International scientific conference

«Algebraic and geometric methods of analysis»

Book of abstracts

May 31 - June 5, 2017
Odessa
Ukraine

http://imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/

List of topics

- Algebraic methods in geometry
- Differential geometry in the large
- Geometry and topology of differentiable manifolds
- General and algebraic topology
- Dynamical systems and their applications
- Geometric problems in mathematical analysis
- Geometric and topological methods in natural sciences
- History and methodology of teaching in mathematics

Organizers

- The Ministry of Education and Science of Ukraine
- Odesa National Academy of Food Technologies
- The Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine
- Taras Shevchenko National University of Kyiv
- The International Geometry Center

Program Committee

Chairman: Prishlyak A. (*Kyiv, Ukraine*)
Balan V. (*Bucharest, Romania*)
Banakh T. (*Lviv, Ukraine*)
Fedchenko Yu. (*Odesa, Ukraine*)
Fomenko A. (*Moscow, Russia*)
Fomenko V. (*Taganrog, Russia*)
Glushkov A. (*Odesa, Ukraine*)
Haddad M. (*Wadi al-Nasara, Syria*)
Herega A. (*Odesa, Ukraine*)
Khruslov E. (*Kharkiv, Ukraine*)
Kirichenko V. (*Moscow, Russia*)
Kirillov V. (*Odesa, Ukraine*)
Konovenko N. (*Odesa, Ukraine*)
Maksymenko S. (*Kyiv, Ukraine*)
Matsumoto K. (*Yamagata, Japan*)
Mashkov O. (*Kyiv, Ukraine*)
Mykytyuk I. (*Lviv, Ukraine*)
Milka A. (*Kharkiv, Ukraine*)
Mikesh J. (*Olomouc, Czech Republic*)
Mormul P. (*Warsaw, Poland*)
Moskaliuk S. (*Wien, Austri*)
Panzhenskiy V. (*Penza, Russia*)
Pastur L. (*Kharkiv, Ukraine*)
Plachta L. (*Krakov, Poland*)
Pokas S. (*Odesa, Ukraine*)
Polulyakh E. (*Kyiv, Ukraine*)
Rahula M. (*Tartu, Estonia*)
Sabitov I. (*Moscow, Russia*)
Savchenko A. (*Kherson, Ukraine*)
Sergeeva A. (*Odesa, Ukraine*)
Strikha M. (*Kyiv, Ukraine*)
Shvets V. (*Odesa, Ukraine*)
Shelekhov A. (*Tver, Russia*)
Shurygin V. (*Kazan, Russia*)
Vlasenko I. (*Kyiv, Ukraine*)
Zadorozhnyj V. (*Odesa, Ukraine*)
Zarichnyi M. (*Lviv, Ukraine*)
Zelinskiy Y. (*Kyiv, Ukraine*)

Administrative committee

- Egorov B., chairman, rector of the ONAFT;
- Povarova N., deputy chairman, Pro-rector for scientific work of the ONAFT;
- Mardar M., Pro-rector for scientific-pedagogical work and international communications of the ONAFT;
- Fedosov S., Director of the International Cooperation Center of the ONAFT;
- Volkov V., Director of the Educational Research Institute of Mechanics, Automation and Computer Systems named after P. M. Platonov;
- Bukaros A., Dean of the Faculty of automation, mechatronics and robotics

Organizing commitee

Kirillov V.	Hladysh B.	Maksymenko S.
Konovenko N.	Nuzhnaya N.	Khudenko N.
Fedchenko Yu.	Osadchuk E.	Cherevko E.

К вопросу о конформных отображениях римановых пространств на Риччи симметрические римановы пространства

В. Е. Березовский
(Уманьский национальный университет садоводства, ул.Институтская, д. 1, г.Умань, Черкасская обл., 20305, Украина)
E-mail: berez.volod@rambler.ru

Й. Микеш
(университет им.Палацкого, ул. 17 Листопада, д. 12, г. Оломоуц, 77147, Чешская республика)
E-mail: josef.mikes@upol.cz

И. Гинтерлейтнер
(Brno University of Technology, Brno, Czech Republic)
E-mail: Hinterleitner.I@fce.vutbr.cz

Конформные отображения римановых пространств рассматривались во многих работах. Примечательно, что эти отображения имеют приложения в общей теории относительности.

Напомним основные понятия теории конформных отображений, изложенные в [1,2,3].

Рассмотрим отображение f риманова пространства V_n с метрическим тензором $g_{ij}(x)$ на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}(x)$.

Отображение $f\colon V_n \to \bar{V}_n$ называют *конформным*, если в общей по отображению системе координат $x = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$ между метрическими тензорами $g_{ij}(x)$ и $\bar{g}_{ij}(x)$ пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеет место зависимость

$$\bar{g}_{ij}(x) = e^{2\psi(x)} \cdot g_{ij}(x), \tag{1}$$

где $\psi(x)$ — некоторый инвариант.

Из (1) следует, что при конформных отображениях углы между касательными векторами сохраняются, а длины соответствующих векторов пропорциональны, причем коэффициент пропорциональности зависит только от точки. Этими геометрическими свойствами конформные отображения одного риманова пространства V_n на другое риманово пространство $\bar{V}_n$ характеризуются полностью.

Из (1) следует, что между символами Кристоффеля второго рода пространств V_n и $\bar{V}_n$ имеется зависимость

$$\bar{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_i(x)\,\delta^h_j + \psi_j(x)\,\delta^h_i - \psi^h(x)\,g_{ij}(x),$$

где $\psi_i(x) = \partial\psi/\partial x^i$, $\psi^h = g^{h\alpha}\psi_\alpha$, g^{ij} — компоненты обратной матрицы к матрице $\|g_{ij}\|$, δ^h_i — символы Кронекера.

Вопрос о том, допускает или не допускает риманово пространство V_n $(n > 2)$ конформное отображение на некоторое пространство Эйнштейна $\bar{V}_n$ был сведен Г. Бринкманом [4] к проблеме существования решения некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений типа Коши относительно $(n+1)$ неизвестных функций.

Основные уравнения указанных отображений сведены к линейной системе дифференциальных уравнений в ковариантных производных типа Коши, при помощи которой удалось оценить степень мобильности римановых пространств относительно конформных отображений на пространства Эйнштейна (см. [5,6]).

Напомним, что пространство аффинной связности называют *Риччи симметрическим*, если тензор Риччи в нем абсолютно параллелен.

Рассмотрим конформное отображения римановых пространств V_n на Риччи-симметрические римановы пространства $\bar{V}_n$, которые характеризуются условиями на тензор Риччи

$$\bar{R}_{ij|k} = 0$$

где “$|$” — ковариантное дифференцирование в $\bar{V}_n$.

Нами доказана

Теорема. *Для того, чтобы риманово пространство* V_n *допускало конформное отображение на Риччи-симметрическое пространство* $\bar{V}_n$*, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовало решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных относительно функций* $\psi_i(x)$*,* $\mu(x)$ *и* $\bar{R}_{ij}(x)$ $(=\bar{R}_{ji}(x))$:

$$
\begin{aligned}
\psi_{i,j} &= \psi_i\psi_j - \frac{\mu}{n-2}\cdot g_{ij} + \frac{1}{n-2}\,(\bar{R}_{ij} - R_{ij}),\\
\mu_{,j} &= g^{\alpha\beta}\,\Big((n-2)\,R^{\gamma}_{\beta j\alpha}\psi_\gamma + (n-1)\,\psi_\alpha\bar{R}_{\beta j} - R_{\alpha j}\psi_\beta\Big) +\\
&\quad (n-1+g^{\alpha\beta}\,R_{\alpha\beta})\,\psi_j,\\
\bar{R}_{ij,k} &= \psi_i\bar{R}_{jk} + \psi_j\bar{R}_{ik} + 2\,\psi_k\bar{R}_{ij} - g^{\alpha\beta}\,\psi_\beta\,(g_{ik}\bar{R}_{\alpha j} + g_{jk}\bar{R}_{\alpha i}).
\end{aligned}
$$

Очевидно, общее решение замкнутой смешанной системы уравнений типа Коши в ковариантных производных зависит не более чем от $1/2\,(n+2)\,(n+1)$ существенных параметров.

Литература

[1] Л. П. Эйзенхарт, *Риманова геометрия.* Ин. лит., М. (1948).

[2] Н. С. Синюков, *Геодезические отображения римановых пространств.* Наука, М. (2008), 256с.

[3] J. Mikeš et al, *Differential geometry of special mappings.* Palacky Univ. Press, Olomouc (2015), 569p.

[4] H. W. Brinkmann, *Einstein spaces which mapped conformally on each other.* Math. Ann., 1925, № 94, 117–145.

[5] Й. Микеш, М. Л. Гаврильченко, Е. И. Гладышева, *О конформных отображениях на пространства Эйнштейна.* Вестник Моск. ун-та, 1994, № 3, 13–17.

[6] Л. Е. Евтушик, И. Гинтерлеитнер, Н. И. Гусева, Й. Микеш, *Конформные отображения на пространства Эйнштейна.* Изв. вузов. Матем., 2016, № 10, 8–13.