International
Scientific Conference

Algebraic and Geometric Methods of Analysis

Devoted to 160 anniversary of

Dvytro Grave

(25.08.1863 - 19.12.1939)

Academician of the Ukrainian Academy of Sciences, the first director of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine

May 29 – June 1, 2023

Odesa, Ukraine

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric and topological methods in natural sciences
- Geometric problems in mathematical analysis

Organizers

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National University of Technology
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- Kyiv Mathematical Society

Scientific Committee

- **Bolotov D.** (*Kharkiv, Ukraine*)
- **Bondarenko V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Boychuk O.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Boyko V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Cherevko Ye.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Dorogovtsev A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Drozd Yu.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Gerasymenko V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Fedchenko Yu.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Kiosak V.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Kochubei A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Konovenko N.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Maksymenko S.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Mikhailets V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Ostrovskyi V.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Petravchuk A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Plaksa S.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Portenko M.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Pratsiovytyi M.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Savchenko O.** (*Kherson, Ukraine*)
- **Romanyuk A.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Timokha O.** (*Kyiv, Ukraine*)

Organizing commitee

- **Maksymenko S.** (*Kyiv, Ukraine*)
- **Konovenko N.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Fedchenko Yu.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Cherevko Ye.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Osadchuk Ye.** (*Odesa, Ukraine*)
- **Sergeeva O.** (*Odesa, Ukraine*)

[2] Deny, J.: Méthodes Hilbertiennes en Théorie du Potentiel. In: Potential Theory. CIME. Summer Schools 49, pp. 121–201. Springer, Berlin (2010)
[3] Fuglede, B., Zorii, N.: Green kernels associated with Riesz kernels. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **43**, 121–145 (2018)
[4] Kurokawa, T., Mizuta, Y.: On the order at infinity of Riesz potentials. Hiroshima Math. J. **9**, 533–545 (1979)
[5] Landkof, N.S.: Foundations of Modern Potential Theory. Springer, Berlin (1972)
[6] Zorii, N.: A theory of inner Riesz balayage and its applications. Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **68**, 41–67 (2020)
[7] Zorii, N.: Harmonic measure, equilibrium measure, and thinness at infinity in the theory of Riesz potentials. Potential Anal. **57**, 447–472 (2022)
[8] Zorii, N.: On the theory of capacities on locally compact spaces and its interaction with the theory of balayage. Potential Anal. (2022). https://doi.org/10.1007/s11118-022-10010-3
[9] Zorii, N.: On the role of the point at infinity in Deny's principle of positivity of mass for Riesz potentials. Anal. Math. Phys. **13**, 38 (2023)
[10] Zorii, N.: Minimum Riesz energy problems with external fields. J. Math. Anal. Appl. **526**, 127235 (2023)

Знаходження форми квантових графів за умов Діріхле на висячих вершинах

Анастасія Чернишенко
(Південноукраїнський національний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса, Україна)
E-mail: nastya.chernyshenko12@gmail.com

Проблема існування коспектральних (або інакше ізоспектральних) графів виникла ще у минулому сторіччі. У класичній теорії графів коспектральними вважають неізоморфні графи з однаковим спектром матриці суміжності (див. [5], Розділ 6.1). У [4] був наведений перший приклад коспектральних графів.

У багатьох випадках більш важливу роль ніж матриця суміжності відіграє нормований лапласіан. Існують різні означення нормованого лапласіана, котрий ще називають дискретним лапласіаном (див. [7], С.2). Ми розуміємо під нормованим лапласіаном матрицю $D^{-1/2}AD^{-1/2}$, де A - матриця суміжності графа, а $D = diag\{d(v_1), d(v_2), ..., d(v_p)\}$ - матриця степенів вершин, де $d(v_j)$ - степінь вершини v_j.

У теорії квантових графів розглядають спектральні задачі, породжені рівняннями Штурма-Ліувілля на рівнобічних графах (метричних графах, з ребрами однакової довжини) з крайовими умовами Неймана або Діріхле на висячих вершинах і узагальненими умовами Неймана (умовами неперервності і Кірхгофа) у внутрішніх вершинах. Тут також виникає проблема коспектральності.

У [9] було показано, що існують коспектральні графи (неізометричні графи з однаковим спектром задачі Штурма-Ліувілля) у квантовій теорії графів. Слід зауважити, що у випадку графа з несумірними довжинами ребер спектр однозначно визначає форму графа [8].

Спектр задачі теорії квантових графів зв'язаний з нормованим лапласіаном відповідного
комбінаторного графа наступним чином: власні значення нормованого лапласіана взаємно

однозначно пов'язані з другими членами асимптотики власних значень задачі Штурма-Ліувілля з (узагальненими) умовами Неймана на вершинах цього графа (див. [3], де використані результати [2], [6] та [1]). Це дає змогу отримати інформацію про форму графа користуючись асимптотикою власних значень.

Для задачі Штурма-Ліувілля з умовами Неймана на висячих вершинах і умовами неперервності та Кіргофа у внутрішніх було доведено, що спектр однозначно визначає форму простого звязного рівнобічного графу, якщо кількість вершин не перевищує 5 і форму дерева, якщо кількість вершин не перевищує 8.

У даній роботі ми розглядаємо спектральну задачу Штурма-Ліувілля на простому зв'язному рівнобічному графі зі стандартними умовами у внутрішніх вершинах та умовами Діріхле на висячих вершинах (орієнтація ребер довільна):

$$-y_j'' + q_j(x)y_j = \lambda y_j, \quad (j = 1, 2, ..., g), \tag{1}$$

з умовами неперервності

$$y_j(0) = y_k(l) \tag{2}$$

для всіх $j \in W^-(v_i)$, всіх $k \in W^+(v_i)$, де $W^+(v_i)$ множина індексів ребер, які входять у вершину v_i, $W^-(v_i)$ множина індексів ребер, що виходять із вершини v_i, умовами Кірхгофа

$$\sum_{k \in W^+(v_i)} y_k'(l) = \sum_{j \in W^-(v_i)} y_j'(0) \tag{3}$$

у внутрішніх вершинах та умовами Діріхле

$$y_j(0) = 0 \tag{4}$$

на висячих вершинах.

Отримано такий результат.

Теорема 1 *Нехай спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} = \bigcup_{i=1}^{s}\{\lambda_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ *задачі (1)-(4), складається з підпослідовностей з асимптотикою*

$$\sqrt{\lambda_k^{(1)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{2\pi(k-1)}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(2)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{2\pi k}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(3)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} + \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(4)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{(2k-1)\pi}{l} - \gamma + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{для} \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\sqrt{\lambda_k^{(i)}} \underset{k\to\infty}{=} \frac{\pi k}{l} + O\left(\frac{1}{k}\right) \quad \textit{для} \;\; i = 5, 6, ..., s \;\; \textit{та} \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Тоді ця асимптотика однозначно визначає форму графа як подвійної зірки з кількістями
периферичних ребер інцидентних з внутрішніми вершинами $m-1$ *та* $n-1$ *(див. рис. 1), де натуральні числа* m *і* n *становлять розв'язок системи рівнянь*

$$m + n = s - 1, \quad mn = (\cos\gamma l)^{-2}. \tag{5}$$

Ця система рівнянь має 2 розв'язки, котрі відповідають ізоморфним графам.

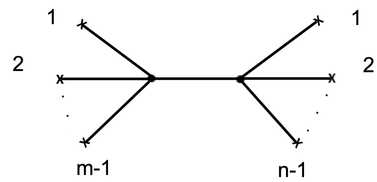

Рис 1. Граф подвійна зірка.

Доповідь грунтується на результатах статті [10], де, також, отримані теореми, подібні до теореми 1 для інших графів.

Література

[1] R. Carlson, V. Pivovarchik. Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths J. Phys. A: Math. Theor. Vol.41 (2008) 145202, 16 pp.

[2] C. Cattaneo, The spectrum of the continuous Laplacian on a graph, Monatsh. Math. 124 (1997), no. 3, 215-235.

[3] A. Chernyshenko, V. Pivovarchik. Recovering the shape of a quantum graph. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 92, (2020), Art. 23.

[4] L. Collatz, U. Sinogowitz. Spektren endlicher Grafen. Abh. Math, Sem. Univ. Hamburg, Vol. 21 (1957) 63–77.

[5] D. M. Cvetkovic', M. Doob, H. Sachs. Spectra of Graphs. Theory and Applications. Berlin, !980. Amsterdam 1988.

[6] P. Exner, *A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices*, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A **66** (1997), 359–371.

[7] Fan R. K.Chung *Spectral graph theory* AMS Providence, R.I. 1997.

[8] B. Gutkin, U. Smilansky, Can one hear the shapeof a graph? J. Phys. A Math. Gen. **34** (2001), 6061–6068.

[9] J. von Below, *Can One Hear the Shape of a Network*, Partial Differential Equations on Multistructures, Lecture Notes in Pure Mathematics, **219**, M. Dekker, NY, (2001), 19-36.

[10] Пивоварчик В.М., Чернишенко А.А. *Коспектральні квантові графи за умов Діріхле на висячих вершинах*, прийнятої до друку в Українському математичному журналі.

Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E(2)}$

Ігор Гавриленко
(Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна)
E-mail: igorgavrilenko0898@gmail.com

Євген Петров
(Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна)
E-mail: petrov@karazin.ua

Відомо, що у тривимірному евклідовому просторі повна зв'язна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли є площиною. Цей результат був отриманий незалежно О.В. Погорєловим, М. до Кармо і К.К. Пенгом та Д. Фішер-Колбрі і Р. Шоеном (див., наприклад, [1]). Він узагальнює класичну теорему С.Н. Бернштейна, згідно з якою будь-яка повна явно задана мінімальна поверхня є площиною. У [2] було введене поняття