**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ**
**ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ**

**Коновенко Надія Григорівна**

**УДК 514.7: 514.763.8**

# СТРУКТУРИ АЛГЕБР ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ІНВАРІАНТІВ У КЛАСИЧНИХ $sl_2$ - ГЕОМЕТРІЯХ

Спеціальність: 01.01.04 - геометрія та топологія

**АВТОРЕФЕРАТ**
**дисертації на здобуття наукового ступеня**
**кандидата фізико-математичних наук**

**КИЇВ — 2010**

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Одеській національній академії харчових технологій МОН України.

**Науковий керівник:**
доктор фізико-математичних наук, професор
**ЛИЧАГІН Валентин Васильович**,
Одеська національна академія харчових технологій,
професор кафедри вищої математики.

**Офіційні опоненти:**
доктор фізико-математичних наук, професор
**Красильщик Йосип Семенович,**
Російский державний гуманітарний університет,
професор кафедри математики, логіки та
інтелектуальних систем у гуманітарній галузі;

доктор фізико-математичних наук, професор
**Лейко Святослав Григорович,**
Одеський національний університет імені І.І. Мечникова,
завідувач кафедри геометрії і топології.

Захист відбудеться 23 лютого 2010 року о 15 год. на засіданні спеціалізованої вченої ради Д26.206.03 Інституту математики НАН України за адресою: 01601, м. Київ, вул. Терещенківська, 3.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту математики НАН України.

Автореферат розісланий 15 січня 2010 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої ради В. В. Сергейчук

## Загальна характеристика роботи

**Актуальність теми.** У 1872 році Феліксом Клейном був запропонований єдиний підхід до вивчення геометрії, відомий за назвою Ерлангенська програма. Цей підхід, який базується на ідеях і результатах Софуса Лі, бере за основу базовий простір і структурну группу *G*, діючу на цьому просторі. Більше того, простір *M* передбачає гладкі многовиди, *G*- групою Лі, а дія *G* на *M* транзитивна. Інакше кажучи, M є однорідним многовидом зі структурною групою G. Задача геометрії, згідно Ф. Клейну, складається у вивченні інваріантів структурної групи G. Ця точка зору виявилася винятково плідною й зараз до нашого часу та відіграє визначальну роль як у самій геометрії, так і в її додатках, починаючи з математичної фізики й закінчуючи математичною логікою.

Важливим у дослідженні геометрії є поняття інваріанта. У дисертації, маємо на увазі додаток до диференціальної геометрії, під інваріантами ми розуміємо диференціальні інваріанти. Із цією метою ми вводимо поняття геометричної величини, як перетину розшарування над многовидом M, у яке піднята дія групи Лі G, а під диференціальним інваріантом розуміємо функцію, задану на просторі джетів геометричних величин і інваріантних відносно продовження дії структурної групи. У цій інтерпретації основна задача геометрії розуміється як задача знаходження диференціальних інваріантів дії структурної групи G у розшаруванні геометричних величин.

У додатках до задач математичної фізики й диференціальних рівнянь Ерлангенська програма має одну важливу особливість. А саме, на практиці відома дія алгебри Лі (кінечномірної або безкінечномірної) і інтегрування цієї дії для переходу до відповідної дії групи або псевдогрупи Лі, саме по собі, представляє складну задачу. Тому ми модифікуємо Ерлангенську програму Клейна, припускаючи, що на многовиді $M$ задано ефективну й транзитивну дію алгебри Лі g. Інакше кажучи, задане вкладення алгебри Лі g у алгебру Лі D(M) векторних полів на многовиді M, при якому в кожній точці векторні поля з g породжують весь дотичний простір.

Розшарування називається однорідним, якщо дія алгебри Лі g на многовиді M піднято до дії g у розшаруванні пі. Інакше кажучи, розшарування пі є однорідним, якщо зазначено гомоморфізм алгебри Лі, при якому векторним полям X з алгебри g відповідають векторні поля на тотальному просторі E розшарування пі, і при цьому виконані наступні умови: для всіх

Перетини однорідного розшарування пі називаються *геометричними величинами* в геометрії (M, g). Елементи алгебри Лі g природно діють на перетинах розшарування пі, тобто на геометричних величинах. А завдання геометрії полягає в знаходженні диференціальних інваріантів цієї дії.

Зазначимо, що група диффеоморфізмів многовиду M природно діє на множині g-геометрій на многовиді M. А саме, якщо (M, g) - деяка геометрія, а - диффеоморфізм, де образ цієї геометрії при цьому диффеоморфізмі визначається алгеброю Лі, де - диференціал відображення. Ці дві геометрії (M, g) і ми називаємо еквівалентними. Таким чином, для заданої алгебри Лі g виникає задача класифікації всіх $g$ gгеометрій. Локальний опис g-геометрій на прямій і площині було почато й в основному закінчено Софусом Лі. Сучасну версію результатів С. Лі можна знайти у роботі P.Olver Applications of Lie groups to differential equations, Graduate Texts in Mathematics, (Springer-Verlag, New York (1986)).

Відмітимо також, що знаходження диференціальних інваріантів є важливим для додатків геометрій до диференціальних рівнянь. Оскільки воно містить опис диференціальних операторів (як лінійних, так і нелінійних), інваріантних щодо структурної алгебри Лі g. Це дозволяє застосовувати до диференціальних рівнянь, що задають цими операторами, методи інтегрування, засновані на використанні алгебр симетрій. У дисертації ми ілюструємо це на прикладі звичайних диференціальних рівнянь, що володіють sl_2(R)-симетріями.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Напрямок досліджень, обраний в дисертації, є складовою частиною теми “Вивчення диференціальних інваріантів відображень многовидів та структури алгебр диференціальних інваріантів у класичних sl_2–геометріях”, яка виконувалась на кафедрі вищої математики Одеської національної академії харчових технологій.

**Мета і завдання дослідження.** *Метою* роботи є дослідження геометрій на одновимірних і двовимірних многовидах, обумовлених ефективними й транзитивними діями алгебри Лі sl_2(R).

*Об’єктом досліджня* є дії алгебри Лі sl_2(R) на одновимірні і двувимірні многовиди, класифікація однорідних sl_2(R) розшарувань і геометричних величин, що їм відповідають, опис алгебр диференціальних інваріантів геометричних величин.

*Предметом досліджня* є геометричні sl_2(R)-величини, алгебри диференціальних інваріантів sl_2(R)-геометричних величин.

*Завдання дослідження:*

- знаходженя інваріантів дії алгебри Лі sl_2(R);
- отримання переліку нееквівалентних представлень алгебр Лі sl_2(R) у векторних полях;
- опис sl_2(R)  геометричних величин;
- знаходження базисних диференціальних інваріантів.

*Методи дослідження.* У дисертаційній роботі для розв’язання сформульованих задач використовуються результати й методи диференціальної геометрії й геометрії просторів джетів, а також для символічних обчислень використовується комп’ютерна система Maple.

**Наукова новизна одержаних результатів.** Основними результатами, які визначають наукову новизну й виносяться на захист, є такі:

- класифікація дій алгебри Лі sl_2(R) на прямій і площині;
- локальна класифікація sl_2(R) однорідних розшарувань;
- знаходження базисних диференціальних інваріантів геометричних
sl_2(R)–величин.

**Практичне значення одержаних результатів.** Результати дисертаційної роботи мають теоретичний і практичний характер. Отримані в дисертації наукові результати можуть бути використані при дослідженні проективних структур на прямій, а також при рішенні класифікаційних задач у геометріях Лобачевського й де Сіттера. Результати дисертації можуть бути використані при дослідженні нелінійних диференціальних рівнянь, що володіють sl_2(R) симетріями, зокрема, для знаходження нових класів тих, що інтегруються у квадратурах нелінійних диференціальних рівнянь. Результати дисертаційної роботи дозволяють по новому глянути на класичні одномірні й двовимірні геометрії. На підставі цих результатів були складені й прочитані спецкурси в Астраханському державному університеті й міжнародних наукових школах.

**Особистий внесок здобувача.** Визначення загального плану досліджень і постановка задач належать професору В.В. Личагіну. Основні результати, що виносяться на захист, отримані автором самостійно.

**Апробація результатів дисертації.** Результати дисертації доповідалися та обговорювались на II Міжнародному семінарі “Симетрії: теоретичний і методичний аспекти” (Астрахань, 11-14 вересня 2007р.); V Міжнародній конференції “Geometry in Odessa - 2008” (Одеса, 19-24 травня 2008р.); Міжнародній конференції “Geometry in Astrakhan - 2008” (Астрахань, 18-24 серпня 2008р.); Першій молодіжній школі по теорії керування, диференціальній геометрії й диференціальним рівнянням Інноваційного Фізико-математичного інституту Астраханського держуніверситету (Астрахань, 18-24 серпня 2008р.); VI Міжнародній конференції “Geometry in Odessa - 2009” (Одеса, 25-30 травня 2009р.); Міжнародній науковій конференції, присвяченій 100-річчю від дня народження Г. Ф. Лаптєва “Лаптєвські читання - 2009” (Москва-Твер, 25-28 серпня 2009р.); Українському математичному конгресі - 2009 (до 100-річчя від дня народження Б.Н.Боголюбова (Київ, 27-29 серпня 2009р.); Міжнародній конференції “Geometry in

Astrakhan - 2009" (Астрахань, 10-16 вересня 2009р.); Третій молодіжній школі по теорії керування, диференціальній геометрії й диференціальним рівнянням Інноваційного Фізико-математичного інституту Астраханського держуніверситету (Астрахань, 16-19 вересня 2009р.); науковому семінарі відділу топології Інституту математики НАН України; керівник семінару – член-кореспондент НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, зав. відділом топології Інституту математики НАН України В.В.Шарко (Київ, 2009р); семінарі кафедри геометрії механіко-математичного факультету Київського національного університету імені тараса Шевченка; керівник семінару - доктор фіз.-мат. наук, професор О.О.Пришляк (Київ, 2009р.); семінарі "Геометрія диференціальних рівнянь" Ін-т проблем управління РАН; керівник семінару - член-кореспондент РАПН, доктор фіз.-мат. наук, професор Личагін В.В. (Москва, 2009); семінарі "Геометрія диференціальних рівнянь" Незалежний Московський університет; керівник семінару - доктор фіз.-мат. наук, професор Красильщик Й.С. (Москва, 2009).

**Публікації.** Основні результати дисертації опубліковані у п'яти статтях [1-5], які входять до переліку, затвердженному ВАК України, та у семи матеріалах і тезах міжнародних наукових математичних конференцій [6-12].

**Структура та обсяг дисертації.** Дисертація викладена на 167 сторінках і складається із вступу, чотирьох розділів і списку літератури, що містить 33 найменуваня. При її оформленні використана система **LaTeX**.

*Автор висловлює глибоку подяку науковому керівнику професору В.В. Личагіну за допомогу у роботі над дисертацією.*

## Основний зміст роботи

**У вступу** дається загальна характеристика роботи й формулюються основні результати.

**У першому розділі** досліджується афінна геометрія на прямій, що задається алгеброю Лі. Для цього класифікуються афінні геометричні величини на прямій і наводяться нормальні форми дії аффинной групи. Локальна класифікація дії афінної групи дається наступною теоремою:

**Теорема 1.3** *Нехай, де підняття дії афінної алгебри Лі у розшарування, і нехай - функціонально незалежні перші інтеграли векторного поля. Тоді це підняття локально еквівалентне одному з наступних*

Для одномірних геометричних величин маємо наступний результат:

**Теорема 1.4** *Одновимірні геометричні величини на афінній прямій діляться на два класи, що відповідають наступним поданням алгебри:*

*Клас 1.*

*Клас 2.*

*де - довільна гладка функція, така, що.*

Структура алгебри диференціальних інваріантів афінних геометричних величин залежить від зазначених у цій теоремі класів. Так для геометричних величин класу (1) ми маємо наступний результат.

**Теорема 1.6** *Алгебра афінних диференціальних інваріантів для афінних геометричних величин розмірності породжена диференціальними інваріантами нульового порядку й інваріантним диференціюванням, що належать єдиному співвідношенню сизигії .*

Для одновимірних геометричних величин класу (1) має місце наступний результат.

**Теорема 1.7** *Диференціальні інваріанти для афінних геометричних величин класу (1) і розмірності* 1 *мають два базисних інваріанти: нульового порядку, і другого порядку, а всі інші інваріанти породжуються базисними і їхніми похідними Трессе.*

Для геометричних афінних величин класу (2) опис алгебр диференціальних інваріантів виглядає таким чином.

**Теорема 1.8** *Алгебра афінних диференціальних інваріантів для геометричних величин класу (2) і розмірності, породжена диференціальними інваріантами нульового порядку, диференціальним інваріантом першого порядку і всіма похідними вздовж .*

Для одновимірних геометричних афінних величин класу (2) опис алгебр диференціальних інваріантів виглядає таким чином.

**Теорема 1.10** *Алгебра афінних диференціальних інваріантів для геометричних величин класу (2) і розмірності 1, породжена диференціальним інваріантом першого порядку і всіма інваріантними похідними, , де - інваріантне диференціювання.*

У завершенні цього розділу ми обговорюємо питання інтегрування звичайних диференціальних рівнянь, заснованих на використанні диференціальних інваріантів афінних геометричних величин.

**У другому розділі** дисертації вивчається стандартна проективна геометрія на прямій. Ця геометрія може бути отримана як геометрія, що задається наступною дією алгебри Лі. Надалі через ми позначаємо базис Шевалле в алгебрі Лі sl_2(R).

Проективними геометричними величинами є перетини однорідних sl_2(R) розшарувань. Такі розшарування локально мають вигляд:, де число називається розмірністю геометричної величини.

У дисертації дається локальна класифікація однорідних sl_2(R) розшарувань і приводяться нормальні форми підняттів sl_2(R)-дій у розшарування. Ця класифікація визначається розмірністю орбіт sl_2(R)-дії в розшаруванні геометричних величин, а саме справедливий наступний результат.

**Теорема 2.1** *Нехай у розшаруванні проективних геометричних величин орбіти* sl_2(R)*-дії мають максимальну розмірність. Тоді локальні координати, можна вибрати таким чином, щоб підняття* sl_2(R)*-дії мали вигляд:*

У випадку двовимірних sl_2(R)-орбіт нормальна форма sl_2(R) дії дається наступною теоремою.

**Теорема 2.2** *Нехай* sl_2(R)*-орбіти в розшаруванні проективних геометричних величин мають розмірність 2. Тоді локальні координати, можна вибрати таким чином, щоб підняття* sl_2(R)*-дії мали вигляд:*

Нормальні форми $sl_2(\mathbf{R})$ дії у випадку одномірних орбіт даються наступною теоремою.

**Теорема 2.3** *Нехай* sl_2(R)*-орбіти в розшаруванні проективних геометричних величин мають розмірність 1. Тоді локальні координати, можна вибрати таким чином, щоб підняття* sl_2(R)*-дії у розшаруванні мало такий вигляд:*

Структури алгебр проективних диференціальних інваріантів також залежать від розмірності sl_2(R)-орбіт. Для опису цієї алгебри у випадку орбіт максимальної розмірності й спрощення виду базисних диференціальних інваріантів ми замінимо координату v на. Тоді sl_2(R)-дія прийме вид:

При цьому структура алгебри диференціальних інваріантів дається наступною теоремою.

**Теорема 2.5** *Нехай розмірність регулярних* sl_2(R)*-орбіт у розшарування проективних геометричних величин максимальна. Тоді, залежно від розмірності геометричних величин, алгебра проективних диференціальних інваріантів породжена:*

1) *диференціальними інваріантами порядку і всіма похідними Трессе уздовж або.*
2) *диференціальними інваріантами, порядку і похідними Трессе уздовж, де.*

У цій теоремі ми позначили через наступні диференціальні інваріанти першого порядку: та інваріанти другого порядку: де канонічні координати в просторі 2-джетів проективних величин.

Для орбіт розмірності 2 sl_2(R)-дія має вигляд:

а алгебра проективних диференціальних інваріантів описується наступною теоремою.

**Теорема 2.6** *Нехай розмірність регулярних* sl_2(R)*-орбіт у розшаруванні проективних геометричних величин дорівнює 2. Тоді, залежно від розмірності m геометричних величин, алгебра проективних диференціальних інваріантів породжена:*

1) *- диференціальними інваріантами 2 і 3 порядків і всіма похідними Трессе,*

*2) - диференціальними інваріантами і всіма похідними Трессе.*
*3) - диференціальними інваріантами і всіма похідними Трессе уздовж.*

У цій теоремі ми позначили через наступні диференціальні інваріанти першого порядку: інваріант другого порядку: та інваріант третього порядку:.

У випадку орбіт розмірності 1, алгебра проективних диференціальних інваріантів описується наступною теоремою, де через u ми позначили функцію.

**Теорема 2.7** *Нехай розмірність* sl_2(R)*-орбіт у розшаруванні проективних геометричних величин дорівнює 1. Тоді, залежно від розмірності m геометричних величин, алгебра проективних диференціальних інваріантів породжена:*

1) *диференціальними інваріантами 0-го и 3-го порядку і всіма похідними Трессе уздовж.*
2) *диференціальними інваріантами 0-го и 1-го порядку і похідними Трессе уздовж .*

У цій теоремі ми позначили через наступні диференціальні інваріанти: і диференціальні інваріанти першого порядку:

**У третьому розділі** дисертації ми вивчаємо проективні структури на прямій та відповідаючі їм проективні геометричні величини. Проективну структуру на прямій звичайно визначають через атласи, функції переходу в які задаються дрібно-лінійними перетвореннями. Інакше проективна структура може бути визначена через ефективну й транзитивну дію алгебри Лі sl_2(R) на прямій. Цих два визначення, за теоремою Софуса Лі, еквівалентні. Тому на початку ми вивчаємо sl_2(R)-дії на прямій.

**Теорема 3.2** *1). Кожне нетривіальне подання алгебри Лі в алгебрі векторних полів на прямій задається (з точністю до інволюції) фундаментальною системою рішень рівняння Шредінгера і має вигляд де f i g - фундаментальна система рішень рівняння із Вронскианом, рівним одиниці, а A,B,H базис Шеваллє.*
*2).Образ g гомоморфізму складається із всіх векторних полів виду, де є рішення диференціального рівняння:*

Позначимо через реалізацію алгебри Лі sl_2(R), що задається цією теоремою, а через проективну структуру, що відповідає їй. Ця структура може бути визначена через карти. А саме, позначимо через карту на інтервалі U, де функція f відмінна від нуля, а координата t обрана в такий спосіб. Відповідно, через позначимо карту на інтервалі V, де функція g відмінна від нуля, а координата s обрана в такий спосіб. Можна перевірити, що в координатах t і s реалізація збігається зі стандартною й тим самим цей атлас задає проективну структуру на прямій. Група диффеоморфізмів прямої природно діє на множині всіх проективних структур. Дійсно, якщо диффеоморфізм прямої, а алгебра Лі векторних полів, ізоморфна sl_2(R), і визначальна тим самим проективну структуру, то алгебра Лі також ізоморфна і визначає нову проективну структуру.

Наступні теореми, що ґрунтуються на теорії Штурму про осцилляції рішень рівнянь другого порядку, дають умови, при яких проективні структури тривіальні, тобто еквівалентні стандартній.

**Теорема 3.6** *Якщо на замкнутому інтервалі, тоді проективна структура еквівалентна стандартній на відкритому інтервалі.*

**Теорема 3.7** *Якщо на замкнутому інтервалі, тоді проективна структура не еквівалентна стандартній на відкритому інтервалі.*

Відзначимо, що існують проективні структури, що, наприклад, відповідають потенціалу, не еквівалентні стандартній на будь-якому та якому завгодно малому інтервалі, де. Оскільки всі проективні структури, за теоремою Софуса Лі, локально еквівалентні стандартній, то результати попереднього розділу, що стосуються геометричних величин і їхніх диференціальних інваріантів, переносяться безпосередньо на випадок проективних структур. Так наприклад, підняття -дії описуються наступною теоремою.

**Теорема 3.8** *Якщо розмірність -орбіт максимальна, то підняття -дії в карті має вигляд: Якщо розмірність -орбіт дорівнює двом, то підняття -дії в карті має вигляд:*
*Якщо розмірність -орбіт дорівнює одиниці, тоді підняття -дії в карті має вигляд:.*

Проективні диференціальні інваріанти для піднятої дії алгебри Лі виходять із опису, наведеному у розділі 2 з наступними змінами: функції, що входять до опису базисних диференціальних інваріантів заміняються на функції картах або на функції у картах.

Так наприклад, для орбіт максимальної розмірності базисні диференціальні інваріанти в карті  мають вигляд. Інваріанти нульового порядку:

Інваріанти першого порядку:.

Інваріанти другого порядку:

Тут через  і  позначено повне диференціювання уздовж векторних полів A і B відповідно.

В останньому, **четвертому розділі** дисертації ми вивчаємо sl_2(R) геометрії на площині. Як і в попередніх розділах ми починаємо із класифікації ефективних і транзитивних дій алгебри Лі sl_2(R) на площині.

Якщо базис Шеваллє в алгебрі Лі, тоді функції  які беруть участь в розкладанні, за умови, що, визначають природну систему координат, у якій дія sl_2(R) виглядає в такий спосіб:

Цей результат (**Теорема 4.1** дисертації) повторює відому теорему Софуса Лі з тією відмінністю, що дає конструктивний спосіб приведення sl_2(R)-дії до канонічної форми. У дисертації ми приводимо також детальні описи імпримітивних sl_2(R)-дій (**Теорема 4.2**), заснованих на результатах розділу 2. Але в основному, у розділі 4 ми вивчаємо дію (1). Це пов'язано з тим, що (1) містить дві не еквівалентні дії, що відповідають двом класичним геометріям. Одна дія задана в області, де, а інша в області, де. Їх не еквівалентність виходить з того факту, що простір sl_2(R) інваріантних квадратичних диференціальних форм для дії (1) однорозмірно й породжено формою, яка в області де  визначає геометрію Лобачевського, а в області де  - геометрію де Сіттера.

Відзначимо також, що в обох випадках простір -інваріантних диференціальних 2-форм одновимірний й породжений формою.

Перетворення, де знак (+) береться в області, а знак (-) в області, де, переводить форму  у стандартну метрику  для геометрії Лобачевського й де Сіттера, а симплектичну форму   в.

У цих координатах дія (1) здобуває наступний вид:

де знак (-) береться у випадку геометрії Лобачевського, а знак (+) для геометрії де Сіттера. Однорідні розшарування й геометричні величини для геометрії Лобачевського й де Сіттера характеризуються, як і вище, розмірністю орбіт sl_2(R)-дії.

**Теорема 4.4** *У системі координат, де - перші інтеграли векторних полів, а и- перший інтеграл векторних полів  і, підняття* sl_2(R)*-дії (2) мають вигляд:*

*де - довільна гладка функція.*

Подальша класифікація заснована на приведенні сімейств одномірних векторних полів  до нормальних форм диффеоморфізмами виду:.

У дисертації розглянуті два випадки  і  у деякій області.

У першому випадку sl_2(R)-дія прийме вид (3), де. У другому випадку векторне поле може бути випрямлено й відповідна sl_2(R)-дія має вигляд (3), де.

Опис алгебри диференціальних інваріантів у геометрії Лобачевського й де Сіттера засновано на наступному результаті.

**Теорема 4.5** *Для* sl_2(R)*-дій (2) кожний диференціальний інваріант f породжує два* sl_2(R)*-інваріантні диференціювання:*

*При цьому обмеження диференціювань і на графік геометричної величини збігається відповідно із градієнтом (відносно) і гамільтоновим полем (відносно)  функції, що є обмеженням диференціального інваріанта f на геометричну величину s.*

Відзначимо, що відповідність між sl_2(R)-диференціальними інваріантами й sl_2(R)-інваріантними диференціюваннями дозволяє визначити sl_2(R)-інваріантні дужки між диференціальними інваріантами:

Відзначимо, що ці дужки дають диференціальний інваріант щоразу, коли f і g є диференціальними інваріантами.

**Теорема 4.6** *Алгебра* sl_2(R)*-диференціальних інваріантів для* sl_2(R)*-дій (2) є алгеброю Пуассона щодо дужки.*

В **Теоремах 4.7, 4.8, 4.9, 4.10** дисертації наведений детальний опис алгебр диференціальних інваріантів. Тут же ми приводимо характерний результат, що стосується тільки одномірних геометричних величин.

**Теорема 4.9** У відкритій і всюди щільній області просторів джетів алгебра sl_2(R)-диференціальних інваріантів для одновимірних геометричних величин породжена:

- У випадку, коли розмірність sl_2(R)-орбіт дорівнює $2$ диференціальним інваріантом нульового порядку і диференціальним інваріантом другого порядку, а також їхніми різноманітними дужками.

- У випадку, коли розмірність sl_2(R)-орбіт дорівнює $3$, диференціальними інваріантами першого порядку для геометрії Лобачевського, і для геометрії де Сіттера, а також диференціальним інваріантом другого порядку і їхніми всілякими дужками.

## Висновки

Дисертаційна робота присвячена дослідженню структур алгебр диференціальних інваріантів в класичних sl_2(R)-геометріх. Основними результатами, які визначають наукову новизну, є такі: класифікація дій алгебри Лі sl_2(R) на прямій і площині; локальна класифікація sl_2(R) однорідних розшарувань; знаходження базисних диференціальних інваріантів геометричних sl_2(R)-величин.

Результати дисертаційної роботи мають теоретичний і практичний характер. Вони можуть бути використані при дослідженні проективних структур на прямій, а також при розв'язанні класифікаційних задач у геометріях Лобачевського й де Сіттера,також можуть бути використані при дослідженні нелінійних диференціальних рівнянь, що володіють sl_2(R) симетріями, зокрема, для знаходження нових класів інтегрувальних у квадратурах нелінійних диференціальних рівнянь. Результати дисертаційної роботи дозволяють по-новому розглянути класичні одновимірні й двовимірні геометрії.

## Список опублікованих праць за темою дисертації


1. Коновенко Н.Г. О метрической эквивалентности функций, заданных на плоскости Лобачевского / Н.Г. Коновенко , В.В. Лычагин // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2009. – Т. 151, кн. 4. – С. 54-59.
2. Коновенко Н. Г. Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на проективній прямій / Н. Г. Коновенко // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6. – № 2. – С. 10-34.
3. Коновенко Н.Г. Аффинная геометрия прямой / Н. Г. Коновенко // Proceedings of the international geometry center. –2009. – Vol 2,No.2.–P.39-74.
4. Коновенко Н. Г. Дифференциальные инварианты нестандартных проективных структур / Н. Г. Коновенко , В. В. Лычагин // Доповіді НАН України. – 2008. – № 11. – С. 10-13.
5. Коновенко Н. Г. Алгебри диференціальних інваріантів геометричних величин на афінній прямій / Н. Г. Коновенко // Вісник Київського національного університету. Серія:фіз.-мат.науки. – 2008. – № 2. – С. 9-16.
6. Коновенко Н. Г. $sl_2$-геометрии на плоскости / Н. Г. Коновенко // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе -2009". Одесса. – 2009. – С. 51-52.
7. Коновенко Н. Г. Классификация многомерных геометрических величин для геометрий Лобачевского и де Ситтера / Н. Г. Коновенко // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Г.Ф.Лаптева. Тверь: Твер. гос.ун-т. – 2009. – С. 12-13.
8. Коновенко Н. Г. $sl_2$-геометрии / Н. Г. Коновенко // Тезисы докладов Украинского математического конгресса - 2009 (к 100-летию со дня рождения Н. Н. Боголюбова).
   URL: http://www.imath.kiev.ua/ congress2009/partUMC2009.html

9. Коновенко Н. Г. Изометрическая эквивалентность функций на плоскостях Лобачевского / Н. Г. Коновенко // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Астрахани - 2009". Астрахань. – 2009. – С. 17-18.
10. Коновенко Н. Г. Уравнения Шредингера и нестандартные проективные структуры / Н. Г. Коновенко // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Одессе -2008". Одесса. – 2008. – С. 83-87.
11. Коновенко Н. Г. Локальная классификация одномерных геометрических величин на проективной прямой / Н. Г. Коновенко // Тезисы докладов Международной конференции "Геометрия в Астрахани - 2008". Астрахань. – 2008. – С. 31-34.
12. Коновенко Н. Г. Алгебры дифференциальных инвариантов на проективной прямой / Н. Г. Коновенко // "Геометрия в Астрахани - 2007". Тезисы докладов 2-го Международного семинара "Симметрии: теоретический и методический аспекты". Астрахань. – 2007. – С. 33-35.

## Анотація

**Коновенко Надія Григорівна. Структури алгебр диференціальних інваріантів в класичних** sl_2 **- геометріях.** - Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико- математичних наук за спеціальністю 01.01.04 - геометрія та топологія. - Інститут математики НАН України , Київ, 2010.

Дисертація присвячена локальному дослідженню геометрій на одновимірних й двувимірних многовидах із структурною алгеброю Лі sl_2(R).

Для одновиміних sl_2(R) - геометрій встановлюється їх зв'язок із загальними проективними структурами на прямій і одновимірними рівняннями Шредінгера. Для цих геометрій приводиться повна класифікація проективних геометричних величин і описуються алгебри їх диференційних інваріантів. Ці результати використовуються для інтегрування у квадратурах рівнянь, що мають
- симетрії.

Для випадку двовимірних sl_2 - геометрій класифікуються локальні дії алгебри Лі sl_2(R) на площині і показується, що примітивним та транзитивним діям відповідають геометрії Лобачевського і де Сіттера. Для цих геометрій приведена класифікація геометричних величин і знайдені алгебри їх диференціальних інваріантів.

Показано, що алгебра диференціальних інваріантів має пуассонову структуру. Ця структура використовується для опису алгебр диференціальних інваріантів у геометріях Лобачевського й де Сіттера.

**Ключові слова:** Різноманіття джетів, проективні структури, геометрія Лобачевського, геометричні величини.

## Аннотация

**Коновенко Надежда Григорьевна. Стуктуры алгебр дифференциальных инвариантов в классических** sl_2 **- геометриях.** – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико- математических наук по специальности 01.01.04 - геометрия и топология. - Институт математики НАН Украины, Киев, 2010.

Диссертация посвящена локальному исследованию геометрий на одномерных и двумерных многообразиях со структурной алгеброй Ли sl_2(R).

Мы классифицируем как действия двумерной разрешимой алгебры Ли на прямой, так и поднятия этих действий в расслоении аффинных геометрических величин. Мы используем эту классификацию для нахождения базисных дифференциальных инвариантов аффинных геометрических величин и описания всей алгебры аффинных

дифференциальных инвариантов. Эти результаты позволяют указать широкие классы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые могут быть проинтегрированы в квадратурах.

Мы приводим детальное описание проективных геометрических величин, которые затем используем для нахождения базисных дифференциальных инвариантов. Для всех типов проективных геометрических величин вычислены алгебры дифференциальных инвариантов. Полученные результаты, применены к построению новых классов нелинейных дифференциальных уравнений, обладающих sl_2 - симметрией, интегрируемых в квадратурах.

Для случая двумерных sl_2(R) - геометрий классифицируются локальные действия алгебры Ли sl_2(R) на плоскости и показывается, что примитивным и транзитивным действиям отвечают геометрии Лобачевского и де Ситтера. Для обеих геометрий мы даем классификацию геометрических величин и находим базисные дифференциальные инварианты. Полное описание базисных дифференциальных инвариантов основано на построении двух инвариантных билинейных скобок. Одна из которых задает пуассонову структуру на алгебре дифференциальных инвариантов.

Показано, что алгебра дифференциальных инвариантов обладает пуассоновой структурой. Эта структура используется для описания алгебр дифференциальных инвариантов в геометриях Лобачевского и де Ситтера.

Результаты работы могут быть использованы как в дифференциальной геометрии, например в проблемах классификации различных геомтерических величин: тензоров, дифференциальных форм, дифференциальных операторов, а также в приложениях математической физики и дифференциальных уравнениях. Найденные классы дифференциальных уравнений, а также методы их интегрирования могут быть использованы в разнообразных приложениях.

**Ключевые слова:** Многообразия джетов, проективные структуры, геометрия Лобачевского, геометрические величины.

## Abstract

**Konovenko Nadia Grigorievna. Structures of differential invariants algebras for classical** sl_2**–geometries.** – A dissertation for the scientific degree of the candidate of physical and mathematical science by speciality 01.01.04 -geometry and topology. Institute of mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2010.

The dissertation is devoted to local investigation of geometries on one and two-dimensional manifolds equipped with sl_2(R)-action.

We classify actions of two-dimensional solvable Lie algebras on a line, and liftings of these actions to bundles of affine geometrical quantities. We use this classification to find basic differential invariants of affine geometrical quantities and todescribe the algebra of all affine differential invariants. These results allow us to find classes of the ordinary differential equations which can be integrated in quadratures.

We result the detailed description of projective geometrical sizes which then we use for a finding basic differential invariants. For all types of projective geometrical sizes algebras differential invariants are calculated. The received results are applied to construction of new classes of the nonlinear differential equations possessing
$sl_2$ -symmetry, integrated in quadratures.

For the case of two-dimensional sl_2-geometries we classify local sl_2(R)-actions on the and shown that to primitive and transitive actions correspond to the Lobachevsky's and de Sitter's geometry. We give a classification of geometrical quantities and find the basic differential invariants. The complete description of differential invariants is based on construction of two sl_2-invariant bilinear brackets. One of which produces a poisson structure

on the differential invariants algebra.This structure is used for the description of differential invariants algebras Lobachevsky's and de Sitter's geometry.

Results of the dissertation can be used in differential geometry for classification of various geometrical quantities such as tensors, differential forms, differential operators, and in applications to mathematical physics and differential equations

**Key words:** Manifolds of jets, projective structures, Lobachevski plane, geometrical quantities.

Підписано до друку «11.01.10»
Формат паперу $60 \times 84/16$
Обсяг 0,9 друкованих аркушів. Тираж 100 прим. Зам. №1/1 - 10
Одеська національна академія харчових технологій
65039, м. Одеса, вул. Канатна, 112

Надруковано у ТОВ «ІНВАЦ»
(Свідоцтво АОО №259183 від 20.03.2003р.)
65125, м. Одеса, вул.. Рішельєвська, 28
Тел./факс: (048) 724-34-70, 722-28-29