалі групи, вони є узагальненям введених у статті [2, 3] метазнакозмінних груп, бо знакозмінна група є досконалою, також зроблено оцінку для кількості твірних комутанта вінцевого добутка груп. Нагадаємо, що раніше для вужчого класу груп – нескінченно ітерованих вінцевих добутків $A_{n_1} \wr A_{n_2} \wr \ldots$, де $n_i \geq 5$ у [4] неконструктивними методами була доведена двопородженість з додатньою ймовірністю. Під досконалою групою ми розуміємо таку, що $G = [G, G]$.

Метадосконалою групою $D(\overline{k})$, рангу m, метастепеня $\overline{k} = (k_1, ..., k_m)$ називається вінцевий добуток $(D_1, X_{k_1}) \wr (D_2, X_{k_2}) \wr ... \wr (D_m, X_{k_m})$ досконалих груп підстановок (D_1, X_{k_1}), (D_m, X_{k_2}), ... ,(D, X_{k_m}).

Теорема 1. *Нехай маємо досконалу групу* $D = \langle t_D, s_D \rangle$*. Тоді якщо* $G = \langle t_0, s_0 \rangle$ *транзитивно діє на* $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ *так, що існують орбіти* $\mathcal{O}_(x) = \{x^{\langle t_0 \rangle} \ |x \in X\}$, $\mathcal{O}'(x) = \{x^{\langle s_0 \rangle} \ |x \in X :$

$$\begin{cases} (ord(t_0)/|\mathcal{O}(x)|, ord(t_D)) \ = \ 1\,, \\ (ord(s_0)/|\mathcal{O}'(x)|, ord(s_D)) = 1 \end{cases} \tag{1}$$

і група G є 2 – допустимою [1] та D має скінченну ширину по комутанту [5], тоді $G \wr D$ – двопороджена.

При дії $G \wr D$ маємо гратку систем імпримітивності з блоками X_i і якщо H – найменша надгрупа для $St_{x_o}(G)$ у G, то $\left| {}^{H}/_{St_{x_o}(H)} \right| = \left| O\left(x_0^{\langle H \rangle} \right) \right| = |X_i|$. Нехай $\mathfrak{Q}(x_0) = \mathcal{O}(x) \cap \mathcal{O}'(x)$.

Теорема 2. *Якщо $|\mathfrak{Q}(x_0)| \neq |X_i|$, тобто перетин орбіт не є блоком імпримітивності (чи їх об'єднанням) з гратки блоків імпримітивносі, що утворена дією класів суміжності групи D_{k-1} з $D_1 \wr D_2 \wr ... \wr D_k$ за найменшою надгрупою H стабілізатора $St_{x_0}(G)$ з D_{k-1}, тобто $D_{k-1} > H > St_{x_0}(G)$, де D_i, $i \leq k$ – досконала, то має місце 2-допустимість [1].*

Зауваження 1. *Умова $|\mathfrak{Q}(x_0)| \neq |H|$ буде виконуватися, якщо $(|\mathfrak{Q}(x_0)|, |H|) = 1$. Отже, ця умова є достатньою для наявності 2-допустимості.*

Властивість 1. *Метадосконала група D, яка є вінцевим добутком як скінченних так і нескіченних досконалих груп є досконалою.*

Список літератури

[1] Р. В. Скуратовський *Мінімальні системи твірних і властивості вінцевих добутків досконалих груп*, Наукові вісті НТУУ "КПІ". 4, (2014), с. 94-101.

[2] М. В. Заводя, В. С. Сікора, В. І. Сущанський. *Системи твірних мета знакозмінних груп скінченного рангу* //Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Чернівці Рута - 2006. -V.314-315. - С. 64-72.

[3] М. В. Заводя, В. С. Сікора, В. І. Сущанський *Двухелементні системи твірних метазнакозмінних груп скінченного рангу.* // Мат. Студії. – 2010. – Т.34, ќ1. – С.3–12.

[4] Bhattacharjee M. *The probability of generating certain profinite groups by two elements* // Israel J. Math. 86, 1994. — P. 311–329.

[5] Alexey Muranov. *Finitely generated infinite simple groups of infinite commutator width.* arXiv:math/0608688v4 [math.GR] 12 Sep 2009.

Групи гомеотопій несингулярних шарувань

Ю. Ю. Сорока

КНУ імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: sorokayulya15@gmail.com

Модельною смугою назвемо відкриту підмножину $S \subset \mathbb{R} \times [-1;1]$, яка задовольняє умовам: 1) $\mathbb{R} \times (-1;1) \subset S$ та 2) $\partial S = S \cap \mathbb{R} \times \{-1,1\}$ є незв'язним об'єднанням інтервалів, замикання яких в $\mathbb{R} \times [-1;1]$ попарно не перетинається і утворюють локально скінченну множину. Під *смугастою поверхнею* Σ розумітимемо некомпактну поверхню, склеєну із зліченного числа модельних смуг $S_\lambda, \lambda \in \Lambda$, вздовж відкритих інтервалів межі ∂S_λ за допомогою афінних гомеоморфізмів, які зберігають орієнтацію. На кожній S_λ визначено шарування на горизонтальні прямі $\mathbb{R} \times t$, $t \in (-1;1)$ та компоненти зв'язності межі. Шарування на смугах визначають шарування на всій поверхні, яке позначимо через F та називатимемо *канонічним.* Оскільки гомеоморфізми склейки модельних смуг зберігають орієнтацію, то шарування F є орієнтовним.

Нехай $H(F)$ - група гомеоморфізмів $h : \Sigma \to \Sigma$, таких що для кожного шару $\omega \in F$ його образ $h(\omega)$ є також шаром в F. Наділимо цю групу компактно відкритою топологією і нехай $H_0(F)$ - компонента зв'язності $H(F)$, що містить тотожнє відображення. Позначимо через $H^+(F)$ підгрупу $H(F)$, що складається з таких гомеоморфізмів $h : \omega \to h(\omega)$, які зберігають відповідні орієнтації.

С.І. Максименком та Є.О.Полуляхом [1] встановлено, що група $H_0(F)$ є стягуваною, тому гомотопічний тип $H(F)$ визначається фактор-групою $\pi_0 H(F) = H(F)/H_0(F)$, елементами якої є комоненти зв'язності $H(F)$. Називатимемо $\pi_0 H(F)$ - *групою гомеотопій* шарування F.

Групи $\pi_0 H^+(F)$ для спеціального класу несингулярних шарувань площини, чиї простори шарів мають структуру подібну до кореневих дерев зі скінченним діаметром, було обчислено в [2]. В даній роботі показується взаємозв'язок груп гомеотопій таких шарувань та груп гомеотопій спеціальних автоморфізмів графів, визначених наступним чином.

Нехай $G(F) = \Sigma / F$ - простір шарів, $p : \Sigma \to G(F)$ - фактор-відбраження. Наділимо $G(F)$ фактор-топологією, тобто множина U в $G(F)$ вважатиметься відкритою тоді і тільки тоді, коли її прообраз $p^{-1}(U)$ є відкритим в Σ. В загальному випадку $G(F)$ є нехаусдорфовим топологічним простором, при цьому образ внутрішньості кожної модельної смуги S_λ в $G(F)$ є відкритою множиною гомеоморфною відкритому інтервалу, яку позначатимемо через e_λ. Таким чином, $G(F)$ можна розглядати як «нехаусдорфовий» граф, у якого «розщеплені» вершини. Ці вершини відповідають граничним інтервалам модельних смуг. Позначимо $\partial_+ e_\lambda = p(S_\lambda \cap \mathbb{R} \times \{1\})$ і $\partial_- e_\lambda = p(S_\lambda \cap \mathbb{R} \times \{-1\})$.

Нехай $H(G(F))$ - група гомеоморфізмів графа $G(F)$. Легко показати, що кожен h з $H(F)$ індукує гомеоморфізм $\xi(h) : G(F) \to G(F)$. При чому відповідність $h \mapsto \xi(h)$ є гомоморфізмом $\xi : H(F) \to H(G(F))$. Позначимо через $\mathfrak{F}$ *спеціальний клас* смугастих поверхонь Σ графи яких мають наступні властивості: $\partial_- e_\lambda$ складається лише з одній точки; якщо v є спільною вершиною ребер e_ν і e_μ, тоді $v = \partial_+ e_\nu \cap \partial_- e_\mu$ або $v = \partial_+ e_\mu \cap \partial_- e_\nu$; $G(F)$ - зв'язний граф, що не містить циклів та має скінченний діаметр.

Теорема 1. *Нехай $\Sigma \in \mathfrak{F}$ і F - канонічне шарування, тоді ξ індукує ізоморфізм груп $\pi_0 H^+(F)$ та $\pi_0 H(G(F))$.*

Список літератури

[1] Sergiy Maksymenko and Eugene Polulyakh, *Foliations with non-compact leaves on surfaces*, Proceedings of Geometric Center **8** (2015), no. 3–4, 17–30.

[2] Yu. Yu. Soroka, *Homeotopy groups of rooted tree like non-singular foliations on the plane*, to appear in Methods of Functional Analysis and Topology **3** (2016)

Узагальнення задачі про тінь для сім'ї множин

М. В. Стефанчук

Інститут математики НАН України, Київ, Україна

E-mail address: stefanmv43@gmail.com

Означення 1. *Множина $B \subset \mathbb{R}^n$ називається m-опуклою (m-півопуклою), якщо для довільної точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus B$, якщо знайдеться m-вимірна площина (півплощина) L, така, що $x \in L$ і $L \bigcap B = \emptyset$.*

Оскільки перетин m-опуклих (m-півопуклих) множин буде m-опуклою (m-півопуклою) множиною, то для довільної множини $B \subset \mathbb{R}^n$ можна розглядати мінімальну m-опуклу (m-півопуклу) множину, яка містить B, і називати її m-опуклою (m-півопуклою) оболонкою множини B [1], [2], [3].

Теорема 1. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо n елементів цієї сім'ї.*

Теорема 2. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному евклідовому просторі при $n \geq 2$ належала 1-півопуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних замкнених множин, отриманих із заданої опуклої множини з непорожньою внутрішністю за допомогою групи перетворень, яка складається з паралельних перенесень та гомотетій, необхідно і достатньо $2n$ елементів цієї сім'ї.*

Теорема 3. *Для того, щоб внутрішність кола належала 1-опуклій оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) кругів з центрами на колі та радіусами, меншими від радіуса кола, необхідно і достатньо трьох кругів.*

Означення 2. *Множина $B \subset \mathbb{C}^n(\mathbb{H}^n)$ називається m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклою, якщо для довільної точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus B$ ($\mathbb{H}^n \setminus B$), якщо знайдеться m-вимірна комплексна (гіперкомплексна) площина L, така, що $z \in L$ і $L \bigcap B = \emptyset$.*

Аналогічно, як і в $\mathbb{R}^n$, вводиться поняття m-комплексно (m-гіперкомплексно) опуклої оболонки множини.

Теорема 4. *Для того, щоб вибрана точка в n-вимірному комплексному (гіперкомплексному) евклідовому просторі $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{H}^n$), $n \geq 3$, належала 1-комплексній (1-гіперкомплексній) оболонці сім'ї попарно неперетинних відкритих (замкнених) куль з центрами на сфері $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$ ($S^{4n-1} \subset \mathbb{H}^n$) та з радіусами, меншими від радіуса сфери, достатньо $2n$ ($4n-2$) куль.*

Список літератури

[1] *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Стефанчук М.В.* Задача о тени // Доп. НАН України, 2015, № 5. – С. 15-20.

[2] *Зелинский Ю.Б., Выговская И.Ю., Стефанчук М.В.* Обобщённо выпуклые множества и задача о тени // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 12. – С. 1658-1666.

[3] *Зелинский Ю.Б.* Задача о тени для семейства множеств //Збірник праць Інституту математики НАН України. — 2015. – **12**, № 4. – С. 197-204.

Інфінітезимальні конформні деформації поверхонь сталої середньої кривини

Ю. С. Федченко

ОНАХТ, Одеса, Україна

E-mail address: `Fedchenko_ Julia@ukr.net`

У статтях ([1], [2]) отримано основні рівняння інфінітезимальних конформних деформацій поверхонь, знайдено в явному вигляді представлення тензорних полів $\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} = \overset{\circ}{T}{}^{\beta\alpha}$, T^{α} похідної вектора зміщення

$$\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{\circ}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^{\alpha}\overline{n},$$

де φ -функція конформності,$c_{i\alpha}$ - дискримінантний тензор, $c^{\alpha\beta} = g^{\alpha i}g^{\beta j}c_{ij}$. Виділено тривіальний випадок.

Враховуючи отримані результати, продовжуємо досліджувати основні рівняння на поверхнях сталої середньої кривини $H = const$.

Наведено приклади, які демонструють, що поверхні сталої середньої кривини допускають інфінітезимальні конформні деформації.

Список літератури

[1] Ю. С. Федченко *Про існування нескінченно малих конформних деформацій поверхонь.* - Мат. вісник НТШ, (2013), 10, С. 115-121.

[2] Ю. С. Федченко *Про нескінченно малі конформні деформації мінімальних поверхонь зі збереженням середньої кривини.* - Праці міжнародного геометричного центру, (2012), Т. 5, №3-4, С. 24-31.

Інваріантність певних геометричних об'єктів у просторах сталої скалярної кривини при інфінітезимальних перетвореннях

О. Є. Чепурна

ОНЕУ, Одеса, Україна

E-mail address: chepurna67@gmail.com

Розглянуто інфінітезимальні перетворення ріманових просторів сталої скалярної кривини з умовою інваріантності тензору Ейнштейна.

$$E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}$$

Теорема 1. *Якщо рімановий простір V_n такий, що має нульову скалярну кривину, допускає інфінітезимальне конформне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна, то асоційований з ним ковектор φ_i, є вектором Кілінга:*

$$\varphi_{i,j} + \varphi_{j,i} = 0.$$

Крім того, похідна Лі тензора кривини дорівнюватиме нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

Теорема 2. *Якщо рімановий простір V_n такий, що має сталу скалярну кривину ($R = \text{const} \neq 0$), допускає інфінітезимальне проективне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна, то асоційований з ним ковектор ψ_i, також породжуватиме проективні перетворення. У випадку, коли скалярна кривина тотожно дорівнює нулю($R = \text{const} = 0$), асоційований ковектор ψ_i є вектором Кілінга:*

$$\psi_{i,j} + \psi_{j,i} = 0.$$

Крім того, у випадку нульової скалярної кривини, похідна Лі тензора кривини вздовж породжуючого поля ξ дорівнюватиме нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

Теорема 3. *Якщо келеровий простір V_n такий, що має сталу скалярну кривину ($R = \text{const} \neq 0$), допускає інфінітезимальне голоморфно-проективне перетворення, породжене деяким векторним полем ξ, що зберігає тензор Ейнштейна, то асоційований з ним ковектор ρ_i, також породжуватиме проективні перетворення, а вектор $F^t_i \rho_t$ є вектором Кілінга. У випадку, коли скалярна кривина тотожно дорівнює нулю($R = \text{const} = 0$), асоційований ковектор ρ_i також буде вектором Кілінга:*

$$\rho_{i,j} + \rho_{j,i} = 0.$$

Крім того, у випадку нульової скалярної кривини, похідна Лі тензора кривини вздовж породжуючого поля ξ дорівнюватиме нулю:

$$\mathfrak{L}_\xi R^h_{ijk} = 0.$$

Список літератури

[1] *Chepurna O., Kiosak V., Mikeš J.* Conformal mappings of Riemannian spaces which preserve the Einstein tensor. // J. Appl. Math. Aplimat 3, 1 (2010), 253–258.

[2] *Киосак В. А. Чепурная Е. Е.* Инвариантные преобразования с сохранением геодезических,- Proc. Intern. Geom. Center 2011 4(2) 36-42.

[3] *Tachibana S. Ishihara S.* On infinitesimal holomorphically projective transformations in kahlerian manifolds./*S. Tachibana S. Ishihara*- Tohoku Math. J. (2) 12 (1960), no. 1, 77–101.

Конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення локально конформно-келерових многовидів

Є. В. Черевко

ОНЕУ, Одеса, Україна

E-mail address: cherevko@usa.com

Ермітовий многовид M_n, має назву *локально конформно-келерового* (коротше, ЛКК-) *многовидом*, якщо існує відкрите покриття $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ многовиду M та система $\Sigma = \{\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}\}_{\alpha\in A}$ гладких функцій таких, що $\{J|_{U_\alpha}, \hat{g}_\alpha = e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}\}$ – келерова структура для будь якого $\alpha \in A$. Перехід від метрики $g|_{U_\alpha}$ до метрики $e^{-2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ має назву *локально конформного перетворення структури.* Функція σ має назву *визначальною функцією* конформного перетворення[1]. Доведено теорему

Теорема 1. *ЛКК-многовид M^n, не дозволяє існування нетривіальних інфінітезимальних перетворень із збереженням комплексної структури та її коварінтної похідної, зокрема таких, що*

$$\mathfrak{L}_\xi \Gamma^h_{ij} = \rho_j \delta^h_i + \rho_i \delta^h_j - \rho_t J^t_i J^h_j - \rho_t J^t_j J^h_i .$$

Розглянуто *конформно-голоморфно-проективні інфінітезимальні перетворення* із збереженням комплексної структури які на ЛКК-многовиді (M^n, J, g), кі описуються системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
&1)\xi_{i,j} = \xi_{ij};\\
&2)\rho, i = \rho_i;\\
&3)\xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}\big((\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,k} g_{ij} + (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,j} g_{ik} - (\omega_\alpha \xi^\alpha)_{,i} g_{jk}\big)\\
&\qquad + \rho_j g_{ik} + \rho_k g_{ij} - \rho_t J^t_j J_{ik} - \rho_t J^t_k J_{ji};\\
&4)\rho_{i,j} = \frac{1}{2}\omega^t \rho_t g_{ij} - \frac{1}{2}\rho_i \omega_j - \frac{1}{2}\rho_j \omega_i + \frac{1}{n+2}\mathfrak{L}_\xi \big(R_{ij}\\
&\qquad - \frac{(n-2)}{2}\big(\omega_{i,j} + \frac{\omega_i \omega_j}{2} - \frac{||\omega||^2 g_{ij}}{2}\big) - \frac{\Delta_2 \omega g_{ij}}{2}\big);\\
&5)\mathfrak{L}_\xi J^i_j = \xi^k \nabla_k J^i_j - J^\alpha_j \nabla_\alpha \xi^i + J^i_\alpha \nabla_j \xi^\alpha = 0
\end{aligned}$$

Стосовно цих перетворень доведено такі теореми.

Теорема 2. *При інфінітезимальних конформно-голоморфно-проективних перетвореннях ЛКК-многовидів, що зберігають комплексну структуру, тензор Нейєнхейса також зберігається.*

Теорема 3. *Якщо на ЛКК-многовиді $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ алгебра Лі інфінітезимальних конформно голоморфно-проективних векторних полів ξ, містить таку підалгебру векторних полів, що всюди $\omega_\alpha \xi^\alpha = 0$, і таким чином, всюди дотичних до сімейства гіперповерхонь, що відповідають рівнянню $\omega = 0$, то така підалгебра генеруватиме підгруппу гомотетій цього ЛКК-многовиду. Ці гіперповерхні будуть орбітами цієї підгрупи.*

Список літератури

[1] *Кириченко В. Ф.* Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия / *В. Ф. Кириченко* // Матем. сб.–1992. Т. 51, №5. –С. 57—66.

[2] *Mikeš J., Chuda H., Hinterleitner I* Conformal holomorphically projective mappings of almost Hermitian manifolds with a certain initial condition. /*J. Mikeš* // – International Journal of Geometric Methods in Modern Physics Vol. 11, No. 5, 2014 8 p.

Про четвірки проекторів, поліном від яких є скалярним оператором

О. О. Чернова

КНУ ім. Шевченка, Київ, Україна

E-mail address: kseniaschool10@ukr.net

У роботі [1] (див. також наведену бібліографію) досліджується питання про існування четвірок ортопроекторів P_1, P_2, P_3, P_4 у деякому гільбертовому просторі H, для яких виконується рівність

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = I.$$

Такі четвірки цікаві, зокрема, з точки зору теорії зображень графів та частково впорядкованих множин, терії фреймів та ін.

Ми розглядаємо задачу про опис четвірок ортопроекторів з умовою

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \lambda I - \alpha(P_1P_2 + P_2P_1 + P_3P_4 + P_4P_3), \quad 0 < \alpha < 1, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

При розв'язанні цієї задачі ми використовуємо наступні поліноми від четвірки ортопроекторів

$$A = P_1 + P_2 + \alpha(P_1P_2 + P_2P_1),$$
$$B = P_3 + P_4 + \alpha(P_3P_4 + P_4P_3).$$

Нами описано структуру спектра таких операторів, а саме доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай* $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \notin \{0, 1, 2+2\alpha\}$. *Тоді*

$$F(\lambda) = \lambda + \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha} - \frac{1+\alpha}{\alpha}\sqrt{4\alpha\lambda + (1-\alpha)^2} \in \sigma(A).$$

Також досліджено, при яких значеннях λ співвдіношення (1) має розв'язки.

Показано, що у незвідному зображенні спектри операторів A та B визначаються орбітами динамічної системи, породженої відображеннями F та $f(x) = \lambda - x$, які або повністю лежать на відрізку $[0, 2+2\alpha]$, або залишають цей відрізок, проходячи через точку 0. Залежно від значення параметра λ, знайдені точки з відрізка $[0, 2+2\alpha]$, орбіти яких задовольняють цю умову, та побудовано відповідний незвідний набір ортопроекторів. Нижче наведене одне з таких тверджень.

Теорема 2. *При* $\lambda = 2+2\alpha$ *відрізок* $[0, 2+2\alpha]$ *переходить в себе при відображеннях* F *та* f. *Відповідні орбіти:*

1. $\{0, 2+2\alpha\}$
2. $\{O_1\}$
3. $\{O_{\frac{\lambda}{2}}\}$
4. $\{O_x\}, x \in (1, \frac{\lambda}{2})$

Список літератури

[1] V.Ostrovskyi and S.Rabanovich, *Some remarks on Hilbert representations of posets*, Methods Funct. Anal. Topol. **20** (2014), no. 7, 149–163.

Розвиток інтелектуальних умінь учнів у процесі розв'язування задач на побудову

С. М. Шевченко

ДУТ, Київ, Україна

E-mail address: SN-shevchenko65@yandex.ua

Сьогодення диктує сучасній школі вимогу постійно удосконалювати методику навчання математики з метою формування та розвитку інтелектуальних умінь учнів. Школа має надати учням не тільки міцну теоретичну базу з математики. Насамперед, навчання повинно максимально бути спрямованим на розвиток їх розумової активності: уміння самостійно оновлювати та поповнювати знання, свідомо використовувати їх у процесі розв'язання задач. Увага до проблеми розвитку інтелектуальних умінь учнів пояснюється також тим, що вони мають вагоме значення не тільки у процесі їх освіти, але й підготовки учнів до їх професійної діяльності.

Під розвитком інтелектуальних умінь ми будемо розуміти формування та розвиток наступних: - порівнювати предмети, знаходити спільні властивості та відмінності; - виділяти істотні властивості та абстрагувати від другорядних; - проводити аналіз, тобто розкладати предмет на складові з метою їх вивчення кожного окремо; - проводити синтез, тобто поєднувати розкладені частини у єдине ціле з метою вивчення їх взаємозв'язку; - будувати гіпотези, перевіряти їх та робити висновки; - доводити свої судження, висловлюватися послідовно та обґрунтовано.

Потужним потенціалом для формування та розвитку інтелектуальних умінь учнів є математичні задачі. Саме у процесі розв'язання задач математичні поняття, аксіоми, теореми, формули, означення, геометричні фігури постають перед учнями у різних ракурсах, динамічно, з різними зв'язками та взаємозв'язками. Серед математичних задач окремо слід відмітити задачі на побудову [1].Наявність у цих задачах таких етапів, як аналіз, доведення та дослідження, дозволяє зробити висновок, що саме вони сприяють розвитку вище названих інтелектуальних умінь учнів [2].

Проте шкільна практика показує, що у процесі розв'язання задач на побудову виникають великі труднощі: нестача часу, слабка підготовка учнів і т.п. Тому вчитель закріплює теоретичний матеріал простими задачами, а у підручниках відмічається тенденція на зменшення кількості задач на побудову.

Вважаємо, що зазначена проблема може бути розв'язана наступним шляхом: пропонуємо ряд теоретичних фактів повідомляти учням через задачі на побудову. Процес вивчення математики, відкриття нового знання для учня має бути схожим на процес дослідження у математиці, тобто імітувати творчу діяльність. Зрозуміло, що у цьому випадку викладання націлено не на передачу наукового теоретичного матеріалу, а на організацію активного пошуку учнями знань, які складають зміст запропонованої системи знань, потім логічно упорядковують їх. Все це має ефект розвитку інтелектуальних умінь учнів та розуміння математичного матеріалу, що вивчається.

Список літератури

[1] Чашечникова Л.Г., Петренко С.В., Чашечникова О.С. Геометричні побудови на площині / Л.Г. Чашечникова, С.В. Петренко, О.С. Чашечникова. -– Суми: Ярославна, 1999.– 98 с.

[2] Шевченко С.М. Розвиток аналітичного мислення студентів вищих технічних навчальних закладів у процесі вивчення математичних дисциплін: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец. 13.00.02 – теорія та методика навчання (математика) / С.М.Шевченко. -– К.: НПУ ім. М.П.Драгоманова, 2013. -– 20 с.

Обобщенные гомологические группы Чогошвили

Ш. Бахтадзе

Батумский Гос. Университет им. Шота Руставели, Грузия

E-mail address: bakhtadze.shalva@yandex.com

Рассмотрим категорию $\mathbf{Q}$ пар компактных хаусдорфовых пространств и их непрерывных отображений. Пусть (X, A) $\in\mathbf{Q}$ и $S = \{S_t | S_t \subset X; t \in T\}$ произвольно взятая фиксированная система попарно различных непустых подмножеств S_t пространства X, которые индексированы элементами множества T, а $\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, ..., e_n^\alpha,\} \in Part^f(X)$ произвольное конечное разбиение [1,4] пространства X и $S = \{S_t | S_t = S_t \cap A, t \in T\}$ система подмножеств подпространства A соответствующая системе S, а $\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, ..., e_n^\alpha,\} \in Part^f(A)$, где $e_i^\alpha = e_i^\alpha \cup A, i = \overline{1,n}$, конечное разбиение подпространства A соответствующее разбиению α. С учётом указанных соглашении, введем следующее

Определение 1. ***Обрушенным нервом*** *конечного разбиения* $\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, ..., e_n^\alpha,\} \in Part^f(X)$ *относительно системы* $\{S = S_t | S_t = S_t \in X, t \in T\}$ *подмножеств пространства* X*, называется такой симплициальный комплекс* $K_\alpha^S(X)$*, который состоит из всех таких и только таких p - мерных (p=0,1,2,3,...) симплексов вида* $[\overline{e_{i_0}^\alpha} \overline{e_{i_1}^\alpha} ... \overline{e_{i_p}^\alpha}]$*, для вершин (т.е. элементов* $\overline{e_{i_0}^\alpha}, \overline{e_{i_1}^\alpha}, ..., \overline{e_{i_p}^\alpha}$ *замкнутого покрытия* $\overline{\alpha} = \{\overline{e_{i_0}^\alpha}, \overline{e_{i_1}^\alpha}, ..., \overline{e_{i_p}^\alpha}\}$*), для которых существует такой элемент* $S_t \in S$*, что одновременно имеет место следующие соотношения:* $\overline{e_{i_0}^\alpha} \cap S_t \neq \varnothing, \overline{e_{i_0}^\alpha} \cap S_t \neq \varnothing, ... \overline{e_{i_0}^\alpha} \cap S_t \neq \varnothing,.$

Соответственно, определен обобщённый поднерв - симплициальный комплекс $K_\alpha^s(A)$ комплекса $K_\alpha^s(X)$ разбиения $\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, ..., e_n^\alpha,\} \in Part^f(A)$ подпространства $A \subset X$ относительно системы S.

Определение 2. *Пара комплексов* $(K_\alpha^s(X); K_\alpha^s(A))$ *называется* ***парой обобщённых нервов*** *пары конечных разбиений* $(\alpha, \alpha) \in Part^f(X, A)$*, относительно системы подмножеств* (S, S) *пары* $(X, A) \in Q$*.*

Нетрудно заметить, что пара обобщённых нервов $(K_\alpha^s(X); K_\alpha^s(A))$ пары (X, A), вообще говоря, отличается от пары классических нервов N_α, N_α (см.[1-4]) той же пары. Кроме того, существует достаточно много различных систем $S_1 \neq S_2$, подмножеств пространства X, для которых имеет место соотношение: $(K_\alpha^{S_1}(X); K_\alpha^{S_1}(A)) \neq (K_\alpha^{S_2}(X); K_\alpha^{S_2}(A))$. Кроме того:

1. Если $S = \{\{x\} | x \in X\}$, то $K_\alpha^S(X) = N_\alpha$;

2. Если $S = \{X\}$, то обобщённый нерв $K_\alpha^S(X)$ конечного разбиения $\alpha = \{e_1^\alpha, e_2^\alpha, ..., e_n^\alpha,\}$ пространства X относительно системы S является симплициальным комплексом, который состоит лишь из одного единственного n - мерного симплекса $t^n = [\overline{e_{i_0}^\alpha} \overline{e_{i_0}^\alpha} ... \overline{e_{i_0}^\alpha}]$ и из всех его граней меньших размерностей.

Пусть (X, A) - пара компактных хаусдорфовых пространств, (S, S) пара систем подмножеств этих пространств, а $Part^f(X, A)$ направленное, по отношению вписанности, множество всех пар (α, α) конечных разбиении [1-4] пары (X, A) и G - произвольная абелева группа. Если $\beta \succ \alpha$, т.е. разбиение β вписано в разбиение α, то имеется естественная однозначно определённая симплициальная проекция "на"

$$\pi_\alpha^\beta : (K_\beta^S(X); K_\beta^S(A)) \to (K_\alpha^S(X); K_\alpha^S(A)).$$

Для каждого целого числа $q \in Z$, совокупность групп цепей $C_q(K_\alpha^S(X), K_\alpha^S(A); G)$, где $\alpha \in Part^f(X)$, и гомоморфизмов $\pi_{\alpha^*}^\beta$, которые индуцированы отображениями π_α^β, составляют обратный спектр $C = \{C_q(K^S_\alpha(X), K^S_\alpha(A); G)\}$, предел которого, обозначаемый через $C^S_q(X,A;G)$, будем называть q - мерной группой обобщённых проекционных цепей пары (X,A) относительно системы S над группой коэффициентов G.

Естественным образом определены дифференциалы

$$\partial^{(X,a)}_q : C^S_q(X,A;G) \to C^S_{q-1}(X,A;G), q \in Z,$$

для которых имеет место равенства $\partial^{(X,A)}_q \circ \partial^{(X,A)}_{q+1} = 0, q \in Z$.

Определение 3. *Для каждого числа $q \in Z$, факторгруппа $Ker\partial^{(X,A)}_q / Im\partial^{(X,A)}_{q+1}$ обозначаемая через $H^S_q(X,A;G)$ называется* q ***- мерной обобщённой гомологической группой Чогошвили*** *пары пространств $(X,A) \in Q$ относительно системы S над группой коэффициентов G .*

Утверждение 1. *Для произвольной пары $(X,A) \in Q$, абелевой группы G, целого числа $q(q = 0,1,2,3,...)$ и для системы $S = \{\{x\} \| x \in X\}$, имеем: $H^S_q(X,A;G) \equiv H_q(X,A;G)$ [стр.4].*

Предложение 1. *Для любой пары $(X,A) \in Q$, абелевой группы G, произвольно выбранной системы $S = \{S_t | S_t \subset X, t \in T\}$ подмножеств пространства X и любого целого числа $q \in Z$, короткая последовательность групп обобщённых проекционных цепей*

$$0 \to C^S_q(A,G) \xrightarrow{i^q_{**}} C^S_q(X,G) \xrightarrow{j^q_*} C^S_q(X,A;G) \to 0, q \in Z, (1),$$

***точна**, где $i : A \to X, j : X \to (X,A)$ отображения вложения.*

Связывающий гомоморфизм последовательности (1) обозначим через $\partial^S_* = \{\partial^S_q : H^S_q(X,A;G) \to H^S_{q-1}(A;G), q \in Z\}$.

Теорема 1. *Если $(X,A) \in Q$, S - произвольно выбранная система подмножеств пространства X и G - произвольная абелева группа, то длинная последовательность обобщённых гомологических групп Чогошвили*

$$... \to H^S_q(A,G) \xrightarrow{i^q_*} H^S_q(X,G) \xrightarrow{j^q_*} H_q(X,A;G) \xrightarrow{\partial^S_*} H^S_{q-1}(A,G) \to ... \xrightarrow{j^0_*} H_0(X,A;G) \to 0$$

*где $i : A \to X$, $j : X \to (X,A)$ - отображения вложения, **точна**.*

Список литературы

[1] Г. С. Чогошвили. Известия АН СССР, серия. Мат. , 15(1951), 421-438.

[2] Н. А. Берикашвили. Труды мат.ин-та АН СССР, 1983, т.154, 24-37.

[3] Ш. А. Бахтадзе. Сообшения АН Грузинской ССР, 1986, т. 121, № 1, 29-32.

[4] Sh. Bakhtadze. Projective and special homologies. Journ.of math.scien.,v.119, No.4, 2004, 387-458.

Об условиях, при которых сохраняются тензоры Римана и Риччи относительно геодезических отображений пространств аффинной связности

В. Е. Березовский, Й. Микеш

Уманский национальный университет садоводства, Украина

E-mail address: berez.volod@rambler.ru

Palacky University, Olomouc, Czech Republic

E-mail address: josef.mikes@upol.cz

Рассматриваются диффеоморфизмы пространств аффинной связности $A_n \to \bar{A}_n$, при которых сохраняются тензоры Римана и Риччи, и получены необходимые и достаточные условия таких диффеоморфизмов.

Среди изучаемых диффеоморфизмов пространств аффинной связности важную роль играют геодезические отображения, которые характеризуются условиями (см. [1,2,3]):

$$P^h_{ij}(x) = \psi_i(x)\delta^h_j + \psi_j(x)\delta^h_i, \tag{1}$$

где P^h_{ij} – тензор деформации связностей, δ^h_i – символы Кронекера и $\psi_i(x)$ – некоторый ковариантный тензор.

Нами доказаны теоремы

Теорема 1. *Пространство аффинной связности A_n допускает геодезическое отображение на пространство аффинной связности $\bar{A}_n$ с сохранением тензоров Римана и Риччи, тогда и только тогда, когда система уравнений типа Коши в ковариантных производных*

$$\psi_{i,j} = \psi_i\psi_j \tag{2}$$

имеет в нем решение относительно функций $\psi_i(x)$.

Теорема 2. *В пространствах аффинной связности A_n, которые допускают геодезическое отображения с сохранением тензоров Римана и Риччи, существует ковариантно постоянное векторное поле.*

Условия интегрируемости уравнений (2) имеют вид

$$\psi_\alpha R^\alpha_{ijk} = 0, \tag{3}$$

где R^h_{ijk} – тензор кривизны пространства A_n. Эти условия являются линейными алгебраическими уравнениями относительно $\psi_i(x)$.

В плоском пространстве уравнения (2) вполне интегрируемы и локально общее решение зависит от n параметров, которыми являются начальные значения $\psi_i(x_0) = \psi^0_i \in \mathbb{R}$.

Общее решение уравнений (2) в не плоских пространствах зависит от не более чем $n-1$ числовых параметров.

Список литературы

[1] Н. С. Синюков, *Геодезические отоpажения римановых пространств*. Наука, М. (2008), 256с.

[2] J. Mikeš, at al., *Differential geometry of special mappings*. Palacky Univ. Press, Olomouc (2015), 569p.

Изотопные функции Морса-Ботта

О. П. Бондарь

КЛА НАУ, Кировоград, Украина

E-mail address: bondarkla@ukr.net

В.В.Шарко [1] доказал существование круглых функций Морса (функций Морса-Ботта, S^1-функций) на некоторых многообразиях. Он рассматривал эти функции как частный случай функций Ботта - функций на многообразии, критические точки которых образуют невырожденные критические гладкие подмногообразия, не пересекающиеся с краем (если он не пуст). Терстон [2] отметил, что существование круглых функций Морса на многообразии эквивалентно разложению многообразия на круглые ручки, доказательство чего принадлежит Миюоси [3]. Напомним, что многообразие W получено из многообразия W_1 с помощью приклейки круглой ручки индекса λ, если $W = W_1 \bigcup_\varphi S^1 \times D^\lambda \times D^{n-\lambda}$, где $\varphi : S^1 \times \partial D^\lambda \times D^{n-\lambda}$ - гладкое вложение. Азимов [4] доказал, что приклейка к многообразию обыкновенных ручек индексов λ и λ+1 зквивалентна приклейке к нему круглой ручки индекса λ (λ>0). Техника слияния обыкновенных ручек в круглую указана Азимовым на языке изотопии многообразия с приклеенными ручками.

Технику слияния ручек и разложения многообразий на ручки можно описать также с помощью изотопных функций, рассмотренных в [5]. Изотопные функции определялись следующим образом. Пусть M - n-мерное многообразие и X - его подмножество. Следуя определениям [6] и [7], обозначаем через $Iso(M, X)$ группу его изомофизмов (C^r-диффеоморфизмов, $r = 1, \ldots, \infty$ или гомеоморфизмов или PL-гомеоморфизмов), неподвижных на X. $Iso(M, \oslash) = Iso(M)$. Если M ориентируемо, то $Iso^+(M)$ обозначает группу изоморфизмов, сохраняющих ориентацию M. $Iso_0(M, X)$ - подгруппа в $Iso(M, X)$, состоящая из всех изоморфизмов, изотопных idM в пространстве $Iso(M, X)$. Функции f_0 и f_1 на многообразии называются изотопными (C^r-изотопными или непрерывно изотопными или изотопными функциями Морса-Ботта), если существуют такая неподвижная на X изотопия $H : (M, X) \times I \to (M, X) \times I$ и изотопия $h : [0, 1] \times I \to [0, 1] \times I, H_t \in Iso_0(M, X)$ и $h_t \in Iso_0^+([0, 1])$, что для всех $t \in [0, 1]$ $h_t \circ f_0 = f_t \circ H_t$ или $f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t^{-1}$ - функции одинакового вида (C^r-гладкие, непрерывные, функции Морса-Ботта).

Список литературы

[1] В. В. Шарко *Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты).*,- Киев: Наук. думка, (1990), 296с.

[2] W. Thurston *Existence of codimension-one foliations.*,-Ann. Math.-104,N.2,(1976),-P.249-268.

[3] S. Miyosihi Foliated round surgery of codimension-one foliated manifolds, Topology - 21,N.3,(1983),-P.245-262.

[4] D. Asimov Round handles and non-singular Morse-Smale flows, Ann. Math. -102,N.1,(1975),- P.41-54.

[5] О. П. Бондарь *Об определении изотопных функций*,-Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі - 2015", (2015), С.67.

[6] И. Ю. Власенко, С. И. Максименко, Е. А. Полулях *Топологические методы в изучении групп преобразований многообразий.*,- Тр. Ин-та математики НАН Украины, (2006), 30-80с.

[7] A. O. Prishljak *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a closed surface.*,-http: //arxiv.org/pdf/math/9912004.

Теоретико-множественное описание перколяционных переходов на фрактальных матрицах

А. Н. Герега

ОНАПТ, Одесса, Украина

E-mail address: a.herega@gmail.com

Основы фрактальной теории, опубликованные Бенуа Мандельбротом в 70-х годах [1], за прошедшие сорок лет оформились в научное направление, одним из центров внимания которого стали конструктивные фракталы. В сложившемся стереотипе их описания в научной и учебной литературе основное внимание уделяется изучению техники построения, асимптотическому поведению, расчету размерностей и т.п. Между тем, такие фракталы как канторово множество, континуумы Серпинского, Пеано, Гильберта и другие – традиционные объекты исследования теории множеств, топологии, математического и функционального анализа, теории итерированных функций [2], [3]. Именно в трактовке математических дисциплин, в которых они были введены в научный обиход и впервые исследовались, эти объекты рассмотрены в нашем докладе.

Два примера. В одной из работ [4], представленных в обзоре, введен в рассмотрение аналог известного фрактала – ковер Серпинского с конечно-бесконечной (гибридной) разветвленностью.

Как известно, топологически ковер Серпинского – одномерный объект с континуальным индексом ветвления во всех точках [2]. Конкретное значение разветвленности не всегда важно, но некоторые свойства фракталов с конечной и бесконечной разветвленностью существенно различны [4]. Наиболее интересное для нас свойство таких фракталов – наличие настоящего перколяционного перехода, в отличие от решеток с конечной разветвленностью, на которых путь протекания разрушается при выбрасывании конечного числа узлов.

В [4] методом ренорм-групп рассчитаны параметры перколяционного перехода, возникающего во втором континууме Серпинского [2], а также получены рекуррентные соотношения для вычисления силовых полей предфракталов произвольного поколения.

В работе [5] ряд традиционных моделей перколяционной теории исследован по предложенной авторами вычислительной методологии, которая, в отличие от классического результата, показала существование вблизи точки фазового перехода нескольких бесконечных кластеров.

Список литературы

[1] B. B. Mandelbrot *Les objets fractals: Forme, hasard et dimension.* – Paris: Flammarion, (1975), 208 с.

[2] П. С. Александров *Введение в общую теорию множеств и функций.* – М.-Л.: ОГИЗ, (1948), 413 с.

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин *Элементы теории функций и функционального анализа.* - М.: Наука, (1976), 543 с.

[4] А. Н. Герега и др. *Ковер Серпинского с гибридной разветвленностью: перколяционный переход, критические показатели, силовое поле.* Успехи физических наук, (2012), Т. 182, вып. 5. – С. 555-557.

[5] D. I. Iudin, Ya. D. Sergeyev, M. Hayakawa *Interpretation of percolation in terms of infinity computations.* Applied Mathematics and Computation, (2012), V. 218, iss. 16. – P. 8099-8111.

Стационарные значения секционной кривизны грассманова многообразия псевдоевклидова пространства

М. А. Гречнева, П. Г. Стеганцева

ЗНУ, Запорожье, Украина

E-mail address: mag83@list.ru, steg_pol@mail.ru

В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_4$ рассматриваем подмногообразия двумерных пространственноподобных и временноподобных плоскостей грассманова многообразия, которые будем обозначать ${}^SPG(2,4)$ и ${}^TPG(2,4)$ соответственно. Можно показать, что не существует экстремальных значений секционной кривизны $K(\sigma)$ этих подмногообразий, то есть $K(\sigma)$ может принимать любые действительные значения (в отличии от евклидова пространства, в котором $K(\sigma) \in [0,2]$). По этой причине будем находить значения секционной кривизны в точках локальных экстремумов.

При стандартном плюккеровом погружении указанных многообразий в пространство ${}^3R_6$ метрика их точечных образов имеет сигнатуру $(--++)$ [1]. Двумерные касательные площадки к каждому из подмногообразий будем задавать бивекторами с координатами $p^{ab} = x^{[a}y^{b]}$, где $\bar{X} = (x^a)$ и $\bar{Y} = (y^a)$, $a, b = 1,..,4$ - касательные векторы. Тогда секционная кривизна в направлении данной площадки определяется формулой [3]

$$K(\sigma) = \frac{R_{abcd}p^{ab}p^{cd}}{(g_{ac}g_{bd} - g_{ab}g_{cd})p^{ab}p^{cd}},$$

где R_{abcd} - тензор кривизны, а g_{ij} - компоненты метрического тензора подмногообразий грассманова многообразия. Точки локальных экстремумов находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial R_{abcd}}{\partial p^{ij}} = 0.$$

Показано, что стационарные значения секционной кривизны равны 0 и -1.

И.Маазикас в [2] вычислял стационарные значения секционной кривизны для подмногообразий m-плоскостей псевдоевклидовых пространств.

В дальнейшем планируется исследовать двумерные поверхности пространства ${}^1R_4$, для которых секционная кривизна грассманова многообразия вдоль площадок, касательных к их грассманову образу, равна найденным стационарным значениям.

Список литературы

[1] Гургенидзе М.А. *О погружении грассманова многообразия псевдоевклидова пространства*, Збірник праць Інституту математики НАН України (3),(2006) С.107–114

[2] Маазикас И. *К римановой геометрии грассмановых многообразий неизотропных подпространств псевдоевклидова пространства*, Ученые записки Тартуск. ун-та, (вып.342), (1974) С.76-82

[3] Петров А.З. *Пространства Эйнштейна* М.: Физматгиз, (1961)

Геометрические свойства подфунктора $P_{f,\,n}^{\,C}$ функтора вероятностных мер.

Жураев Т.Ф., Абдурашидова А.С.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Узбекистан

E-mail address: tursunzhuraev@mail.ru, anoraabdurashidova@mail.ru

В работе [1] был приведен подфунктор $P_{f,\,n}^{\,C}$ функтора P вероятностных мер в категории Comp - компактов и непрерывных отображений в себя. Напомним, что пространство $P_{\,f}(X) \subset P(X)$ состоит из всех вероятностных мер вида

$$\mu = m_1\delta(x_1) + ... + m_k\delta(x_k)$$

с конечными носителями, для каждой из которых $m_i \geq \frac{k}{1+k}$ при некотором i. Для натурального числа n положим $P_{f,\,n}^{\,C} = P_f^C \cap P_n$. т.е. для компакта имеет место равенство $P_{f,n}^C(X) = \{\mu \in P_f^C(X) : |supp\ \mu| \leq n\}$ где $P_{\,f}^{\,C}(X) = \{\mu \in P_f\,(X) :\, \mu$ лежит в одной из компонент связности пространства X$\}$. Функтор $P_{f,\,n}^{\,C}$ является подфунктором функтора P_n где $P_{f,\,n}\,(X) = \left\{\mu \in P_f\,(X) : |supp\ \mu| \leq n\right\}$. Заметим, что $P_{f,\,n}^{\,C}$ является локально выпуклым подфунктором функтора P [1].

Имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Функтор $P_{f,\,n}^{\,C}$ сохраняет локальную стягиваемость сепарабельных метрических пространств.

Говорят, что топологическое пространство X называется k_ω - пространством [2], если X является возрастающим пределом семейства компактов X_i. т.е. $X = \lim\limits_{\to} X_i$, где $X_1 \subset X_2 \subset ....$

Теорема 2. Для любого метрического k_ω - пространства X пространство $P_{f,\,n}^{\,C}\,(X)$ тоже k_ω - пространство.

По определению, паракомпактное топологическое пространство называется многообразием, моделированным на пространство Y или Y - многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Теорема 3. Функтор $P_{f,\,n}^{\,C}$сохраняет Q - многообразий,

где $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty}\,[-1,1]$- гильбертов куб, $[-1,1]_i \subset R$ - отрезок.

Список литературы

[1] Т.Ф.Жураев Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов. Канд.диссер.МГУ,1989,с.90.

[2] T.Banakh, K.Sakai Characterization of $(R^\infty,\ \sigma)-$or (Q^∞, Σ)-manifolds and their applications. Top. and its. Appl. 106, 2000, pp.115-134.

Геометрические свойства подпространства суперрасширения $\lambda(X)$ являющихся бесконечномерными многообразиями

Жураев Т.Ф., Маннобова Н.М.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Узбекистан

E-mail address: tursunzhuraev@mail.ru, nmannobova@mail.ru

В данной заметке рассматриваются некоторые геометрические свойства типа бесконечномерных Q - многообразий являющихся подмножествами пространства $\lambda(X)$ суперрасширения.

Напомним, что суперрасширением топологического пространства X называется множество $\lambda(X)$ состоящее из всех максимально сцепленных систем (коротко мсс) замкнутых подмножества пространства X [1], наделенное волмэновской топологией. Для произвольного компакта X через $\lambda_n(X)$ обозначается подпространство суперрасширения $\lambda(X)$, состоящее из всех максимально сцепленных систем носитель которых имеет мощность $\leq n$. $\xi' \subset \xi$ назовём базой, если для любого $F \in \xi$ существует такое $\in \xi'$, что $\subset F$. Система ξ_Hнаименьших (по включению) элементов мсс ξ называется наименьшей базой ξ. Носителем мсс ξ называется множество $H(\xi) = \bigcap \xi_H$. Значит, $\lambda_n(X) = \{\xi : \xi \in \lambda(X) \quad |H(\xi)| \leq n\}$.

Говорят, что паракомпактное топологическое пространство X называется многообразием моделированным на пространстве Y или Y-многообразием, если всякая точка пространства X имеет окрестность гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y.

Теорема 1. Для каждого (связного) Q-многообразия X пространства $\lambda(X)$ является Q-многообразием.

Теорема 2. Для любого метризуемого континиума Пеано X и любого $n \in N$ пространство $\lambda(X) \backslash \lambda_n(X)$ является Q - многообразием,

где $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i$- гильбертов куб, $[-1,1]_i \subset R$- отрезок в R.

Список литературы

[1] Van Mill Superextensions of metrizable continue are Hilbert cubes. Fund. Math. 107, 1980, pp.201-224

[2] А.В.Иванов О пространстве полных сцепленных систем Сиб.мат.журнал 1986, Т 27, №6, с. 95-110

Проективно факторные функторы с $C-$ свойство топологических пространств

Жураев Т.Ф.

ТГПУ имени Низами, Узбекистан

E-mail address: tursunzhuraev@mail.ru

В данной заметке рассматриваются компактные, метрические, топологическое пространства обладающим $C-$ свойством при воздействии проективно факторных, проективно замкнутых и проективно открытых функторов. В работе [1] было введено и изучение некоторые геометрические, топологические свойство проективно факторные функторы в категории компактных пространств и непрерывных отображений в себя.

Нормальное T_1- пространство X называется $C-$ пространством $(X \in C)$, если для любой последовательности (U_i), $i \in \omega$ его открытых покрытий существует последовательность (V_i) дизъюнктных открытых семейств пространства $X, C-$ вписанная в последовательность (U_i), $C-$ вписанность означает, что каждое семейство V_i вписано в покрытие U_i а совокупность семейств V_i является покрытием пространства X т.е.

$$X = \bigcup \{ \bigcup V_i : \ i \in \omega \}$$

В этом случае говорят что последовательность (U_i), $i \in \omega$ (бесконечная или конечная) несущественна.

Определение [2]. Пусть P- класс открытых покрытий топологических пространств. Нормальное T_1- пространство X называется P -C- пространством, если всякая последовательность (U_i), $i \in \omega$, его покрытий из класса P несущественна. В качестве P можно взять всех конечных, из всех счетных, из всех звездноконечных, из всех локально конечных, из всех точечно конечных покрытий.

Теорема 1. Проективно факторные нормальные функторы сохраняет компактных $C-$ пространств.

Теорема 2. Проективно замкнутые и открытые нормальные функторы сохраняет метрических $C-$ пространств.

Теорема 3. Проективно факторные нормальные функторы сохраняет P-C- пространства, где P-состоит из всех локально конечных покрытий.

Теорема 4. Проективно замкнутые и открытые нормальные функторы сохраняет P-C-пространства, где P-состоит из всех локально конечных покрытий.

Список литературы

[1] T.F.Zhuraev On projectively quotient functors. Comment. Math. Univ. Carolinae, 2001, 42, 3, p. 561-573.

[2] В.В.Федорчук Слабо бесконечномерные пространства. Успехи Мат.наук, 2007, Т-62, вып 2(374), С.109-164.

Исследование колебаний физического маятника фракционным методом

В. Х. Кирилов, Н. П. Худенко, А. В. Витюк

Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна

E-mail address: vladkir@renome-i.net, khudenkon@mail.ru, vityk.1969@ukr.net

Одной из важнейших проблем в инженерной практике являются процедуры приведения исходных уравнений, моделирующих какой-либо объект или процесс, к простейшему виду. Единая процедура приведения исходных уравнений к безразмерному виду, выделение малого параметра и дальнейшее исследование упрощённых уравнений методом возмущений называется факторным анализом ([1], [2]).

В качестве примера фракционного анализа рассмотрим нелинейные колебания физического маятника ($\varphi(t)$ - угловое отклонение маятника от вертикали)

$$\ddot{\varphi} + k^2 sin\varphi = 0, \tag{1}$$

с начальными условиями: при $t = 0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = 0$.

Вводятся безразмерные переменные $\varphi_1 = \frac{\varphi}{\varphi_0}$, $t_1 = \frac{t}{T}$, где $T = \frac{2\pi}{k}$-период линейных колебаний. Приведем (1) к безразмерному виду и разложим $sin\varphi$ в степенной ряд. Если ввести малый параметр $\varepsilon = \frac{4\pi^2\varphi_0^2}{3!} \ll 1$, то уравнение (1) запишется в виде:

$$\ddot{\varphi}_1 + 4\pi^2\varphi_1 - \varepsilon\varphi_1^3 = 0. \tag{2}$$

По методу возмущений решение (2) ищем в форме

$$\varphi_1(t_1) = \varphi_1^0(t_1) + \varepsilon\varphi_1^1(t_1)$$

$$p^2 = 4\pi^2 + \varepsilon c.$$

В результате получим систему дифференциальных уравнений для последовательных приближений

$$\ddot{\varphi}_1^0 + p^2\varphi_1^0 = 0, \tag{3}$$

$$\ddot{\varphi}_1^1 + p^2\varphi_1^1 = c\varphi_1^0 + (\varphi_1^0)^3, \tag{4}$$

с начальными условиями: $\varphi_1^0(0) = 1$, $\dot{\varphi}_1^0(0) = 0$, $\varphi_1^1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1^1(0) = 0$. В результате приближённое решение задачи (1) в размерной форме имеет вид:

$$\varphi(t) = \varphi_0\big[cos\omega t + \frac{1}{192}\frac{\varphi_0^2}{(1 - 0,5\pi^2\varphi_0^2)}\big(cos\omega t - cos3\omega t\big)\big],$$

где $\omega = \frac{kp}{2\pi} = k\sqrt{1 - \frac{1}{2}\pi^2\varphi_0^2}$, т.е. частота колебаний зависит от начальных условий.

Список литературы

[1] Н. Н. Никитин *Курс теоретической механики.*,- М. : Высш. шк., (1990).– 607с.

[2] Л. И. Седов *Методы подобия и размерности в механике.*,- М.: Наука, (1977).– 440 с.

О геометрии торсообразующих векторных полей на почти контактных метрических многообразиях

В. Ф. Кириченко

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: highgeom@yandex.ru

О. Е. Арсеньева

(МПГУ, Москва, Россия)

В. М. Кузаконь

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

Пусть $M - 2n+1$-мерное гладкое многообразие, $n > 1, \mathfrak{X}(M) - C^{\infty}(M)$ - модуль гладких векторных полей на M, d – оператор внешнего дифференцирования.

Определение 1. *Ненулевое векторное поле* $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ *называется* торсообразующим, *если* $\nabla_\xi = \rho id + a \otimes \xi$ *для некоторых* $\rho \in C^{\infty}(M)$ *и* $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. *Дифференциальную 1-форму* a *и функцию* ρ *назовем* характеристическими. *Торсообразующее векторное поле называется* конциркулярным, *если* $da = 0$, *называется* спецконциркулярным, *если* $a = 0$, *назовем абсолютно торсообразующим, если векторное поле* $\Phi\xi$ *также является торсообразующим.*

Определение 2. *Векторное поле* $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ *назовем* псевдо-голоморфным, *если эндоморфизм* Φ ξ*-инвариантен.*

Теорема 1. *Торсообразующее векторное поле* ξ *на почти контактном метрическом многообразии* M *псевдо-голоморфно тогда и только тогда, когда* $\nabla_\xi(\Phi)X = a(\Phi X)\xi - a(X)\Phi\xi, \qquad X \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 2. *Торсообразующее векторное поле* ξ *на почти контактном метрическом многообразии* M *спецконциркулярно тогда и только тогда, когда справедливо тождество:* $\nabla_\xi(\Phi)X = 0, \qquad X \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 3. *Пусть* M *– почти контактное метрическое многообразие, допускающее торсообразующее векторное поле* ξ. *Тогда векторное поле* $\Phi\xi$ *будет абсолютно торсообразующим тогда и только тогда, когда выполняется тождество:* $\nabla_X(\Phi)\xi = 0; \qquad X \in \mathfrak{X}(M)$.

Теорема 4. *Пусть* M *– косимплектическое многообразие,* $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ *– торсообразующий вектор. Тогда справедливы следующие утверждения: 1.* ξ *– абсолютно торсообразующий вектор; 2.* ξ *– псевдо-голоморфный вектор; 3.* ξ *– спецконциркулярный вектор.*

Теорема 5. *1. Многообразие Сасаки не допускает абсолютно торсообразующих векторных полей; 2. На многообразии Сасаки торсообразующее векторное поле псевдо-голоморфно тогда и только тогда, когда оно спецконциркулярно.*

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф., Кузаконь В.М. О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях. // Укр. матем. журнал, т.65, вып.7, 2013, с.2015 – 2018.

[2] Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. // Одесса, Печатный Дом, 2013, 457 с.

Псевдо-голоморфные торсообразующие почти контактные метрические многообразия

В. Ф. Кириченко, О. Е. Арсеньева

МПГУ, Москва, Россия

E-mail address: `highgeom@yandex.ru`

Пусть $M - 2n+1$-мерное гладкое многообразие, $n > 1, \mathfrak{X}(M) - C^{\infty}(M)$ - модуль гладких векторных полей на M, d – оператор внешнего дифференцирования.

Определение 1. *Ненулевое векторное поле* $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ *назовем* псевдо-голоморфным*, если эндоморфизм* Φ ξ*-инвариантен.*

Определение 2. *Ненулевое векторное поле* $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ *называется* торсообразующим*, если* $\nabla_{\xi} = \rho id + a \otimes \xi$ *для некоторых* $\rho \in C^{\infty}(M)$ *и* $a \in \mathfrak{X}^{*}(M)$*. Дифференциальную 1-форму* a *и функцию* ρ *назовем* характеристическими*. Торсообразующее векторное поле называется* концируклярным*, если* $da = 0$*,называется* спецконцируклярным*, если* $a = 0$*, назовем абсолютно торсообразующим, если векторное поле* $\Phi\xi$ *также является торсообразующим.*

Теорема 1. *Псевдо-голоморфный вектор на многообразии Кенмоцу является спецконциркулярным полем.*

Теорема 2. *Векторное поле на слабо косимплектическом многообразии спецконциркулярно тогда и только тогда, когда оно абсолютно торсообразующее.*

Теорема 3. *Торсообразующее векторное поле на почти контактном метрическом многообразии, дуальная 1-форма которого совпадает с характеристической 1-формой, является конциркулярным векторным полем и внутренним образом порождает конциркулярное локально конформное преобразование метрики этого многообразия.*

Теорема 4. *Вектор Ли 5-мерного пространства Лобачевского постоянной кривизны является конциркулярным векторным полем.*

Список литературы

[1] Кириченко В.Ф. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. // Одесса, Печатный Дом, 2013, 457 с.

[2] Blair D.E., Riemannian Geometry of Contact and Cosymplectic manifolds // Progr. Math.,203, Birkhauser Boston inc., Boston, MA, 2002.

Об одной модификации чебышёвских сетей на псевдосферических поверхностях

А. В. Костин

Казанский Федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга, Россия,
Набережночелнинский государственный педагогический университет, Набережные Челны, Россия

E-mail address: kostin_andrei@mail.ru

В работе изучаются свойства асимптотических линий на поверхностях постоянной кривизны. Хорошо известно, что асимптотические линии на поверхностях постоянной кривизны образуют чебышёвскую сеть. Площадь сетевого четырёхугольника чебышёвской сети на поверхностях постоянной отрицательной кривизны можно выразить либо через избыток его внутренних углов [1], либо через альтернированную сумму величин сетевых углов чебышёвской сети в вершинах четырёхугольника. Последний способ легко обобщается на произвольные сетевые многоугольники чебышёвской сети. Комбинируя положительно определённые и индефинитные метрики, можно распространить эти результаты на всю плоскость Лобачевского. На примере псевдосферы показывается, как это может быть реализовано. Один из способов распространения предполагает введение на универсальной накрывающей "полной псевдосферы" за граничным орициклом, накрывающим ребро возврата, метрики де Ситтера. Универсальная накрывающая рассматривается в модели Пуанкаре в полуплоскости. Внутри орикруга, накрывающего одну полость псевдосферы, берётся чебышёвская сеть, накрывающая асимптотическую сеть на псевдосфере Бельтрами-Миндинга, вне орикруга берётся чебышёвская сеть в метрике де Ситтера, накрывающая асимптотическую сеть на "бабочке де Ситтера" —одной из псевдосфер псевдоевклидова пространства [2]. Вне орикруга сетевые углы (как и длины дуг линий сети) берутся в метрике де Ситтера , внутри—в метрике Лобачевского . Длина дуги линии сети от ребра возврата и внутри, и вне граничного орикруга в своих метриках равна

длине её ортогональной проекции на этот граничный орикруг. Противоположные стороны сетевых четырёхугольников такой эклектичной сети будут равны, как и для обычной чебышёвской сети. В обеих метриках имеются простые связи сетевых углов с углом параллельности.

Список литературы

[1] *J. N. Hazzidakis*, Uber einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmasz. — Crelles J., **88** (1880), 68–73.

[2] Костин А.В., *Регулярность асимптотических на псевдосферах де Ситтера*,-// Тезисы докладов Международной конференции "Дни геометрии в Новосибирске– 2012", посвящённой 100-летию со дня рождения академика А. Д. Александрова (2012), с.48-49.

Об интерпретациях теоремы Кези и её аналогов на сферах псевдоримановых пространств

Н. Н. Костина, А. В. Костин

Казанский Федеральный университет, Елабужский институт, Елабуга, Россия

E-mail address: natnikost@mail.ru

Теорема Кези [1]является обобщением теоремы Птолемея (во вписанном четырёхугольнике сумма произведений длин противоположных сторон равна произведению длин диагоналей). Если вершины вписанного четырёхугольника заменить четырьмя окружностями, касающимися одной окружности, а длины сторон и диагоналей заменить длинами отрезков касательных, взятых в том же порядке, то получим формулировку теоремы Кези на евклидовой плоскости. Если две окружности касаются основной окружности одинаково (обе внутренним, или обе внешним образом), то берётся отрезок общей внешней касательной этих окружностей, если по-разному, то берётся отрезок общей внутренней касательной. В недавней работе [2] был доказан гиперболический аналог теоремы Кези. Нами получена интерпретация теоремы Кези и её гиперболического аналога как теорем о пространственных четырёхугольниках на сферах нулевого радиуса соответственно трёхмерного псевдоевклидова пространства и трёхмерного псевдогиперболического пространства ${}^2S_3$, а также получен ещё один гиперболический аналог теоремы Кези, в котором вместо "касательных расстояний" берутся длины дуг касательных орициклов, а окружности могут быть заменены произвольными циклами (эквидистантами, орициклами или прямыми). При этом в одной конфигурации могут фигурировать циклы разных типов. Последняя версия теоремы также допускает "точечную" интерпретацию, при которой циклам соответствуют точки изотропной сферы, а длинам дуг касательных орициклов соответствуют длины сторон пространственного четырёхугольника, вписанного в эту сферу. Все эти результаты являются следствиями доказанного нами утверждения.

Теорема 1. *1. Четверка окружностей, касающихся окружности на евклидовой плоскости, может быть интерпретирована:*

(a) четверкой точек на сфере нулевого радиуса трехмерного псевдоевклидова пространства так, что “касательным расстояниям” между евклидовыми окружностями будут соответствовать расстояния между точками на изотропной сфере;

(b) четверкой циклов, касающихся цикла на плоскости Лобачевского, так, что “касательным расстояниям” между евклидовыми окружностями будут соответствовать длины дуг касательных орициклов.

2. Четверка циклов, касающихся цикла на плоскости Лобачевского, может быть интерпретирована четверкой точек на изотропной сфере трехмерного пространства ${}^2S_3$ *так, что “касательным расстояниям” между циклами будут соответствовать расстояния между точками изотропной сферы пространства* ${}^2S_3$.

Список литературы

[1] J. Casey *A seqyel to the first six books of the Elements of Euclid, containing an easy introduction to modern geometry, with numerous examples, 5th. ed.*,- Dublin, Hodges, Figgis and Co., (1888).

[2] N. V. Abrosimov, L. A. Mikaiylova *Casey’s theorem in hyperbolic geometry*,- Siberian Electronic Mathematical Reports, **12** (2015), 354–360.

Особенности 2F-планарных отображений римановых пространств со специальной аффинорной структурой

И. Н. Курбатова, В. В. Регрут

ОНУ, Одесса, Украина

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

В ([1])мы рассматривали pF-планарные отображения (псевдо-)римановых пространств (V_n, g_{ij}, F_i^h) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ с абсолютно параллельной кубической структурой, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^{2} \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}{}_{j)}^h(x),$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}_i^h = \delta_i^h, \quad \overset{1}{F}{}_i^h = F_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h, \quad \overset{s}{F}{}_i^h(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}_i^h(x),$$
$$F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = \delta_i^h, \quad g_{i\alpha} F_j^\alpha = g_{j\alpha} F_i^\alpha, \quad F_{i,j}^h = F_{i|j}^h = 0,$$

$\Gamma_{ij}^h, \overline{\Gamma}_{ij}^h$ - компоненты объектов связности V_n и $\overline{V}_n$, соответственно; $\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы; F_i^h - аффинор; $<,>$, $<|>$ - знаки ковариантной производной в V_n и $\overline{V}_n$.

Мы отмечали, что при таких условиях на аффинор пространства V_n и $\overline{V}_n$, находящиеся в 2F-планарном отображении, являются локально приводимыми и распадаются в произведение

$$V_n = V_m \times V_{n-m}, \quad \overline{V}_n = \overline{V}_m \times \overline{V}_{n-m},$$

причем на компонентах этого произведения 2F-планарное отображение $f : V_n \longrightarrow \overline{V}_n$ индуцирует геодезическое отображение ([2]) $f_1 : V_m \longrightarrow \overline{V}_m$, и F-планарное отображение([2]) $f_2 : V_{n-m} \longrightarrow \overline{V}_{n-m}$, соответствующее аффинору $\overset{1}{F}{}_A^B(x^C)$ определенного типа $A, B, C = m+1, m+2, \dots, n$.

Мы исследовали 2F-планарное отображение пространства указанного типа на плоское

$$f : V_n \longrightarrow \overline{V}_n = \overline{E}_n$$

и обнаружили, что в этом случае V_n является произведением пространства постоянной кривизны V_m на плоское $V_{n-m} = E_{n-m}$.

Доказано также, что римановы пространства с указанной аффинорной структурой не допускают нетривиальных геодезических и F-планарных отображений, представляющих собой частные случаи $2F$-планарных отображений (это аналоги известной в теории геодезических отображений келеровых пространств теоремы Яно-Вестлэйка).

Список литературы

[1] В. В. Регрут, И. Н. Курбатова *О 2F-планарных отображениях римановых пространств с кубической абсолютно параллельной структурой.*,- Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе - 2015". Одесса, 2015. с.84

[2] J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner *Geodesic Mappings and Some Generalizations.*,- Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.

Некоторые вопросы 4-квазипланарных отображений полукватернионных многообразий

И. Н. Курбатова, М. Хаддад

ОНУ, Одесса, Украина

Международный университет Вади, Сирия

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

Ранее мы рассматривали 4-квазипланарные отображения почти кватернионных многообразий ([1]). В ([2])мы ввели в рассмотрение *полукватернионную* структуру, которая порождается парой почти комплексных структур, коммутирующих между собой. Соответственно, *почти полукватернионным* мы назвали риманово пространство V_n с заданными на нем почти комплексными структурами $\overset{1}{F}$ и $\overset{2}{F}$, которые удовлетворяют условиям

$$\overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h = -\delta_i^h, \quad \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h - \overset{2}{F}{}_i^\alpha \overset{1}{F}{}_\alpha^h = 0.$$

Очевидно, что

$$\overset{3}{F}{}_i^\alpha \overset{3}{F}{}_\alpha^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h$$

Как обычно, под келеровой будем понимать полукватернионную структуру на V_n, для которой

$$\overset{s}{F}{}_{i,j}^h = 0, \quad s = 1, 2, 3,$$

где $<,>$ - знак ковариантной производной в V_n.

Показано ([2]), что келерово полукватернионное пространство приводимо.

Рассмотрим (псевдо-)римановы пространства (V_n, g_{ij}) и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij})$ с полукватернионными келеровыми структурами $\overset{s}{F}$, $\overset{s}{\overline{F}}$, $s = 1, 2, 3$, находящиеся в 4-квазипланарном отображении (4КПО), сохраняющем структуру. Тогда в общей по отображению системе координат (x^i) имеют место

$$\overline{\Gamma}{}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \sum_{s=0}^{3} \overset{s}{q}_{(i}(x) \overset{s}{F}{}_{j)}^h(x),$$

где

$$\overset{\circ}{F}{}_i^h = \delta_i^h, \quad \overset{3}{F}{}_i^h = \overset{1}{F}{}_i^\alpha \overset{2}{F}{}_\alpha^h, \quad \overset{s}{F}{}_i^h(x) = \overset{s}{\overline{F}}{}_i^h(x),$$

$\overset{s}{q}_i(x)$ - некоторые ковекторы.

Построены геометрические объекты, как неоднородные (типа параметров Томаса в теории геодезических отображений римановых пространств), так и тензорного характера (типа тензора Вейля), инвариантные относительно рассматриваемых отображений.

Выделен класс келеровых полукватернионных пространств (*4-квазиплоских*), допускающих 4КПО на плоское пространство. Найдена структура их тензора Римана.

Список литературы

[1] И. Н. Курбатова *О диффеоморфизмах почти кватернионных многообразий*.- Мат.Студії. - 2013. - Т.40, No. 1.- С. 95-103.

[2] И. Н. Курбатова *4-квазипланарные отображения почти кватернионных и полукватернионных многообразий* . - Proceedings of the International Geometry Center , V.8, №2, 2015, p. 46-56.

Изучение моделей плоскости Лобачевского и плоскости де Ситтера с применением системы компьютерной алгебра Maxima

Е. О. Миннегулова

НГПУ, Набережные Челны, Россия

E-mail address: e.o.minnegulova@gmail.com

При переходе на двухуровневую систему подготовки в первой ступени (бакалавр) по сравнению со специалитетом существенно сократилось количество аудиторного времени на изучение основных курсов. Использование систем компьютерной алгебры позволяет оптимизировать учебный процесс за счёт передачи части рутинных функций компьютеру, а высвободившееся время посвятить более глубокому усвоению изучаемого материала. При изучении неевклидовых геометрий мы применяем свободно распространяемую систему компьютерной математики Maxima. Собственная и идеальная области плоскости Лобачевского рассматриваются нами в хорошо известных конформных моделях на евклидовой плоскости и на плоскости Минковского (псевдоевклидовой плоскости) соответственно. Идеальная область плоскости Лобачевского является двумерным пространством постоянной кривизны с индефинитной метрикой, то есть двумерным пространством де Ситтера. Конформная модель на псевдоевклидовой полуплоскости покрывает идеальную область, их которой удалена одна изотропная прямая. Одним из заданий, которые, на наш взгляд, можно без ущерба для образовательных целей выполнять с использованием компьютера, является определение типов движений, задаваемых подстановками комплексной переменной для плоскости Лобачевского и двойной переменной для плоскости де Ситтера. Здесь возникают и специфические компьютерные задачи на определение в фиксированном промежутке количества целых значений коэффициентов дробно-линейной подстановки, задающей преобразования из указанного типа. Такие задачи легко программируются в системе Maxima. Нахождение расстояния между точками, определение типа геодезической, соединяющей две точки на плоскости де Ситтера, определение типа цикла, описанного около треугольника на плоскостях Лобачевского и де Ситтера, как и нахождение уравнения такого цикла, тоже, на наш взгляд, целесообразно выполнять с использованием компьютера.

Движения в геометрии Лобачевского - Бойяи и алгебры функциональных операторов

В. А. Мозель

ГУ "Отделение гидроакустики Института геофизики им. С. И. Субботина НАН Украины", Одесса, Украина

E-mail address: mozel@ukr.net

Пусть D -единичный круг комплексной плоскости. В банаховом пространстве $L_p(D),\ p > 1$, введём оператор взвешенного сдвига $(W_g f)(z) = |g'(z)|^{2/p}$ с автоморфными коэффициентами относительно конечной или бесконечной циклической группы $g \in G$ конформных дробно-линейных преобразований единичного круга D в себя: $A = \sum\limits_g a_g W_g$. Мы считаем, что G порождена эллиптическим преобразованием конечного порядка $n+1$ или бесконечным гиперболическим или параболическим преобразованием. В работе изучаются банаховы алгебры $\mathfrak{A}$ функциональных операторов $A \in \mathfrak{A}$ одного из двух видов:

$$A = \sum_{j=0}^{n} a_j(z) W^j$$

в эллиптическом случае или

$$A = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j(z) W^j$$

в бесконечном, гиперболическом или параболическом, случае. Напомним (см., напр., ([1], [2])), что функция a_j называется автоморфной, если она удовлетворяет условию: $a_j(z){=}a_j(g(z))$ для любого сдвига $g \in G$. Пусть также норма в алгебре определяется правилом: $|||A|||_1{=}\sum\limits_{g\in G} \sup_z : |a_g(z)|$, т.е.

$$|||A|||_1 = \sum_{j=0}^{n} \sup_z : |a_j(z)|$$

для эллиптического случая или

$$|||A|||_1 = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sup_z : |a_j(z)|$$

для бесконечного случая. В конечном случае риманова поверхность есть конус с ветвлением в неподвижной точке. В параболическом случае риманова поверхность - это изогнутый конус с каспом в вершине. В гиперболическом случае это изогнутый цилиндр. В эллиптическом случае коэффициенты непрерывны в замкнутом круге $\overline{D}$. В бесконечном же случае в предельных (неподвижных) точках сдвига у коэффициентов имеется разрыв периодического типа.

Список литературы

[1] Голубев В.В. *Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции.*,- М.: Физматгиз, 1961. - 456 с.

[2] Шабат Б.В.*Введение в комплексный анализ.*,- Ч.1. Функции одного переменного: Учебник для университетов.– Изд. 3-е. – М. : Наука, 1985 . - С. 253–256.

О диффеоморфизмах рекуррентно-параболических пространств

А. С. Нежуренко, И. Н. Курбатова

ОНУ, Одесса, Украина

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

В ([1])было введено понятие *рекуррентно-параболической* аффинорной структуры $F_i^h(x)$ на римановом пространстве (V_n, g_{ij}), которая характеризуется условиями

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$
$$F_{i,j}^h = \rho_j(x) F_i^h(x),$$

где ρ_j - ковектор, «,» - знак ковариантной производной в V_n. Само V_n при этом также называется *рекуррентно-параболическим.*

Рассмотрим пару рекуррентно-параболических пространств $(V_n, g_{ij}), F_i^h$ и $(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$, находящихся в геодезическом отображении ([2])с сохранением аффинорной структуры. Их основные уравнения в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h$$

$$\overline{F}_i^h = F_i^h,$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ - компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n, соответственно; ψ_i - ковектор.

Мы показали, что ввиду сохранения структуры такое отображение вырождается в аффинное, то есть является тривиальным. Этот факт представляет собой аналог теоремы Яно-Вестлэйка в теории геодезических отображений келеровых пространств.

В ([1])изучались некоторые вопросы квази-геодезических отображений (КГО) рекуррентно-параболических пространств, основные уравнения которых в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)\delta_{j)}^h + \varphi_{(i}(x)F_{j)}^h(x)$$

где $\overline{\Gamma}_{ij}^h, \Gamma_{ij}^h$ - компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F_i^h - аффинор.

В частности, там рассмотрено КГО рекуррентно-параболического V_n на плоское пространство $\overline{E}_n$. Получена структура тензора Римана такого V_n (квази-плоского). Мы же доказали аналог теоремы Бельтрами в теории геодезических отображений римановых пространств, а именно, показали, что такая структура тензора Римана рекуррентно-параболического пространства является необходимым и достаточным условием того, чтобы оно допускало квази-геодезическое отображение на плоское пространство.

Список литературы

[1] И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк *Квазигеодезические отображения рекуррентно-параболических пространств.*, - Proceedings of the International Geometry Center , V.8, №1, 2015, p. 57-66.

[2] J. Mikes, A. Vanzurova, I. Hinterleitner *Geodesic Mappings and Some Generalizations.*,-Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc,2009.304 p.

Об одном типе инфинитезимальных преобразований в римановом пространстве второго приближения

Покась С. М., Крутоголова А. В.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина

E-mail address: pokas@onu.edu.ua, 01link01@rambler.ru

Для риманова пространства $V_n(x;g)$ ненулевой постоянной кривизны рассматривается пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2(y;\widetilde{g})$, которое реализует приближение второго порядка для V_n в окрестности произвольной фиксированной точки $M_0 \in V_n$ ([2]):

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g_{ij}} + \frac{1}{3} \underset{\circ}{R_{i\alpha\beta j}}\, y^\alpha y^\beta, \tag{1}$$

где $\underset{\circ}{g_{ij}} = g_{ij}(M_0)$, $\underset{\circ}{R_{i\alpha\beta j}} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$.

В пространстве $\widetilde{V}_n^2$ изучаются инфинитезимальные конциркулярные преобразования ([1]):

$$y'^h = y^h + \widetilde{\xi}^h(y)\delta t. \tag{2}$$

Исследуя уравнения ([3])

$$\widetilde{\nabla}_{(i}\widetilde{\xi}_{j)} = \psi(y)\widetilde{g}_{ij} \tag{3}$$

$$\widetilde{\nabla}_{ij}\psi = \phi(y)\widetilde{g}_{ij} \tag{4}$$

получены вектор смещения $\widetilde{\xi}^h(y)$, функции $\psi(y)$ и $\phi(y)$ в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов на компактных множествах.

Список литературы

[1] А. В. Аминова *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий* Москва, Янус-К, 2003, 619 с.

[2] С. М. Покась, А. В. Крутоголова *Геометрия риманова пространства второго приближения* Proc. Intern. Geom. Center, Vol 8, №3-4, 2015, с. 53-60

[3] Yano K. *Concircular geometry I-IV* Proc. Acad. Japan, Vol 16, 1940, с. 195-200, 354-360, 442-448, 505-511

Геометрическая структура и комбинаторные характеристики многомерных усеченных кубов

Ю. С. Резникова

НИИ ТЗН Минсоцполитики и НАН Украины, Киев, Украина

E-mail address: yurss@mail.ru

Введем следующее определение многомерного усеченного куба в векторном пространстве произвольной размерности.

Определение 1. *$n-$мерным $a-$усеченным кубом ($_{at}Cub^n$) для $n \geq 2$, $a > 2$, называется $n-$мерный многогранник, представляющий собой выпуклую оболочку $2^n \cdot n$ точек (вершин $a-$усеченного куба), разбивающих $1-$грани $n-$мерного куба в отношении $1 \ : \ (a-2) : 1$.*

Одновременно, с точки зрения конструктивного объекта, данный многогранник очевидно можно рассматривать как результат соответствующего усечения многомерного куба.

Теорема 1. *$n-$мерный $a-$усеченный куб является выпуклым многогранником, $(n-1)-$грани которого представлены многогранниками двух типов, а именно*:
— симплексами;
— $a-$усеченными кубами.
При этом количество $i-$граней, $i = \overline{0, n-1}$, $n-$мерного $a-$усеченного куба равно:

$$\begin{cases} N_i({}_{at}Cub^n) = 2^n \cdot C_n^{i+1} + 2^{n-i} \cdot C_n^{n-i}, \ \ i = \overline{n-1, 1}, \\ N_0({}_{at}Cub^n) = 2^n \cdot C_n^{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

Рассмотрим предельный случай усечения изначального многомерного куба построения.

Определение 2. *$n-$мерным срединно-усеченным кубом ($_{mt}Cub^n$) для $n \geq 2$ называется $n-$мерный многогранник, представляющий собой выпуклую оболочку $2^{n-1} \cdot n$ точек (вершин срединно-усеченного куба), являющихся серединами $1-$граней $n-$мерного куба.*

Теорема 2. *$n-$мерный срединно-усеченный куб является выпуклым многогранником, $(n-\ 1)-$грани которого представлены многогранниками двух типов, а именно*:
— симплексами;
— срединно-усеченными кубами.
При этом количество $i-$граней, $i = \overline{0, n-1}$, $n-$мерного срединно-усеченного куба равно:

$$\begin{cases} N_i({}_{mt}Cub^n) = 2^n \cdot C_n^{i+1} + 2^{n-i} \cdot C_n^{n-i}, \ \ i = \overline{n-1, 2}, \\ N_1({}_{mt}Cub^n) = 2^n \cdot C_n^{n-2}, \\ N_0({}_{mt}Cub^n) = 2^{n-1} \cdot C_n^{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Некоторые подклассы NC_{10}-многообразий

А. Р. Рустанов, С. В. Харитонова

МПГУ, Москва, Россия, ОГУ, Оренбург, Россия

E-mail address: `aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru`

Определение 1 [1]. Почти контактная метрическая структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = \xi\nabla_X(\eta)\Phi Y + \xi\nabla_Y(\eta)\Phi X + \eta(X)\nabla_{\Phi Y}\xi + \eta(Y)\nabla_{\Phi X}\xi; \forall X, Y \in \mathbf{X}(M),$$

называется NC_{10}**-структурой**. Почти контактное метрическое многообразие, снабженное NC_{10}-структурой называется NC_{10}**-многообразием**.

Определение 2. Почти контактное метрическое многообразие назовем многообразием класса R_2, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию

$$R(\xi, \Phi^2X)\Phi^2Y + R(\xi, \Phi X)\Phi Y = 0; \forall X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Теорема 1. NC_{10}-многообразие является многообразием класса R_2 тогда и только тогда, когда оно является точнейшее косимплектическим многообразием.

Учитывая локальное строение точнейшее косимплектических многообразий [2] предыдущую теорему можно сформулировать в виде.

Теорема 2. NC_{10}-многообразие класса R_2 локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Определение 3. Почти контактное метрическое многообразие назовем многообразием класса R_3, если его тензор римановой кривизны удовлетворяет условию

$$R(\Phi^2X, \Phi^2Y)\Phi^2Z = R(\Phi^2X, \Phi Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi^2Y)\Phi Z + R(\Phi X, \Phi Y)\Phi^2Z; \forall X, Y \in \mathbf{X}(M).$$

Теорема 3. NC_{10}-многообразие класса R_3 является точнейшее косимплектическим многообразием, а значит, локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Список литературы

[1] А. Р. Рустанов *Многообразия класса NC_{10}*.,- Преподаватель XXI век (2014), №3, С. 209-218.

[2] В. Ф. Кириченко *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.*, - Издание второе, дополненное., Одесса:"Печатный дом", (2013), 458 с.

Минимальные системы образующих для групп автоморфизмов графов Риба и фундаментальных групп орбит некоторых функций Морса

Р. В. Скуратовский

НПУ, Киев, Украина

E-mail address: ruslcomp@mail.ru

Рассмотрим класс конечных групп $\Im$ (пусть $G \in \Im$) построенных по формуле:

$$G = (\prod_{i_1=1}^{k_1} \mathbb{C}_{n_{i_1}}) \wr (\prod_{i_2=1}^{k_2} \mathbb{C}_{n_{i_2}}) \wr ... \wr (\prod_{i_m=1}^{k_m} \mathbb{C}_{n_{i_m}}),\ 1 \leq k_i \leq \infty.$$

Где под операцией сплетения понимают сплетение групп как груп подстановок, владеющее свойством ассоциативности. Из определения следует, что все произведения конечны.

Теорема 1. *Группа являющаяся сплетением циклических групп как групп подстановок действующих регулярно:* $\mathbb{C}_{n_1} \wr \mathbb{C}_{n_2} \ldots \wr \mathbb{C}_{n_m}$, *где* $(n_i, n_j) = 1$ *при* $i \neq j$, *имеет ранг 2 (он обозначается* $d(G)$ *[1]) т.е. есть 2-порожденной.*

Обозначим $G_j = \prod_{i_j=1}^{k_j} C_{i_j}$. Пусть $rk_1 = d(G_1)$, $rk_2 = d(\prod_{j=2}^{m} G_j)$ – ранги указанных групп.

Теорема 2. *Пусть* $G \in \Im$, *тогда* $d(G) = rk_1 + rk_2$.

Таким образом имеем линейную зависимость числа образующих от количества циклических подгрупп невзаимнопростых порядков. Оказывается [2] подкласс групп из класса $\Im$ изоморфен группам автоморфизмов графа Риба некоторых функций Морса на компактных поверхностях.

Замечание 1. *Если произведение* $\prod_{i_j=1}^{k_j} C_{i_j}$ *из* G *вместо циклических групп содержало бы* H^n, *где* $H = A \times B$, *а* A *– прямое произведение абелевых простых групп,* B *– прямое произведение неабелевых простых групп, то в* $d(G)$ *вместо количества образующих для* $\prod_{i_j=1}^{k_j} C_{i_j}$ *появится количество образующих* $\max\{\beta n, d(B^n)\}$, *где* $\beta = d\left({}^{A}/_{A'}\right)$ *[4].*

Список литературы

[1] О. В. Богопольский *Введение в теорию групп.*, М., Наука, (2002), 148 с.

[2] S. I. Maksymenko *Deformations of functions on surfaces by isotopic to the identity diffeomorphisms*, (2013) arXiv:math/1311.3347v2.

[3] S. I. Maksymenko *Homotopy types of stabilizers and orbits of Morse functions on surfaces.* // Annals of Global Analysis and Geometry, vol. 29, no. 3 (2006), 241-285.

[4] J. Wiegold *Growth sequences of finite groups H.* // J. Austral. Math. Soc. 20, (Series A). (1975), P. 225-229.

Геометрия и алгебра гамильтонионов

А. Ф. Турбин

НПУ имени М. Драгоманова, Киев, Украина

E-mail address: turbin@imath.ua

Ю. Д. Жданова

ГУТ, Киев, Украина

E-mail address: yuzhdanova@yandex.ru

Назовём кватернион $\vec{q} = q_0\vec{1} + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$ рациональным, если q_m – рациональные числа ($q_m \in Q, Q$ – поле рациональных чисел). В множестве рациональных кватернионов $H(Q)$ фиксируем кватернионы $\vec{q}(\sqrt{m}) = q_0\vec{1} + q_1\vec{i} + q_2\vec{j} + q_3\vec{k}$ с нормой $\|\vec{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}$, равной $\sqrt{m},\ m \in Q$. Число $\nu(m)$ рациональных кватернионов с фиксированной нормой $\sqrt{m}$ конечно и $\overline{\lim}_m \nu(m) = \propto$.

Кватернион $\vec{q}(\sqrt{m})$ с нормой $\sqrt{m}$ – точка на гиперсфере $S_3(\sqrt{m}) = \left\{\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in E^4 : x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = m\right\}$ радиуса $\sqrt{m}$. Выпуклую оболочку $\nu(m)$ точек на гиперсфере $S_3(\sqrt{m})$ мы называем гамильтоновым многогранником $HP_4(\nu(m))$ в E^4 или гамильтонионом.

Группа изотропии любого гамильтонова многогранника изоморфна группе симметрии гиперкуба Л. Шлефли (и двойственной ему 16–ячейки (8,24,32,16) по Д. Гильберту) порядка $2^4 \cdot 4! = 384$.

Двумерными гранями могут быть треугольники, прямоугольники (в частности квадраты), $4 \cdot 2^s$ - угольники ($s \geq 1$) и $6 \cdot 2^s$ -угольники ($s \geq 0$).

На множестве $HP_4(Q)$ всех гамильтонионов можно ввести пять операций (действий): две бинарные (сложение и умножение) и три унарные (умножение на (подходящий) рациональный скаляр λ, $\frac{1}{2}-$ и $\frac{1}{3}-$ архимедовы усечения).

Множество гамильтоновых многогранников $GSAHP_4\left(H(Q), +, \cdot, \lambda, \frac{1}{2}-, \frac{1}{3}-\right]$ с указанными бинарными и унарными операциями мы называем геосуперbegin алгеброй Гамильтона – Архимеда.

Единицей геосуперbegin алгебры Гамильтона – Архимеда является выпуклая оболочка делителей единицы кольца целых кватернионов $\pm\vec{1}, \pm\vec{i}, \pm\vec{j}, \pm\vec{k}$ (гипероктаэдр Б. Н. Делоне (8,24,32,16)).

Число правильных и полуправильных гамильтоновых многогранников бесконечно.

На флагах гамильтоновых многогранников группа симметрии гиперкуба Л. Шлефли может действовать k – транзитивно, $k \in N$.

Граничные свойства пространства $P(X)$ вероятностных мер определенных в бесконечном метрическом компакте

Турсунова З.О., Азимова А.А.

Ташкентский государственный педагогический университет имени Низами, Узбекистан

E-mail address: zulayho.tursunova86@mail.ru

В данной заметке рассматриваются граничные свойства всюду плотных подпространств. Пространства $P(X)$ вероятностных мер определенных в бесконечном компакте X.

Для компактов X через $P(X)$ обозначается множество всех неотрицательных линейных функционалов определенных на $C(X)$ с единичной нормы т.е. $P(X) = \{\mu : C(X) \to R : \mu \geq 0 \ \ \|\mu\| = 1\}$. На $P(X)$ рассматривается следующая база: $O(\mu, \varphi_1, ..., \varphi_k, \varepsilon) = \left\{\mu \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)| < \varepsilon, \ \varphi_i \in C(X), \ i = \overline{1, k}\right\}$.

Для компактов X имеется простая топологическая классификация пространства $P(X)$. В случае конечного пространства $X = \{n\}$точки μ пространства $P(n) = P_n(n)$ являются выпуклыми линейными комбинациями мер Дирака вида: $\mu = m_0\delta_{x_0} + m_1\delta_{x_1} + ... + m_{n-1}\delta_{x_{n-1}}$. По этому они естественно отождествляются с точками $(n-1)$ мерного симплекса σ^{n-1}. В случае бесконечного компакта X пространство $P(X)$ также является бесконечным компактом. По теореме Кэли выпуклый компакт $P(X)$ аффинно вкладывается в l_2. Следовательно по теореме Келлера компакт $P(X)$ как бесконечномерный выпуклый компакт лежащий в l_2, гомеоморфен гильбертовому кубу Q, где $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ - гильбертов куб, $[-1, 1]_i \subset R$ отрезок, l_2-сепарабельное гильбертово пространство, $\sum$-линейнае оболочка стандартного кирпича Q' в гильбертовом пространстве l_2, в котором $Q' = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \left[0, \frac{1}{2}i\right]_i$, σ-линейное подпространство гильбертова пространства l_2, состоящее из всех точек, конечное число координат которых отлично от нуля. $W_i^{\pm} = \{(g_j) \in Q : g_i = \pm 1\}$- i-ая грань куба Q : $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm} = \mathrm{Bd}Q$ - псевдограница куба Q, $S = Q \backslash \mathrm{Bd}Q$ - псевдовнутренность куба Q.

Для $n \in N$ обозначим $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\ \mu| \leq n\}$и $P_\omega(X) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n(X) \subset P(X)$.

Заметим, что $P_\omega(X)$всюду плотно в $P(X)$ и σ-компактно.

Напомним, что множество $B(Q)$ называется граничным множество в Q, если $Q \backslash B(Q) \approx l_2$. Понятия относящиеся функтору P вероятностных мер можно найти в работах $[1-2]$.

Имеет место следующая

Теорема. Для любого бесконечного компакта X и любого его открытого всюду плотного подмножества $U \subset X$ отличное от X пространство $P_\omega(U)$ есть граничное множество в $P(X)$.

Список литературы

[1] В.В.Федорчук. Вероятностные меры в топологии. Успехи мат. наук, Т-46, вып, 1991, с.41-80

[2] Ф.Жураев. Некоторые геометрические свойства функтора. вероятностных мер. М.МГУ, Канд.диссер., 1989, 90с.

Геометрические свойства пространства вероятностных мер являющихся бесконечномерными многообразиями

З.О. Турсунова

ТГПУ имени Низами, Ташкент, Узбекистан;
E-mail address: zulayho.tursunova86@mail.ru

В данной работе рассматриваются геометрические свойства пространства вероятностных мер $P(X)$ в бесконечном метрическом компакте X.

Пусть X бесконечный метрический компакт. Пространство $P(X)$ вероятностных мер, которое состоит из всех $\mu : C(X) \to R$ непрерывных, неотрицательных и нормированных линейных функционалов т.е. $P(X) = \{\mu : C(X) \to R : \mu$ - непрерывный, линейный, неотрицательный нормированный функционал, R- множество действительных чисел $\}$, где $C(X) = \{f : X \to R\}$ непрерывно. На множестве $C(X)$ рассматривается компактно-открытая топология.

На пространстве $P(X)$ базу топологии составляют следующего вида открытые множества:

$$O(\mu, \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k, \varepsilon) = \left\{\mu' \in P(X) : |\mu(\varphi_i) - \mu'(\varphi_i)| < \varepsilon, \varphi_i \in C(X)\ ,\ i = \overline{1,k}\right\}$$

Определение 1[1]. Паракомпактное топологическое пространство X называется Y многообразием, моделированным на пространстве Y или Y - многообразием, если всякая точка пространства X имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому подмножеству пространства Y. Для натурального числа $n \in N$, через $P_n(X)$ обозначим вероятностные меры, μ носители которых содержат не более чем n точек т.е. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |\mathrm{supp}(\mu)| \leq n\}$ [2]. $Q = \prod\limits_{i=1}^{\infty} [-1,1]_i$ - гильбертов куб, $[-1,1]_i$ - отрезок в R. $W_i^{\pm} = \{(g_i) \in Q : g_i = \pm 1\} - i-$ая грань куба Q; $\mathrm{Bd}Q = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i^{\pm}$ псевдограница куба Q; $Q \backslash \mathrm{Bd}Q = S$- псевдовнутренность куба Q.

Теорема 1. Для любого бесконечного компакта X и любого $n \in N$, подпространство $P(X) \backslash P_n(X)$ пространства $P(X)$ является Q- многообразием.

Из этой теоремы и из определений Q- многообразий имеем

Следствие 1. Для любого бесконечного компакта X и любого его всюду плотного подмножества $A \subset X$ подпространство $P(A)$ является Q- многообразием.

Через $S_P(A)$ обозначается множество $\{\mu \in P(X) : supp\ \mu \cap A \neq \varnothing\}$.

Теорема 2. Для любого бесконечного метрического компакта X и любого открытого $A \subset X$, $A \neq X$ подпространство $S_P(A)$ является Q- многообразием.

Следствие 2. Для любого бесконечного метрического компакта X и подмножества $A \neq X$, подпространство $P(X \backslash A)$ есть S- многообразие.

Список литературы

[1] T.Banakh, T.Radul, M.Zarichnyi Absorfing sets in Infinit Dimensional Manifold. Mat.Studies Monograph. Series 1996. Volume 1. P 232.

[2] Т.Ф.Жураев Некоторые геометрические свойства функтора вероятностных мер и его подфункторов М.МГУ. канд.диссер 1989. 90с.

From Cayley-Klein Geometry to Deformation Quantization

S. S. Moskaliuk

Austro-Ukrainian Institute for Science and Technology, Vienna, Austria

E-mail address: moskaliukss@gmail.com

Deformation quantization, i.e., the study of the deformation of classical structures, such as Poisson manifolds, to noncommutative spaces, has been, together with its many applications, one of the central characters in the deep and fruitful interplay between geometry and physics that has taken place in the last 20 years. With its connections with, and applications to, noncommutative geometry, integrable systems, quantum field theory and strings, etc. it represents a crossing point of many fundamental areas of research in present-day mathematics and theoretical physics. In this talk it is presented Cayley-Klein geometries in the frame of category theory, on the one hand. There are also presented some examples of Deformation Quantization: from scale deformation of Cayley-Klein geometries to noncommutative Cayley-Klein geometries, on the other hand.

ЗМІСТ

Відповідальність за достовірність інформації несе автор публікації.
Матеріали друкуються мовою оригінала.