

International scientific conference
**«Algebraic and geometric
methods of analysis»**

Book of abstracts



May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

<https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018>

Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій

А. С. Сердюк

(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

E-mail: serdyuk@imath.kiev.ua

І. В. Соколенко

(Інститут математики НАН України, Київ, Україна)

E-mail: sokol@imath.kiev.ua

Нехай C і L_p , $1 \leq p \leq \infty$, — простори 2π -періодичних функцій зі стандартними нормами $\|\cdot\|_C$ і $\|\cdot\|_p$. Позначимо через $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ класи 2π -періодичних функцій f , які зображуються у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_{\bar{\beta}}(x-t) \varphi(t) dt, \quad a_0 \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

в якій $\varphi \perp 1$, $\|\varphi\|_1 \leq 1$, а $\Psi_{\bar{\beta}}(\cdot)$ — ядра вигляду

$$\Psi_{\bar{\beta}}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos \left(kt - \frac{\pi \beta_k}{2} \right), \quad \beta_k \in \mathbb{R}, \quad \psi(k) > 0, \quad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) < \infty. \quad (3)$$

Якщо послідовності $\bar{\beta} = \{\beta_k\}_{k=1}^{\infty}$ є стаціонарними послідовностями, тобто $\beta_k = \beta$, $k \in \mathbb{N}$, $\beta \in \mathbb{R}$, то класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ позначатимемо через $C_{\beta,1}^\psi$. Якщо $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 0$, класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ і $C_{\beta,1}^\psi$ будемо позначати через $C_{\bar{\beta},1}^{\alpha,r}$ та $C_{\beta,1}^{\alpha,r}$, відповідно. Останні класи називають іноді класами узагальнених інтегралів Пуассона.

Будемо розглядати класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ за умови, що послідовність $\psi(k) > 0$ така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi(k+1)}{\psi(k)} = 0. \quad (4)$$

Як впливає з [1, с. 139-145], класи $C_{\bar{\beta},1}^\psi$ за виконання умови (4) складаються із функцій, які допускають регулярне продовження в усю комплексну площину, тобто складаються із цілих функцій. З іншого боку, як показано в [2], для того, щоб функція f належала до множини усіх дійснозначних на дійсній осі цілих функцій, необхідно і достатньо, щоб вона могла бути зображена згорткою вигляду (1) у якій $\varphi \in L_1$, а коефіцієнти $\psi(k)$ ядра $\Psi_{\bar{\beta}}$ вигляду (2) задовольняли умову (4).

Нехай $f \in C$. Через $\tilde{S}_{n-1}(f; x)$ позначатимемо тригонометричний поліном порядку $n-1$, що інтерполює $f(x)$ у рівномірно розподілених вузлах $x_k^{(n-1)} = \frac{2k\pi}{2n-1}$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто такий, що

$$\tilde{S}_{n-1}(f; x_k^{(n-1)}) = f(x_k^{(n-1)}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Порядкові оцінки збіжності інтерполяційних поліномів $\tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)$ до f в метриках просторів C і L_p , що виражались в термінах послідовностей найкращих наближень функцій в C і L_p , одержані у роботах І.І. Шарпудінова (1983) та К.І. Осколкова (1986).

Розглянемо величину

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\bar{\beta},1}^\psi)_{L_p} = \sup_{f \in C_{\bar{\beta},1}^\psi} \|f(\cdot) - \tilde{S}_{n-1}(f; \cdot)\|_p. \quad (5)$$

При $p = 1$ асимптотична поведінка величин вигляду (5) при $n \rightarrow \infty$ в залежності від тих чи інших обмежень на послідовності $\psi(k)$ та β_k досліджувалась у роботах [3]–[6]. Зокрема у [4, с. 994] за виконання умови (4) для довільних $\beta_k \in \mathbb{R}$ встановлено асимптотичну рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_1} = \frac{16}{\pi^2} \psi(n) + O(1) \left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k) \right), \quad (6)$$

в якій $O(1)$ рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Крім того, у роботі [7, с. 279-280] отримано результати, з яких випливає, що за виконання умови (4) при довільних $\beta_k \in \mathbb{R}$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_\infty} = \frac{2}{\pi} \psi(n) + O(1) \sum_{k=n+1}^{\infty} \psi(k), \quad (7)$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів.

Питання про асимптотичну поведінку величин $\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_p}$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, за виконання умови (4) при $1 < p < \infty$ залишалось відкритим.

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$, а $\psi(k) > 0$ задовольняє умову (3). Тоді при всіх $n \in \mathbb{N}$ має місце оцінка*

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^\psi)_{L_p} = \frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}} \|\cos t\|_p^2 \psi(n) + O(1) \left(\frac{\psi(n)}{n} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \psi(\nu) \right), \quad (8)$$

в якій $O(1)$ — величина, рівномірно обмежена відносно усіх розглядуваних параметрів. Якщо, крім того, $\psi(k)$ задовольняє умову (4), то при $n \rightarrow \infty$ оцінка (8) є асимптотичною рівністю.

Наведемо наслідок з теореми 1 у випадку, коли $\psi(k) = e^{-\alpha k^r}$, $\alpha > 0$, $r > 1$.

Теорема 2. *Нехай $r > 1$, $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$, $\beta_k \in \mathbb{R}$. Тоді для всіх номерів n таких, що*

$$n^{1-r} \ln(n+1) \leq \alpha r, \quad (9)$$

має місце рівномірна відносно усіх розглядуваних параметрів оцінка

$$\tilde{\mathcal{E}}_n(C_{\beta,1}^{\alpha,r})_{L_p} = e^{-\alpha n^r} \left(\frac{2^{1-\frac{1}{p}}}{\pi^{1+\frac{1}{p}}} \|\cos t\|_p^2 + O(1) \frac{1}{n} \right). \quad (10)$$

ЛІТЕРАТУРА

- [1] А. И. Степанец. *Методы теории приближений: В 2 ч.* — Киев: Ин-т математики НАН Украины, Ч. 1, 2002.
- [2] Степанец А.И., Сердюк А.С., Шидлич А.Л. Классификация бесконечно дифференцируемых периодических функций // *Укр. мат. журн.*, 60, № 12: 1686–1708, 2008.
- [3] В.П. Моторний. Приближение периодических функций интерполяционными многочленами в L_1 . *Укр. мат. журн.*, 42, № 6: 781–786, 1990.
- [4] Сердюк А.С. Наближення періодичних функцій високої гладкості інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці L_1 . *Укр. мат. журн.*, 52, № 7: 994–998, 2000.
- [5] А.С. Сердюк. Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами нескінченно диференційовних періодичних функцій в інтегральній метриці. *Укр. мат. журн.*, 53, № 12: 1654–1663, 2001.
- [6] А.С. Сердюк. Наближення періодичних аналітичних функцій інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриці простору L . *Укр. мат. журн.*, 54, № 5: 692–699, 2002.
- [7] А.С. Сердюк, В.А. Войтович. Наближення класів цілих функцій інтерполяційними аналогами сум Валле Пуссена. *Теорія наближення функцій та суміжні питання: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*, 7, № 1: 274–297, 2010.

Damian Wiśniewski <i>The behaviour of weak solutions of boundary value problems for linear elliptic second order equations in unbounded cone - like domains</i>	66
Iakovlieva O. N., Lipska Zh. M. <i>History of formation of the decimal number concept</i>	68
Yildiz S. <i>Some new applications on absolute matrix summability</i>	70
Yildiz S. <i>An Extension on localization property of Fourier series</i>	72
Безкоровайна Л. <i>Про A-деформацію поверхні, обмежену умовою стаціонарності сітки асимптотичних ліній</i>	73
Гречнёва М. О., Стеганцева П. Г. <i>Відновлення поверхні з краєм простору Мінковського за її грассмановим образом</i>	74
Кузь А. М. <i>Двоточкова нелокальна задача для систем рівнянь із частинними похідними над полем p-адичних чисел</i>	76
Маркітан В., Працьовитий М. <i>Геометрія числових рядів і розподіли їх випадкових неповних сум</i>	77
Подоусова Т. Ю. <i>Про стаціонарність довжин LGT-ліній при деформаціях поверхонь</i>	80
Подоусова Т. Ю., Вашпанова Н. В. <i>Про деякі нескінченно малі деформації мінімальних поверхонь</i>	81
Працьовитий М. В., Лисенко І. М. <i>Геометрія одного двосимвольного кодування дійсних чисел</i>	83
Пришляк О. О., Прус А. А. <i>Інваріант Пейкото для хордових діаграм на поверхні з межею</i>	86
Сердюк А. С., Соколенко І. В. <i>Наближення інтерполяційними тригонометричними поліномами в метриках просторів L_p на класах періодичних цілих функцій</i>	87
Синюкова О. М. <i>Деякі аспекти теорії проєктивних перетворень просторів дотичних розшарувань зі спеціальною метрикою</i>	89
Скуратовський Р. В. <i>Двопараметричні особливості одногілкових алгебраїчних кривих</i>	90
Черевко Є. В., Чепурна О. Є. <i>Псевдо-вайсманові многовиди та їх приклади</i>	91
Федченко Ю. С. <i>Про P-деформації поверхонь зі стаціонарним відхиленням від дотичної площини</i>	93
Хомич Ю., Піструїл М. <i>Поверхня Гауді та деформація з заданою варіацією елемента площі</i>	94
Арсеньєва О. Е., Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р. <i>Постоянство типа обобщенных многообразий Кенмоцу</i>	96
Болотова Т. Н., Макаров В. И. <i>Геометрическая интерпретация законов физиологического развития растений</i>	97