



International  
Scientific Conference



# Algebraic and Geometric Methods of Analysis



Devoted to 160 anniversary of  
**Dvytro Grave**  
(25.08.1863 - 19.12.1939)  
Academician of the Ukrainian  
Academy of Sciences, the  
first director of the Institute of  
Mathematics of NAS of Ukraine

May 29 – June 1, 2023  
Odesa, Ukraine

## LIST OF TOPICS

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric and topological methods in natural sciences
- Geometric problems in mathematical analysis

## ORGANIZERS

- Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National University of Technology
- Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- Kyiv Mathematical Society

## SCIENTIFIC COMMITTEE

- |  |   |
|--|---|
| • <b>Bolotov D.</b> ( <i>Kharkiv, Ukraine</i> )  | • <b>Konovenko N.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )   |
| • <b>Bondarenko V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )  | • <b>Maksymenko S.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )   |
| • <b>Boychuk O.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )     | • <b>Mikhailets V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )   |
| • <b>Boyko V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )       | • <b>Ostrovskiy V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )   |
| • <b>Cherevko Ye.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )  | • <b>Petravchuk A.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )   |
| • <b>Dorogovtsev A.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> ) | • <b>Plaksa S.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )       |
| • <b>Drozd Yu.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )      | • <b>Portenko M.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )     |
| • <b>Gerasymenko V.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> ) | • <b>Pratsiovytyi M.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> ) |
| • <b>Fedchenko Yu.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> ) | • <b>Savchenko O.</b> ( <i>Kherson, Ukraine</i> ) |
| • <b>Kiosak V.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )     | • <b>Romanyuk A.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )     |
| • <b>Kochubei A.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )    | • <b>Timokha O.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )      |

## ORGANIZING COMMITTEE

- |  |   |
|--|---|
| • <b>Maksymenko S.</b> ( <i>Kyiv, Ukraine</i> )  | • <b>Cherevko Ye.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> ) |
| • <b>Konovenko N.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )  | • <b>Osadchuk Ye.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> ) |
| • <b>Fedchenko Yu.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> ) | • <b>Sergeeva O.</b> ( <i>Odesa, Ukraine</i> )  |

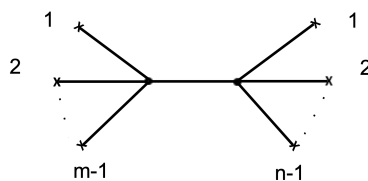


Рис 1. Граф подвійна зірка.

Доповідь ґрунтується на результатах статті [10], де, також, отримані теореми, подібні до теореми 1 для інших графів.

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] R. Carlson, V. Pivovarchik. Spectral asymptotics for quantum graphs with equal edge lengths J. Phys. A: Math. Theor. Vol.41 (2008) 145202, 16 pp.
- [2] C. Cattaneo, The spectrum of the continuous Laplacian on a graph, Monatsh. Math. 124 (1997), no. 3, 215-235.
- [3] A. Chernyshenko, V. Pivovarchik. Recovering the shape of a quantum graph. Integral Equations and Operator Theory, Vol. 92, (2020), Art. 23.
- [4] L. Collatz, U. Sinogowitz. Spektren endlicher Grafen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, Vol. 21 (1957) 63-77.
- [5] D. M. Cvetkovic', M. Doob, H. Sachs. Spectra of Graphs. Theory and Applications. Berlin, 1980. Amsterdam 1988.
- [6] P. Exner, A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices, Ann. Inst. H. Poincaré, Sec. A **66** (1997), 359-371.
- [7] Fan R. K. Chung *Spectral graph theory* AMS Providence, R.I. 1997.
- [8] B. Gutkin, U. Smilansky, Can one hear the shape of a graph? J. Phys. A Math. Gen. **34** (2001), 6061-6068.
- [9] J. von Below, *Can One Hear the Shape of a Network*, Partial Differential Equations on Multistructures, Lecture Notes in Pure Mathematics, **219**, M. Dekker, NY, (2001), 19-36.
- [10] Пивоварчик В.М., Чернишенко А.А. *Коспектральні квантові графи за умов Діріхле на висячих вершинах*, прийнятої до друку в Українському математичному журналі.

## Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді $\widetilde{E}(2)$

**Ігор Гавриленко**

(Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна)

*E-mail:* igorgavrilenko0898@gmail.com

**Євген Петров**

(Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна, Харків, Україна)

*E-mail:* petrov@karazin.ua

Відомо, що у тривимірному евклідовому просторі повна зв'язна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли є площиною. Цей результат був отриманий незалежно О.В. Погореловим, М. до Кармо і К.К. Пенгом та Д. Фішер-Колбрі і Р. Шоеном (див., наприклад, [1]). Він узагальнює класичну теорему С.Н. Бернштейна, згідно з якою будь-яка повна явно задана мінімальна поверхня є площиною. У [2] було введено поняття

мінімальної поверхні в субрімановому многовиді. У подальшому такі поверхні та їхня стійкість вивчалися для різних субріманових геометрій, див. огляд у [4]. Зокрема, у [3] були отримані результати типу Бернштейна, тобто опис стійких мінімальних поверхонь, у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга.

Субрімановим многовидом зветься гладкий многовид  $M$  разом з гладким векторним розподілом  $\mathcal{H}$  на  $M$  (він зветься горизонтальним розподілом) і гладким полем евклідових скалярних добутків  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  на  $\mathcal{H}$  (субрімановою метрикою). Розглянемо гладку орієнтовану поверхню  $\Sigma$  у тривимірному субрімановому многовиді  $M$ , субріманова метрика  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  якого будується як обмеження на  $\mathcal{H}$  деякої ріманової метрики  $M$ . Сингулярна множина  $\Sigma_0$  цієї поверхні складається з тих точок  $p \in \Sigma$ , для яких дотична площина  $T_p\Sigma$  збігається з  $\mathcal{H}_p$ . Якщо  $N$  – одиничне нормальне поле  $\Sigma$  у рімановому сенсі, то можна описати сингулярну множину як  $\Sigma_0 = \{p \in \Sigma \mid N_h(p) = 0\}$ , де  $N_h$  – ортогональна проекція поля  $N$  на  $\mathcal{H}$ . Субріманова площа області  $D \subset \Sigma$  визначається як  $A(D) = \int_D |N_h| d\Sigma$ , де  $d\Sigma$  – ріманова форма площі  $\Sigma$ . Нормальною варіацією  $\Sigma$ , що задана гладкою функцією  $u$ , будемо називати відображення  $\varphi: \Sigma \times I \rightarrow M$ , що визначене умовою  $\varphi_s(p) = \exp_p(su(p)N(p))$ . Тут  $I$  – деякий окіл нуля в  $\mathbb{R}$ , а  $\exp_p$  – ріманове експоненційне відображення. Іншими словами, ми будемо варіацію традиційним для ріманової геометрії чином, випускаючи геодезичні з точки  $p$  в напрямку  $u(p)N(p)$ . Позначимо  $A(s) = \int_{\Sigma_s} |N_h| d\Sigma_s$ , де  $\Sigma_s = \varphi_s(\Sigma)$ . Тоді  $A'(0)$  зветься першою варіацією площі, що відповідає  $\varphi$ , а  $A''(0)$  – другою. Поверхня  $\Sigma$  називається мінімальною, якщо  $A'(0) = 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . Зауважимо, що тут ми слідуємо рімановій традиції, називаючи мінімальними поверхнями стаціонарні точки субріманового функціонала площі. Мінімальна поверхня  $\Sigma$  називається стійкою, якщо  $A''(0) \geq 0$  для будь-яких нормальних варіацій з компактним носієм у  $\Sigma \setminus \Sigma_0$ . У [3] було, зокрема, встановлено, що у субрімановій тривимірній групі Гейзенберга повна зв'язна мінімальна поверхня з порожньою сингулярною множиною є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є вертикальною евклідовою площиною.

Многовид  $\widetilde{E(2)}$  визначається як універсальне накриття групи власних рухів площини. Це простір  $\mathbb{R}^3$  з координатами  $(x, y, z)$  (де  $(x, y)$  відповідає паралельному перенесенню, а  $z$  – куту обертання), на якому структура групи Лі визначає наступний базис лівоінваріантних векторних полів:

$$X_1 = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = \frac{\partial}{\partial z}, X_3 = \sin z \frac{\partial}{\partial x} - \cos z \frac{\partial}{\partial y}.$$

Розглянемо на  $\widetilde{E(2)}$  ріманову метрику  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  таку, що  $\{X_1, X_2, X_3\}$  є ортонормованим базисом в кожній точці. Зауважимо, що вона виявляється евклідовою. У якості горизонтального розподілу  $\mathcal{H}$  візьмемо розподіл, що натягнутий на  $\{X_1, X_2\}$ , а у якості  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$  – обмеження евклідової метрики на  $\mathcal{H}$ . Нехай  $\Sigma$  тепер – гладка орієнтована поверхня у  $\widetilde{E(2)}$ . Введемо деякі додаткові позначення. На регулярній частині  $\Sigma \setminus \Sigma_0$  поверхні визначимо горизонтальне гаусове відображення  $\nu_h = \frac{N_h}{|N_h|}$  та характеристичне векторне поле  $Z$ , яке у кожній точці утворюється з  $\nu_h$  обертанням на прямиий кут у площині  $\mathcal{H}_p$  (в орієнтації, що визначена  $N(p)$ ). Позначимо  $S = \langle N, X_3 \rangle - |N_h|X_3 \in T_p\Sigma$ . Векторне поле  $S$  доповнює  $Z$  до базису дотичної площини. Через  $\nabla$  позначатимемо ріманову коваріантну похідну. Нехай  $B$  – оператор Вейнгартена поверхні  $\Sigma$  відносно  $N$ , що визначається для будь-якого дотичного до  $\Sigma$  векторного поля  $W$  умовою  $B(W) = -\nabla_W N$ .

**Теорема 1.** Нехай  $\Sigma$  – поверхня у  $\widetilde{E}(2)$ . Тоді перша нормальна варіація її площі, що задана функцією  $u$ , має наступний вигляд:

$$A'(0) = \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} |N_h|^{-1} (-\langle B(Z), Z \rangle + \langle N, X_3 \rangle \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle) u \, d\Sigma.$$

Якщо  $\Sigma$  мінімальна, то друга нормальна варіація її площі, що задана функцією  $u$ , має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} A''(0) = & \int_{\Sigma \setminus \Sigma_0} -2|N_h| \langle B(Z), S \rangle^2 u^2 + 2|N_h| \langle B(Z), Z \rangle \langle B(S), S \rangle u^2 + \\ & + 2|N_h| \langle B(Z), Z \rangle u^2 (\langle B(S), S \rangle + \langle B(Z), Z \rangle) - 2 \langle N, X_3 \rangle \langle B(S), Z \rangle Z(u) u + \\ & + |N_h|^{-1} (Z(u) + \langle N, X_3 \rangle |N_h| \langle \nabla_{\nu_h} X_3, Z \rangle u)^2 - \\ & - 2|N_h|^2 \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle u - |N_h|^3 \langle \nabla_{\nu_h} X_3, \nu_h \rangle^2 u^2 \, d\Sigma. \end{aligned}$$

**Твердження 2.** Евклідова площина у  $\widetilde{E}(2)$  є мінімальною тоді й тільки тоді, коли це горизонтальна або вертикальна площина. Усі мінімальні евклідові площини у  $\widetilde{E}(2)$  є стійкими.

Іншими прикладами мінімальних поверхонь є явно задані  $y = A \cos z + B$  та  $y = x + A(\sin z + \cos z) + B$ , де  $A, B$  постійні. Наведені приклади демонструють, що з мінімальності поверхні у рімановому сенсі не впливає її субріманова мінімальність та навпаки. Будемо називати поверхню  $\Sigma$  у тривимірному субрімановому многовиді вертикальною, якщо  $T_p \Sigma \perp \mathcal{H}_p$  для кожної  $p \in \Sigma$ . Зокрема, такі поверхні не містять сингулярних точок.

**Теорема 3.** Будь-яка повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня у  $\widetilde{E}(2)$  – це горизонтальна евклідова площина  $z = C$  або паралельно перенесений уздовж площини  $(x, y)$  стандартний гелікоїд  $x \cos z + y \sin z = 0$ . При цьому гелікоїди є нестійкими.

Звідси отримуємо наступний частковий результат типу Бернштейна.

**Наслідок 4.** У  $\widetilde{E}(2)$  повна зв'язна вертикальна мінімальна поверхня є стійкою тоді й тільки тоді, коли ця поверхня є горизонтальною евклідовою площиною.

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] D. Fischer-Colbrie, R. Schoen. The structure of complete stable minimal surface in 3-manifolds of non-negative scalar curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 33(2) : 199–211, 1980.
- [2] N. Garofalo, D.-M. Nhieu. Isoperimetric and Sobolev inequalities for Carnot-Carathéodory spaces and the existence of minimal surfaces. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(3) : 1081–1144, 1996.
- [3] A. Hurtado, M. Ritoré, C. Rosales. The classification of complete stable area-stationary surfaces in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Adv. in Math.*, 224(2) : 561–600, 2010.
- [4] M. Ritoré, C. Rosales. Area-stationary and stable surfaces in the sub-Riemannian Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$ . *Matemática Contemporânea*, 35 : 185–203, 2008.

- M. Bessmertnyi, V. Zolotarev** *p-Hyperbolic Zolotarev functions in boundary value problems for a p th order differential operator* 113
- N. Zorii** *Thinness at infinity and Deny's principle of positivity of mass in the theory of Riesz potentials* 114
- А. Чернишенко** *Знаходження форми квантових графів за умов Діріхле на висячих вершинах* 116
- І. Гавриленко, Є. Петров** *Стійкість мінімальних поверхонь у субрімановому многовиді  $E(2)$*  118
- М. Гречнева, П. Стеганцева** *Двовимірні неізотропні поверхні з плоскою нормальною зв'язністю і невиродженим грассмановим образом постійної кривини у просторі Мінковського* 121
- В. Кіосак** *Геодезичні відображення симетричних просторів* 122
- І. Курбатова** *Про 3F-планарні відображення псевдо-ріманових з інтегрованою структурою Яно-Хочу-Чена* 123
- М. Працьовитий, І. Лисенко, Ю. Маслова** *Тополого-метрична теорія G-зображення чисел* 124
- С. Покась, А. Ніколайчук** *Наближення для просторів афінної зв'язності та індуковані відображення* 125
- М. Піструїл** *Закономірності квазі-геодезичних відображень узагальнено-рекурентно-параболічних просторів* 126
- М. В. Працьовитий, О. І. Бондаренко, Я. В. Гончаренко, С. П. Ратушняк** *Геометрія чисел у задачах конструктивної теорії локально складних функцій* 128
- А. Сердюк, Т. Степанюк** *Розв'язок задачі Колмогорова-Нікольського для інтерполяційних поліномів Лагранжа на класах узагальнених інтегралів Пуассона* 130
- І. Петков, Р. Салімов, М. Стефанчук** *Про нижню оцінку діаметра образу круга* 132