International scientific conference

«Algebraic and geometric methods of analysis»

Book of abstracts

May 30 - June 4, 2018,
Odesa,
Ukraine

https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2018

Об изотопности некоторых функций

Бондарь О. П.
(ЛА НАУ, Кропивницкий)
E-mail: bondarkla@ukr.net

В.В.Шарко, [1], определил и использовал для изучения свойств многообразий изотопные функции Морса — функции, соединяемые гладким путем в пространстве функций Морса. Обобщением их есть изотопные функции, определенные, [2], так:

Определение 1. Функции f_0 и f_1 на многообразии M называются изотопными (C^r-изотопными или непрерывно изотопными или изотопными функциями Морса), если существуют такая неподвижная на X изотопия $H : (M, X) \times I \to (M, X) \times I$ и изотопия $h : [0,1] \times I \to [0,1] \times I$, $H_t \in Iso_0(M, X)$ и $h_t \in Iso_0^+([0,1])$, что для всех $t \in [0,1]$ $f_t = h_t \circ f_0 \circ H_t^{-1}$ - функции одинакового вида (C^r-гладкие или непрерывные или функции Морса).

В [3] была показана изотопность функций леммы Морса. Следующие два утверждения, важные для классификации отображений многообразий, несложно получить непосредственно из теории Морса.

Предложение 2. *Пусть $f_0 : R^n \to R$ - гладкая функция в окрестности U_0 регулярной точки $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n)$ этой функции и $(\partial f_0/\partial x^i)(x_0) \neq 0$, $i = 1, \dots, n$.*

Тогда можно указать координатную форму изотопии $H : U_0 \times [0,1] \to U_1 \times [0,1]$ окрестности U_0 точки x_0 на некоторую окрестность U_1 начала координат пространства R^n, такую, что дифференцируемые отображения $H_t \subset Iso_0(U_1), H_0 = id_{U_1}, t \in [0,1]$, и для всех точек $y = (y^1, \dots, y^n) \in U_1$, для которых $y^i(x_0) = 0, i = 1, \dots, n$, функция

$$f_1 = s^1 y_1^1 + \ldots + s^n y_1^n, \text{ где}$$

$s^i = sign((\partial f_0/\partial x^i)(0)), i = 1, \dots, n$, будет правоизотопной функции $f_0 : f_1 = f_0 \circ H_1^{-1}$, то есть существует такое локальное изотопное преобразование системы координат, что функция f_0 будет дифференцируемо изотопна функции f_1.

Предложение 3. *Пусть $f_0 : R \to R$ — гладкая функция в окрестности U_0 нуля, для которой функция и ее производные $f_0(0) = f_0'(0) = \cdots = f_0^{(k-1)}(0) = 0$, но $f_0^{(k)}(0) \neq 0$.*

Тогда можно указать координатную форму изотопии $H : U_0 \times [0,1] \to U_1 \times [0,1]$, окрестности U_0 нуля на, возможно, меньшую его окрестность U_1 такую, что дифференцируемые отображения $H_t \subset Iso_0^+(U_1), H_0 = id_{U_1}, t \in [0,1]$, и для всех точек $y \in U_1$, для которых $y(0) = 0$, функция

$$f_1 = sign f_0^{(k)}(0) y^k$$

будет правоизотопной функции f_0.

Литература

[1] В. В. Шарко. Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). — Киев: Наук. думка, 1990.

[2] О.П.Бондарь. Об определении изотопных функций//Тези доповідей міжнародної конференції "Геометрія в Одесі-2015 С.67.

[3] О.П.Бондар. Про ізотопність функцій леми Морса //Algebraic and geometric methods of analysis, Odessa, 2017. $https://www.imath.kiev.ua/~topology/conf/agma2017/agma2017_abstracts.pdf P.4.$