International scientific conference

“Algebraic and Geometric Methods of Analysis”

Book of abstracts

May 28 - June 3, 2019

Odesa, Ukraine

Conference webpage: *imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2019/*

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Odessa I. I. Mechnikov National University
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

Program Committee

Chairman: Prishlyak A. (*Kyiv, Ukraine*)
Balan V. (*Bucharest, Romania*)
Banakh T. (*Lviv, Ukraine*)
Fedchenko Yu. (*Odesa, Ukraine*)
Fomenko A. (*Moscow, Russia*)
Fomenko V. (*Taganrog, Russia*)
Haddad M. (*Wadi al-Nasara, Syria*)
Karlova O. (*Chernivtsi, Ukraine*)
Kiosak V. (*Odessa, Ukraine*)
Kirillov V. (*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N. (*Odesa, Ukraine*)
Lyubashenko V. (*Kyiv, Ukraine*)
Maksymenko S. (*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K. (*Yamagata, Japan*)
Mikesh J. (*Olomouc, Czech Republic*)
Mormul P. (*Warsaw, Poland*)
Moskaliuk S. (*Wien, Austria*)
Mykhailyuik V. (*Chernivtsi, Ukraine*)
Nykyforchyn O. (*Ivano-Frankivsk, Ukraine*)
Plachta L. (*Krakov, Poland*)
Pokas S. (*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E. (*Kyiv, Ukraine*)
Sabitov I. (*Moscow, Russia*)
Savchenko A. (*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A. (*Odesa, Ukraine*)
Shvets V. (*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A. (*Tver, Russia*)
Vlasenko I. (*Kyiv, Ukraine*)
Volkov V. (*Odessa, Ukraine*)
Zadorozhnyj V. (*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M. (*Lviv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Svytyy I., Dean of the Faculty of Computer Systems and Automation.

Organizing commitee

Kirillov V.	Prus A.	Maksymenko S.
Konovenko N.	Osadchuk E.	Khudenko N.
Fedchenko Yu.		Cherevko E.

Алгоритм побудови унітального дільника для многочленної матриці

Володимир Прокіп
(ІППММ НАН України, вул. Наукова 3б, м. Львів, Україна, 79060)
E-mail: v.prokip@gmail.com

Нехай $\mathbb{F}_{n\times n}$ та $\mathbb{F}_{n\times n}[x]$ – кільця $(n\times n)$-матриць над полем $\mathbb{F}$ та кільцем многочленів $\mathbb{F}[x]$ відповідно. Позначимо: I_n – одинична $(n\times n)$-матриця і O – нульова $(n\times n)$-матриця.

Для неособливої нижньої трикутної матриці $A(x)=\begin{bmatrix} a_1(x) & 0 & \dots & \dots & 0\\ a_{21}(x) & a_2(x) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \dots & a_n(x)\end{bmatrix}$, де $a_i(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальні многочлени і $\deg a_{ij}(x)<\deg a_i(x)$ для всіх $i>j$, вкажемо умови її зображення у вигляді добутку $A(x)=B(x)C(x)$, де $B(x)=I_nx^r+\sum_{i=1}^r B_ix^{r-i}\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня $r\geq 1$ із визначником $\det B(x)=b(x)$.

Якщо матриця $B(x)=I_nx^r+\sum_{i=1}^r B_ix^{r-i}\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$ є лівим дільником трикутної матриці $A(x)$, то з рівності $A(x)=B(x)C(x)$ отримуємо $A(x)=D(x)G(x)$, де $D(x)=\begin{bmatrix}d_{ij}(x)\end{bmatrix}$ – нижня трикутна матриця з наступними властивостями: $d_{ii}(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальні многочлени, $\deg d_{ij}(x)<\deg d_{ii}(x)$ для всіх $i>j$, $\deg\prod_{i=1}^k d_{ii}(x)\leq kr$, $\prod_{i=1}^n d_{ii}(x)=\det B(x)=b(x)$. Отже, $a_i(x)=d_{ii}(x)g_{ii}(x)$ для всіх $1\leq i\leq n$. Нижче вкажемо алгоритм побудови унітального дільника $B(x)$ із неособливої трикутної матриці $A(x)\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$.

1). Нехай визначник неособливої нижньої трикутної матриці $A(x)\in\mathbb{F}_{n,n}[x]$ зображений у вигляді добутку $\prod_{i=1}^n a_i(x)=b(x)c(x)$, де $b(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальний многочлен степеня nr, $r<\deg A(x)$.

2). Діагональні елементи $a_i(x)$ матриці $A(x)$ запишемо у вигляді $a_i(x)=d^{(l)}_{i,m_i}(x)g^{(l)}_{i,m_i}(x)$, де $d^{(l)}_{i,m_i}(x)\in\mathbb{F}[x]$ – унітальні многочлени або елементи поля $\mathbb{F}$ для всіх $m_i=1,2,\dots;\ l=1,2,\dots$. За елементами $d^{(l)}_{i,m_i}(x)$ побудуємо множину діагональних $(n\times n)$-матриць наступним чином:

$$\mathbf{D}_b=$$

$$\left\{D^{(l)}(x)=\operatorname{diag}(d^{(l)}_{1,m_1}(x),d^{(l)}_{2,m_2}(x),\dots,d^{(l)}_{n,m_n}(x)),\ \text{де}\ \deg\prod_{i=1}^k d^{(l)}_{i,m_i}(x)\leq kr\ \text{і}\ \prod_{i=1}^n d^{(l)}_{i,m_i}(x)=b(x)\right\}.$$

3). Для кожної матриці $D^{(l)}(x)\in\mathbf{D}_b$ для $A(x)$ будуємо факторизації $A(x)=T_b^{(l)}(x)G(x)$, де $T_b(x)=\begin{bmatrix} d^{(l)}_{1,m_1}(x) & 0 & \dots & \dots & 0\\ t^{(l)}_{m_2,1}(x) & d^{(l)}_{2,m_2}(x) & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ t^{(l)}_{m_n,1}(x) & t^{(l)}_{m_n,2}(x) & \dots & \dots & d^{(l)}_{n,m_n}(x)\end{bmatrix}$ – трикутна матриця така, що $\deg t^{(l)}_{m_i,j}(x)<\deg d^{(l)}_{i,m_i}(x)$ для всіх $j<i$.

Очевидно, що для деяких матриць $D^{(l)}(x)$ факторизацій матриці $A(x)=T_b^{(l)}(x)G(x)$ може і не існувати. Пошук елементів $t^{(l)}_{m_i,j}(x)$ базується на знаходженні розв'язків $\{u_{ij}(x),v_{ij}(x)\}$ рівняння $b_i(x)u_{ij}(x)+c_j(x)v_{ij}(x)=\widetilde{a}_{ij}(x)$ таких, що $\deg v_{ij}(x)<b_i(x)$. Якщо ж ці розв'язки існують, то остання нерівність гарантує їхню єдиність. Зауважимо, що коефіцієнтами многочленів $t^{(l)}_{m_i,j}(x)$ можуть бути параметри із поля $\mathbb{F}$. Множину таких трикутних матриць позначимо через

$$\mathbf{Tr}_b=\left\{T_b^{(l)}(x)=\begin{bmatrix}t^{(l)}_{i,j}(x)\end{bmatrix},\ \text{де}\ \left[\begin{array}{lll} t^{(l)}_{i,j}(x)=0, & \text{якщо} & j>i;\\ t^{(l)}_{i,k}(x)=d^{(l)}_{i,m_k}(x), & \text{якщо} & k=m_i;\\ \deg t^{(l)}_{m_i,j}(x)<\deg d^{(l)}_{i,m_i}(x) & \text{для всіх} & j<m_i.\end{array}\right.\right\}.$$

Зрозуміло, якщо одна з наведених вище умов не виконується, то для $A(x)$ не існує лівих унітальних дільників із визначником $\det B(x)=b(x)$. Враховуючи теорему 2 із [1] та наведені вище міркування отримуємо.

Теорема 1. *Для трикутної неособливої матриці $A(x)$ існує факторизація $A(x) = B(x)C(x)$, де $B(x) \in \mathbb{F}_{n,n}[x]$ – унітальна многочленна матриця степеня $r \geq 1$ із визначником* $\det B(x) = b(x)$, *тоді і тільки тоді, коли в множині* $\mathbf{Tr}_b$ *існує матриця $T(x) = \sum_{i=0}^{s} T_i x^{s-i}$, для якої*

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} T_0 & O & \cdots & O \\ T_1 & T_0 & & \vdots \\ T_2 & T_1 & \vdots & O \\ \vdots & \vdots & & T_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_s & T_{s-1} & \vdots & T_{s-r} \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} T_0 & O & \dots & \dots & O \\ T_1 & T_0 & & \vdots & \vdots \\ T_2 & T_1 & \vdots & O & O \\ \vdots & \vdots & & T_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & O \\ T_s & T_{s-1} & \vdots & T_{s-r} & I_n \end{bmatrix}.$$

Приклад 2. Для матриці $A(x) = \begin{bmatrix} x^2+x & 0 \\ x^2+1 & x(x^2+x+1) \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}_{2,2}[x]$ вкажемо дільники $I_2x + B_0$ із визначниками x^2+x, x^2 і x^2+x+1 відповідно та дільники $I_nx^2 + B_1x + B_2$ із визначниками $x^2(x^2+x+1)$ і $(x^2+x)(x^2+x+1)$ відповідно. Результати обчислень наведено у таблиці.

$b(x)$	x^2+x	x^2+x	x^2	x^2+x+1
$\operatorname{diag}(d_1(x), d_2(x))$	$\operatorname{diag}(x^2+x, 1)$	$\operatorname{diag}(x+1, x)$	$\operatorname{diag}(x, x)$	$\operatorname{diag}(1, x^2+x+1)$
$\mathbf{Tr}_b$	$\begin{bmatrix} x^2+x & 0 \\ ax+b & 1 \end{bmatrix}; a, b \in \mathbb{Q}$	–	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & x^2+x+1 \end{bmatrix}$
$I_2x + B_0$	–	–	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x+1 & 1 \\ -1 & x \end{bmatrix}$

$b(x)$	$x^2(x^2+x+1)$	$(x^2+x)(x^2+x+1)$	$(x^2+x)(x^2+x+1)$
$\operatorname{diag}(d_1(x), d_2(x))$	$\operatorname{diag}(x, x^3+x^2+x)$	$\operatorname{diag}(x^2+x, x^2+x+1)$	$\operatorname{diag}(x+1, x^3+x^2+x)$
$\mathbf{Tr}_b$	$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 2x^2+x+1 & x^3+x^2+x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2+x & 0 \\ x^2+1 & x^2+x+1 \end{bmatrix}$	-
$I_2x^2 + B_1x + B_2$	$\begin{bmatrix} x^2+0,5x & 0,5x \\ 0,5(1-x) & x^2+0,5(x+1) \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2+x & 0 \\ -x & x^2+x+1 \end{bmatrix}$	-

Література

[1] Bell J.H. Left associates of monic matrices with an application to unilateral matrix equations. *American J. Math.*, 71(2) : 249–256, 1949.