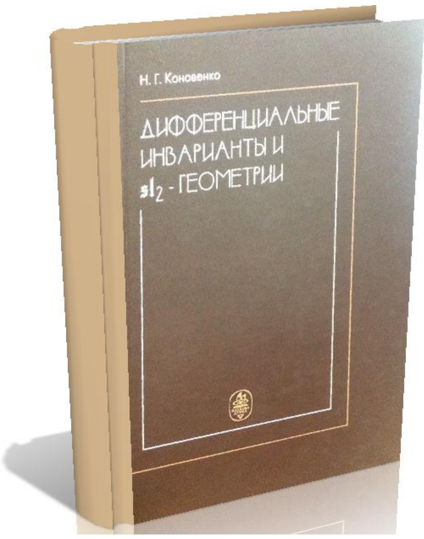

Коновенко, Н. Г. Дифференциальные инварианты и $\mathfrak{sl}_2$ - геометрии [Текст] / Коновенко Надежда Григорьевна. - Киев : Наукова думка, 2013. - 188 с. - Библиогр.: с. 181-184. - ISBN 978-966-00-1202-8.

Книга посвящена локальному исследованию геометрий на одномерных и двумерных многообразиях со структурной алгеброй Ли $\mathfrak{sl}_2$. В книге найдены новые классы дифференциальных уравнений, обладающих $\mathfrak{sl}_2$-симметрией, которые могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Для специалистов в области математики, а также преподавателей, аспирантов и студентов высшей школы.

Введение

В 1872 году Феликсом Клейном был предложен единый подход к изучению геометрий, известный под названием Эрлангенская программа.

Этот подход, во многом основывающийся на идеях и результатах Софуса Ли, берет за основу базовое пространство и структурную группу *G*, действующую на этом пространстве. Более того, пространство *M* предполагается гладким многообразием, *G* - группой Ли, а действие группы *G* на многообразии *M* транзитивным.

Иначе говоря, *M* является однородным многообразием со структурной группой *G*.

Задача же геометрии, согласно Ф. Клейну, состоит в изучении инвариантов структурной группы *G*.

Эта точка зрения оказалась исключительно плодотворной и до сих пор играет определяющую роль как в самой геометрии, так и в ее приложениях, начиная с математической физики и заканчивая математической логикой [38]. Важным в исследовании геометрии является понятие инварианта. В самой Эрлангенской программе об этом сказано, как о нечто само собой разумеющемся: "Как обобщение геометрии получается, таким образом, следующая многообъемлющая задача: дано многообразие и в нем группа преобразований: нужно исследовать те свойства образов, принадлежащих многообразию, которые не изменяются от преобразований группы" [5|.

В данной работе, имея ввиду приложения к дифференциальной геометрии, под инвариантами понимаются дифференциальные инварианты. С этой целью мы вводим понятие геометрической величины [1], как сечения расслоения над многообразием *M,* в которое поднято действие группы Ли *G*, а под дифференциальным инвариантом понимаем функцию, заданную на пространстве джетов геометрических величин и инвариантную относительно продолженного действия структурной группы.

В этой интерпретации основная задача геометрии понимается как задача нахождения дифференциальных инвариантов действия структурной группы в расслоении геометрических величин.

В приложениях к задачам математической физики и дифференциальным уравнениям Эрлангенская программа имеет одну важную особенность.

А именно, на практике обычно известно действие алгебры Ли (конечномерной или бесконечномерной) и интегрирование этого действия для перехода к соответствующему действию группы или псевдогруппы Ли само по себе представляет сложную задачу. Поэтому мы модифицируем Эрлангенскую программу Клейна, предполагая, что на многообразии M задано эффективное и транзитивное действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Иначе говоря, задано вложение $\mathfrak{g} \subset D(M)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $D(M)$ векторных полей на многообразии M, при котором в каждой точке $a \in M$ векторные поля из $\mathfrak{g}$ порождают все касательное пространство T_aM.

Расслоение $\pi : E \to M$ называется однородным, если действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на многообразии M поднято до действия $\mathfrak{g}$ в расслоении π. Иными словами, расслоение π является однородным, если указан гомоморфизм алгебр Ли $X \in \mathfrak{g} \to \overline{X} \in D(E)$, при котором векторным полям X из алгебры $\mathfrak{g}$ соответствуют векторные поля $\overline{X}$ на тотальном пространстве E расслоения π, и при этом выполнены следующие условия:

$$\pi_*(\overline{X}) = X, \quad \overline{\alpha X + \beta Y} = \alpha\overline{X} + \beta\overline{Y}, \quad \overline{[X, Y]} = [\overline{X}, \overline{Y}],$$

для всех $X, Y \in \mathfrak{g}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Сечения однородного расслоения π мы называем *геометрическими величинами* в геометрии $(M, \mathfrak{g})$.

При этом элементы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ естественным образом действуют на сечениях расслоения π, то есть на геометрических величинах. А задача геометрии состоит в нахождении дифференциальных инвариантов этого действия.

Отметим также, что группа диффеоморфизмов многообразия M естественным образом действует на множестве $\mathfrak{g}$-геометрий на многообразии M. А именно, если $(M, \mathfrak{g})$ - некоторая геометрия, а $\varphi : M \to M$ - диффеоморфизм, то образ этой геометрии при этом диффеоморфизме определяется алгеброй Ли $\varphi_*(\mathfrak{g}) \subset D(M)$, где φ_* - дифференциал отображения φ. Эти две геометрии $(M, \mathfrak{g})$ и $(M, \varphi_*(\mathfrak{g}))$ мы называем эквивалентными. Таким образом, для заданной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ возникает задача классификации всех -геометрий. Локальное описание -геометрий на прямой и плоскости было начато и в основном закончено Софусом Ли |32|. Современную версию результатов С. Ли можно найти в [35], [11, |31].

Отметим также, что нахождение дифференциальных инвариантов важно для приложения геометрии к дифференциальным уравнениям, поскольку оно содержит описание дифференциальных операторов (как линейных, так и нелинейных), инвариантных относительно структурной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Это позволяет применять к дифференциальным уравнениям, задаваемыми этими операторами, методы интегрирования, основанные на использовании алгебр симметрий. Проиллюстрируем эти методы на примере обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$- симметриями.

Книга начинается с изучения аффинной геометрии на прямой, которая задается алгеброй Ли "$ax + b$", то есть алгеброй Ли, порождённой трансляцией ∂_x и масштабным преобразованием $x\partial_x$, $\mathfrak{a} = \langle \partial_x, x\partial_x \rangle$. С этой целью классифицируются аффинные геометрические величины на прямой и приводятся нормальные формы действия аффинной алгебры Ли. Полученная классификация используется для нахождения базисных дифференциальных инвариантов аффинных геометрических величин и описания всей алгебры аффинных дифференциальных инвариантов. В заключении приводятся классы обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющие аффинную алгебру симметрий, и допускающие тем самым интегрирование в квадратурах.

Далее изучаются проективные геометрии на прямой. Проективную структуру на прямой обычно определяют через атласы, функции перехода в которых задаются дробнолинейными преобразованиями. Иначе, проективная структура может быть определена через эффективное и транзитивное действие алгебры $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ на прямой. Оба эти определения, в силу теоремы Софуса Ли, эквивалентны.

Стандартная проективная геометрия может быть описана через следующее действие алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$:

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = (\partial_\chi, x\partial_\chi, x^2\partial_\chi) \subset D(\mathbb{R})$.

Здесь и в дальнейшем через $A = \partial_x$, $B = x^2\partial_x$, $H = 2x\partial_x$ мы обозначаем базис Шевалле в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$.

Проективными геометрическими величинами являются сечения однородных $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ расслоений. Такие расслоения локально имеют вид: $\pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, где число m называется размерностью геометрической величины.

В книге дается полная локальная классификация однородных $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ – расслоений и приводятся нормальные формы понятий $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ - действий в эти расслоения.

Основываясь на классификации проективных геометрических величин, мы вычисляем алгебры их дифференциальных инвариантов и указываем, порождающие их базисные дифференциальные инварианты. Полученные результаты применяются к нахождению новых классов нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих $\mathfrak{sl}_2$ - симметрией и интегрируемых в квадратурах.

Для описания общих проективных структур на прямой мы указываем связь между проективными структурами и дифференциальными уравнениями второго порядка типа Шредингера. Из теоремы Софуса Ли следуют, что проективные структуры на прямой локально эквивалентны. Глобально, то есть на конечных интервалах прямой, проективные структуры могут быть не эквивалентны. Это приводит к нестандартным проективным структурам на прямой. Мы приводим критерий, который дает условия неэквивалентности проективной структуры стандартной.

Для нестандартных проективных структур также описаны алгебры дифференциальных инвариантов и найдены базисные дифференциальные инварианты.

Вторая часть работы посвящена геометриям на плоскости. С этой целью мы классифицируем транзитивные и эффективные действия алгебры Ли sl_2 на плоскости и показываем, что локально имеются два неэквивалентных примитивных действия. Они определяют две классические геометрии: геометрию Лобачевского и геометрию де Ситтера. Для обеих геометрий приведена классификация геометрических величин и найдены алгебры дифференциальных инвариантов. Это описание основано на построении двух пуассоновых структур на алгебрах дифференциальных инвариантов.

В заключении мы переносим эти результаты на действия бесконечномерных псевдогрупп Ли. А именно, мы строим инвариантные пуассоновые и метрические структуры на алгебре инвариантов псевдогруппы конформных преобразований плоскости и с их помощью находим базисные дифференциальные инварианты и описываем структуру алгебры дифференциальных инвариантов.

Описания алгебр дифференциальных инвариантов позволяет получить классификацию геометрических величин в соответствующих геометриях. Мы иллюстрируем это на примере классификации функций в соответствующих геометриях.

В заключительной части мы рассматриваем приложения аффинных и проективных геометрий на прямой к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений.

Приводятся широкие классы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Применяемый метод интегрирования, основан на использовании симметрий и классической теоремы Ли-Бьянки [31]. Отметим также, что дифференциальные инварианты используются в этом методе для построения преобразований типа Бэклунда.

В основу книги положены результаты, полученные автором за период 2007 - 2010 годов.

Автор выражает глубокую признательность рецензентам за внимание к рукописи книги и за конструктивные предложения, позволившие существенно улучшить содержание книги.

Автор также благодарен Елене Кушнер и Сергею Максименко за помощь и поддержку в оформлении рукописи.

При расчетах в книге использовались компьютерные пакеты Differential Geometry и Jet Calculus для компьютерной системы Maple. Автор благодарен профессору Яну Андерсону (I. Anderson) за создание этих пакетов.

Оглавление