Міністерство освіти і науки України
Одеська національна академія харчових технологій
Інститут математики НАН України
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский государственный педагогический университет
Тверской государственный университет
Одеський національный університет ім. І. І. Мечникова
Одеський державний екологічний університет
Міжнародний геометричний центр (Одеса)
Фонд "Наука"(Одеса)

Тези доповідей міжнародної конференції

ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2014

Одеса, 26 травня - 31 травня 2014 р.

Тезисы докладов международной конференции

ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2014

Одесса, 26 мая - 31 мая 2014 г.

Abstracts of the International Conference

GEOMETRY IN ODESSA - 2014

Odessa, the 26th of May- the 31th of May 2014

ОДЕСА - 2014

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тези доповідей міжнародної конференції
ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2014

Тези містять результати досліджень учасників Міжнародної конференції в галузі геометрії, топології та застосувань. Видання спрямоване на наукових співробітників, викладачів, аспірантів, студентів.

ISBN 978-966-389-171-2

Міжнародний науковий комітет:
Шарко В. (Україна) - голова, Алексєєвський Д. (Чехія), Банах Т. (Україна), Гандель Ю. (Україна), Глушков О. (Україна), Зарічний М. (Україна), Кириченко В. (Росія), Кирилов В. (Україна), Кіосак В. (Україна), Коновенко Н. (Україна), Красильщик Й. (Росія), Кузаконь В. (Україна), Марченко В. (Україна), Матсумото К. (Японія), Машков О. (Україна), Микитюк І. (Україна), Мілка А. (Україна), Мікеш Й. (Чехія), Паньженський В. (Росія), Пастур Л. (Україна), Пришляк О. (Україна), Покась С. (Україна), Рахула М. (Естонія), Роджер С. (Франція), Рубцов В. (Франція), Сабітов І. (Росія), Савченко О. (Україна), Стріха М. (Україна), Федченко Ю. (Україна), Фоменко А. (Росія), Фоменко В. (Росія), Хруслов Є. (Україна), Шелехов О. (Росія), Шуригін В. (Росія).

Організаційно-адміністративний комітет:
Єгоров Б. - голова оргкомітету, ректор ОНАХТ,
Капрельянц Л. - заст. голови, проректор з наукової роботи і міжнародних зв'язків ОНАХТ,
Федосов С. - начальник відділу міжнародних зв'язків ОНАХТ,
Волков В. - директор ННІМАтаКС ім. П.М. Платонова,
Сергєєва О. - завідувач кафедри фізики та матеріалознавства.

Організаційний комітет:
Кузаконь В. - голова оргкомітету, президент БФ "Наука" (kuzakon_v@ukr.net);
Коновенко Н. - заступник голови оргкомітету (konovenko@ukr.net);
Федченко Ю. - заступник голови оргкомітету (fedchenko_julia@ukr.net);
Мойсєєнок О. - WEB-адміністратор (geom-odessa@ukr.net);
Арова З., Башкарьов П., Задорожний В., Кіосак В., Кузаконь Г.,Малаксіано Т., Маліна А., Мельник Л., Носенко Л., Нужна Н., Осадчук Є., Прокіп В., Худенко Н., Чепурна О., Черевко Є., Шпота Л.

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тезисы докладов международной конференции
ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2014

Тезисы содержат результаты исследований участников Международной конференции в области геометрии, топологии и приложений. Издание адресовано научным работникам, преподавателям, аспирантам, студентам.

ISBN 978-966-389-171-2

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Abstracts of the International Conference
GEOMETRY IN ODESSA - 2014

Abstracts contain the results of researching of participants of the International Conference on geometry, topology and applications. The publication is addressed to researchers, lectures, post-graduate students.

ISBN 978-966-389-171-2

International Scientific Committee:
Sharko V. (Ukraine) - Chairman, Alekseevskii D. (Czech Republic), Banah T. (Ukraine), Gandel Yu. (Ukraine), Glushkov A. (Ukraine), Zarichnyi M. (Ukraine), Kirichenko V. (Russia), Kirillov V. (Ukraine), Kiosak V. (Ukraine), Konovenko N. (Ukraine), Krasilshchik J. (Russia), Kuzakon V. (Ukraine), Marchenko V. (Ukraine), Matsumoto K. (Japan), Mashkov O. (Ukraine), Mikityuk I. (Ukraine), Milka A. (Ukraine), Mikes J. (Czech Republic), Panzhenskiy V. (Russia), Pastur L. (Ukraine), Prishlyak A. (Ukraine), Pokas' S. (Ukraine), Rahula M. (Estonia), Roger S. (France), Rubtsov V. (France), Sabitov I. (Russia), Savchenko A. (Ukraine), Strikha M. (Ukraine), Fedchenko Yu. (Ukraine), Fomenko A. (Russia), Fomenko V. (Russia), Khruslov E. (Ukraine), Shelekhov (Russia), Shurygin V. (Russia).

Organizing-Administrative Committee:
B. Egorov - chairman, rector ONAFT,
L. Kaprel'ants - deputy chairman, vice-rector of scientific research and international relations,
S. Fedosov - head of the international department ONAFT,
Volkov V. - Director P.M. Platonova ESIMACS,
A. Sergeeva - head of the chair of physics.

Organizing Committe:
Kuzakon V. - Chairman of the Organizing Committee, President of the Charity Fund «Science» (kuzakon_v@ukr.net);
Konovenko N. - deputy chaiman (konovenko@ukr.net);
Fedchenko Yu. - deputy chairman (fedchenko_julia@ukr.net);
Moiseenok A. - WEB-administrator (geom-odessa@ukr.net);
Arova Z., Bashkaryov P., Zadorozhnyi V., Kiosak V., Kuzakon G., Malaksiano T., Malina A., Melnik L., Nosenko L., Osadchuk E., Prokip V., Khudenko N., Chepurnaya E., Cherevko E., Shpota L.

ISBN 978-966-389-171-2

Ареальні нескінченно малі деформації поверхні дотичних

Безкоровайна Л.Л., Голопьорова О.С.

(ОНУ ім. І.І. Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: `mazur_elena@mail.ru`

Досліджуються ареальні нескінченно малі деформації поверхні дотичних:

$$\bar r(s,v) = \bar\rho(s) + v\bar t(s). \tag{1}$$

Частинні похідні вектора зміщення $\bar U$ представимо у вигляді:

$$\bar U_i = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\bar r_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \bar n. \tag{2}$$

Основна система рівнянь ареальної нескінченно малої деформації для поверхні дотичних у роботі представлена у наступному вигляді:

$$\begin{cases} T^{11} = \dfrac{T^\alpha_{,\alpha}}{vk\text{æ}}, \\ \dfrac{\partial T^{12}}{\partial v} + 3T^{12}\dfrac{1}{v} = -\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{T^\alpha_{,\alpha}}{vk\text{æ}}\right) - \dfrac{2v\dot k + k}{v^2k^2\text{æ}}T^\alpha_{,\alpha} - \dfrac{\text{æ}}{vk}T^1, \\ \dfrac{\partial T^{22}}{\partial v} + T^{22}\dfrac{1}{v} = -\dfrac{\partial T^{12}}{\partial s} - \dfrac{v\dot k - 2k}{vk}T^{12} + \dfrac{v\dot k + v^2k^3 + k}{v^2k^2\text{æ}}T^\alpha_{,\alpha} + \dfrac{\text{æ}}{vk}T^1, \end{cases} \tag{3}$$

де k і æ – кривина та скрут кривої $\bar\rho = \bar\rho(s)$.

Знайдено розв'язок системи рівнянь (3):

$$\begin{cases} T^{11} = \dfrac{T^\alpha_{,\alpha}}{vk\text{æ}}, \\ T^{12} = \dfrac{c_1}{v^3} + \dfrac{1}{v^3}\displaystyle\int\left(-v^3\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{T^\alpha_{,\alpha}}{vk\text{æ}}\right) - \dfrac{v(2v\dot k + k)}{k^2\text{æ}}T^\alpha_{,\alpha} - \dfrac{v^2\text{æ}}{k}T^1\right)dv, \\ T^{22} = \dfrac{c_2}{v} + \dfrac{1}{v}\displaystyle\int\left(-v\dfrac{\partial T^{12}}{\partial s} - \dfrac{v\dot k - 2k}{k}T^{12} + \dfrac{v\dot k + v^2k^3 + k}{v^2k^2\text{æ}}T^\alpha_{,\alpha} + \dfrac{\text{æ}}{k}T^1\right)dv. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *При умові $\delta\bar n = 0$ поверхня дотичних допускає нетривіальну ареальну нескінченно малу деформацію з вектором зміщення $\bar U(s,v)$ та компонентами тензорів A-деформації:*

$$\begin{cases} T^{11} = 0, \quad T^{12} = \dfrac{c_1}{v^3}, \\ T^{22} = \dfrac{c_2}{v} + \dfrac{c_1\dot k}{kv^2} + \dfrac{c_1}{v^3}, \quad T^\alpha = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 2. *При умові $\delta\bar n = 0$ поверхня дотичних допускає нетривіальні нескінченно малі згинання з вектором обертання $\bar U(s,v)$ та полями згинання $T^{\alpha\beta}$, T^α у вигляді (5).*

Квазіареальна нескінченно мала деформація поверхні в E_3 : основні рівняння

Л. Л. Безкоровайна
Ю. С. Хомич

(Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: mazur_elena@mail.ru, yli4ka_h@mail.ru

Нехай $S-$ поверхня класу C^3, задана у тривимірному евклідовому просторі. Будемо розглядати її нескінченно малу деформацію першого порядку:

$$\overline{r^*}(x^1, x^2, t) = \overline{r}(x^1, x^2) + t\overline{U}(x^1, x^2). \tag{1}$$

Нескінченно малу деформацію вигляду (1) будемо називати квазіареальною нескінченно малою деформацією, якщо при такій деформації елемент площі поверхні змінюється за заданим законом [1].

Теорема 1. *Для того, щоб нескінченно мала деформація була квазіареальною, необхідно і достатньо, щоб при такій деформації виконувалась умова*

$$\varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\varphi,$$

де $2\varepsilon_{\alpha\beta} \equiv \delta g_{\alpha\beta}-$ *перший тензор деформації, а* $\varphi(x^1, x^2)-$ *деяка заздалегідь задана функція класу* C^2.

Очевидно, при $\varphi = 0$ квазіареальна нескінченно мала деформація представляє собою деформацію зі стаціонарним елементом площі, тобто ареальну.

Покладемо

$$\overline{U_i} = C_{i\beta} \widehat{T}^{\beta\alpha} \overline{r_\alpha} + C_{i\alpha} T^\alpha \overline{n}, \tag{2}$$

де $\widehat{T}^{\beta\alpha} \in C^2-$ деякий тензор типу $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, а $T^\alpha \in C^2-$контраваріантний вектор. Розкладемо тензор $\widehat{T}^{\beta\alpha}$ на симетричну і кососиметричну частини у вигляді

$$\widehat{T}^{\beta\alpha} = T^{\beta\alpha} + \mu C^{\beta\alpha},$$

де $\mu = \mu(x^1, x^2)$, а $C^{\beta\alpha}-$ дискримінантний тензор типу $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В роботі отримано зв'язок між функціями φ та μ: $\varphi(x^1, x^2) = -\mu(x^1, x^2)$.

Знайдені умови інтегровності системи диференціальних рівнянь (2) та доведена

Теорема 2. *Для існування квазіареальної нескінченно малої деформації однозв'язної поверхні класу* C^3 *необхідно і достатньо, щоб система рівнянь*

$$\begin{cases} T^{\beta\alpha}_{,\beta} - T^\beta b^\alpha_\beta = \varphi_\beta C^{\beta\alpha}, \\ T^{\beta\alpha} b_{\alpha\beta} + T^\beta_\beta = 0, \\ \varepsilon_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 2\varphi(x^1, x^2) \end{cases}$$

мала ненульовий розв'язок.

Досліджується квазіареальна деформація при деяких обмеженнях. Установлено також, що квазіареальні нескінченно малі деформації знаходять застосування в безмоментній теорії навантажених оболонок.

Список літератури

[1] М. Л. Гаврильченко, Л. Л. Безкоровайная, Г. Я. Заяц *Бесконечно малые деформации поверхностей, соответствующие безмоментному напряженному состоянию равновесия оболочек.*,- Научная конференция, посвященная 100-летию университета, мех.-мат. фак., Тезисы докладов, Одесса, 1965, С. 67-68.

Деформація векторних полів на поверхнях

І. М. Іванюк, А. О. Гагай

(КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: `ivong07@yandex.ru`

Нами досліджуються топологічні властивості сім'ї векторних полів на поверхні. Поле на поверхні у загальному випадку є полем Морса-Смейла. Для задання цього поля використовуються атоми за Фоменком. Вони повністю описують їх топологічну структуру.

Через клас T_i позначимо всі векторні поля, у яких не більше ніж "i" сідлових точок. Побудовано граф, що складається з вершин і ребер, вершини відповідають атомам за Фоменком, а ребра - деформаціям. Кожній деформації векторного поля відповідає шлях на графі.

Теорема 1. *Якщо дві сім'ї топологічно еквівалентні в класі T_i, то вони задають однакові шляхи на графі. Навпаки, два поля класу T_i можна з'єднати шляхом (сім'єю векторних полів) в класі T_i, якщо існує шлях на графі, який з'єднує відповідні вершини.*

Теорема 2. *Якщо двом сім'ям відповідають однакові оснащені шляхи на графі, то вони топологічно еквівалентні.*

Список літератури

[1] Болсинов А.В., Фоменко А.Т. Интегрируемые гамильтоновые системы. Геометрия, топология, классификация. – Ижевск: Изд. Дом "Удмуртский университет". – Т.1. – 1999. – с.69-145.

[2] В.И.Арнольд, В.С.Афраймович, Л.С.Ильяшенко. Теория бифуркаций – 217с.

Атоми складності 2 m-функцій та їх деформації

О. М. Іванюк, О. О. Пришляк

(КНУ ім. Тараса Шевченка, Київ, Україна)

E-mail address: `Oxana801@yandex.ru, prishlyak@yahoo.com`

Нехай M - замкнений орієнтований двовимірний многовид (поверхня), f - гладка функція на M. Для многовидів з краєм аналогом функцій Морса є m-функції. Це такі функції, в яких всі критичні точки є невиродженими і не лежать на краю, а також такі, що обмеження функції на край є функцією Морса. Під атомом будемо розуміти регулярний окіл компоненти критичного рівня функції, розшарований на лінії рівня. Тут критичним рівнем є рівень функції, що містить її критичну точку або критичну точку обмеження функції на край. Складність атому – це число критичних точок у ньому. Простий атом має складність 1.

Теорема 1. (Про локальну класифікацію) *Кожен атом складності 2 m-функції на поверхні з краєм є одним з дев'ятнадцяти атомів, або одним з тридцяти двох f-атомів (B_1-B_{32}).*

Кожний атом складності 2 розпадається при малому русі в однопараметричній сім'ї m-функцій на два простих атоми двома способами.

Теорема 2. *Всі можливі деформації атомів складності 2 до простих атомів задано в таблиці:*

B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	B_9	B_{10}	B_{11}	B_{12}	B_{13}	B_{14}	B_{15}	B_{16}	B_{17}
A_1	A_7	A_3	A_6	A_8	A_5	A_3	A_9	A_5	A_8	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_4	A_5
A_6	A_2	A_7	A_4	A_5	A_9	A_8	A_4	A_9	A_5	A_1	A_2	A_3	A_4	A_3	A_5	A_7
A_6	A_4	A_7	A_2	A_3	A_7	A_8	A_4	A_9	A_5	A_1	A_2	A_3	A_2	A_5	A_3	A_9
A_3	A_7	A_1	A_6	A_6	A_4	A_3	A_9	A_5	A_8	A_1	A_2	A_1	A_4	A_4	A_5	A_3

B_{18}	B_{19}	B_{20}	B_{21}	B_{22}	B_{23}	B_{24}	B_{25}	B_{26}	B_{27}	B_{28}	B_{29}	B_{30}	B_{31}	B_{32}
A_6	A_3	A_8	A_5	A_1	A_4	A_3	A_1	A_3	A_9	A_6	A_8	A_5	A_9	A_8
A_5	A_9	A_4	A_5	A_2	A_4	A_2	A_3	A_3	A_7	A_8	A_9	A_5	A_9	A_8
A_4	A_9	A_4	A_5	A_2	A_4	A_4	A_3	A_5	A_9	A_6	A_7	A_9	A_9	A_8
A_8	A_3	A_8	A_5	A_1	A_4	A_3	A_4	A_5	A_7	A_8	A_6	A_8	A_9	A_8

Список літератури

[1] Пришляк О.О., Пришляк К.О., Міщенко К.І., Лукова Н.В. Класифікація простих m-функцій на орієнтованих поверхнях: Журнал обчисл. та прикл. матем. – 2011. – №1 (104). – с.1-12.

[2] Іванюк О.М., Пришляк О.О. Атоми степені 2 на поверхнях з краєм: Proceedings of the international geometry center. – 2013. – №3.

Квантування другого методу Ляпунова (неавтономній випадок)

Ю. В. Іоніна(Ю.В.Шарко)

(Інститут математики НАН України, Київ)

E-mail address: `sun-set@ukr.net`

Розглянемо систему диференціальних рівнянь $dx(t)/dt = f(t, x(t))$. Нульовий розв"язок $x(t) = 0$ називається стійким за Ляуновим, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$, таке що якщо $\| x_0 \| < \delta(\varepsilon)$, то розв"язок системи з початковою умовою $x(0) = x^0$ існує при всіх $t \geq 0$ і задовільняє нерівність $\| x(t) \| < \varepsilon$.

Якщо, крім того $x(t) \to 0$, коли $t \to \infty$, то розв"язок $x(0) = 0$ називається асимптотично стійким за Ляпуновим.

Означення 1. *Для кожного ε такого, що $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$, назвемо ε-трубкою в області U відкриту множину $T_\varepsilon = [x, t : \| x \| < \varepsilon]$. Многовид $\partial T_\varepsilon = [x, t : \| x \| = \varepsilon]$ будемо називати межею ε-трубки. Позначимо через $L = [x, t : \| x \| = 0, t \geq -\delta_0]$ множину в області U, яку будемо називати променем.*

Означення 2. *Нехай M^n- гладкий n-вимірний многовид і $N_1^{n-1}, N_2^{n-2}, ..., N_{n-2}^1, N_{n-1}^0$- гладкі підмноговиди в M^n. Припустимо, що $\varphi : M^n \to U$ - вкладення, яке є гладким на $M^n \setminus \cup_i(N_i^{n-i})$ і обмеження φ на підмноговиди $\cup_i(N_i^{n-i})$ - теж гладке відображення. Кусково гладкою гіперповерхнею в області U називається $H^n = \phi(M^n)$. Підмножина $\Sigma = \varphi(\setminus \cup_i (N_i^{n-i}) \subset H^n$ називається сингулярною підмножиною кусково гладкої гіперповерхні H^n.*

Означення 3. *Нехай H^n - зв"язна некомпактна кусково гладкою гіперповерхня в області U. Скажемо,що H^n обмежує промінь L, якщо H^n є межею некомпактного $n+1$-вимірного многовиду K^{n+1}, до якого належить промінь L, і K^{n+1} лежить в деякій ε-трубці.*

Нехай H_p^n- кусково гладкі гіперповерхні $p = 1, 2, ...,$ які належать U і обмежують промінь L. Скажемо, що H_p^n є збіжною послідовністю гіперповерхонь, якщо H_p^n не перетинаються і для некомпакних $(n+1)$-вимірних многовидів K_p^{n+1} з межами H_p^n виконуються умови: $\bigcap K_p^{n+1} = L$ та $K_p^{n+1} \supset K_q^{n+1}$ для $p < q$.

Задамо на доповненні до сингулярної множини Σ_p кусково-гладкої гіперповерхні H_p^n, яка обмежує промінь L, одиничне нормальне векторне поле $\overrightarrow{N_p(t,x)}$, направлене у внутрішність многовиду K_p^{n+1}. Розглянемо на H_p^n неперервну функцію $\chi_p : H_p^n \to [0, 1]$,яка є гладкою на $H_p^n \setminus \Sigma$ і такою $\chi_p^{-1}(0) = \Sigma_p$. Побудуємо на H_p^n гладке векторне поле $\overrightarrow{N}_p^{\chi_p}(t, x) = \chi_p(\overrightarrow{N_p(t,x)})$.

Теорема 1. *Нехай в в області U задана система рівнянь $dx(t)/dt = f(t, x(t))$. Припустимо, що в U існує збіжна послідовність кусково гладких поверхонь H_p^n. Якщо в майже всіх точках $x \in H_p^n (p = 1, 2, ...)$ значення функції*

$$S(t, x) = < \overrightarrow{N}_p^{\chi_p}(t, x), \overrightarrow{f}(t, x) >$$

невід"ємні, то нульовий розв"язок цієї системи є стійким за Ляпуновим. (Ми позначили $\overrightarrow{f}(t, x) = (1, f_1(t, x), f_2(t, x), ..., f_n(t, x))$.

Теорема 2. *Нехай в в області U задана система рівнянь $dx(t)/dt = f(t, x(t))$. Припустимо, що в U існує збіжна послідовність кусково гладких поверхонь H_p^n. Якщо в майже всіх точках $x \in H_p^n (p = 1, 2, ...)$ значення функції*

$$S(t, x) = < \overrightarrow{N}_p^{\chi_p}(t, x), \overrightarrow{f}(t, x) >$$

невід"ємні, і промінь L є единою інваріантною множиною для системи $dx(t)/dt = f(t, x(t))$, то нульовий розв"язок цієї системи є асимптотично стійким за Ляпуновим.

Про точне число топологічно-нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері

О. А. Кадубовський

(ДДПУ, Слов'янськ, Україна)

E-mail address: kadubovs@ukr.net

Нехай $C_{k,m}(S^2)$ — клас гладких функцій з трьома критичними значеннями на двовимірній сфері S^2, у яких окрім k локальних максимумів і m локальних мінімумів лише одна (вироджена) критична точка x_0 типу сідла [1]. Тоді, як відомо, $\forall f \in C_{k,m}(S^2)$ індекс Пуанкаре точки x_0 дорівнює $\mathrm{ind}^f(x_0) = 1 - n$, де $n = k + m - 1$ [1], [2].

Функції f і g з класу $C_{k,m}(S^2)$ називають *топологічно еквівалентними*, якщо існують гомеоморфізми $h: \ S^2 \to S^2$ і $l: \ R^1 \to R^1$ (l зберігає орієнтацію), такі що $g = l \cdot f \cdot h^{-1}$. Якщо h зберігає орієнтацію, функції f і g будемо називати $O-$топологічно еквівалентними.

Для початкових $k = 1, 2, 3, 4$ і $\forall m \in N$ а також для випадку, коли $k+m-1$ є простим числом, відповідні формули підрахунку величини $P^*_{k,m}$ $O-$топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,m}(S^2)$ було встановлено в [3]. В загальному випадку – питання залишалось відкритим.

Має місце твердження

Теорема 1. *Для натуральних m і $k \geq 2$ число $O-$топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,m}(S^2)$ можна обчислити за допомогою співвідношень*

$$P^*_{k,m} = \frac{1}{n}\Bigg(\frac{1}{n}C_n^k \cdot C_n^{k-1} + \sum_{j|(n,k),\ j\neq 1} \phi(j) \cdot \frac{n-k+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k}{j}-1} +$$

$$+ \sum_{j|(n,k-1),\ j\neq 1} \phi(j) \cdot \frac{k-1+j}{n} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}+1} \cdot C_{\frac{n}{j}}^{\frac{k-1}{j}}\Bigg), \tag{1}$$

де: $n = k + m - 1$; ϕ – функція Ейлера; (s,t) – найбільший спільний дільник чисел s і t; а підсумовування у другому і третьому доданках ведеться за всіма дільниками (за винятком 1-ці) чисел (n,k) і $(n,k-1)$ відповідно.

Крім того, з урахуванням результатів роботи [4] (Example 37), має місце твердження

Теорема 2. *Число топологічно нееквівалентних функцій з класу $C_{k,n+1-k}(S^2)$ можна обчислити за допомогою співвідношення*

$$P^{**}_{k,n} = \frac{1}{2}\left(P^*_{k,n} + C_{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}^{\lfloor\frac{k-1}{2}\rfloor} \cdot C_{\lceil\frac{n-1}{2}\rceil}^{\lceil\frac{k-1}{2}\rceil}\right), \tag{2}$$

де $\lfloor q \rfloor = \max\{n \in Z | n \leq q\}$, $\lceil q \rceil = \min\{n \in Z | n \geq q\}$.

Список літератури

[1] Prishlyak A.O. *Topological equivalence of smooth functions with isolated critical points on a cloused surface* // Topology and its Aplications. – 2002. – Vol. 119, №3. – P. 257–267.

[2] Кадубовський О. *Топологічна еквівалентність функцій на орієнтованих поверхнях* // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58, № 3. – С. 343–351.

[3] Кадубовський О.А. *Про число топологічно нееквівалентних функцій з однією виродженою критичною точкою типу сідла на двовимірній сфері* // Проблеми топології та суміжні питання / Зб. праць Інституту математики НАН України. – 2010. – Т 3, № 3. – С. 163–179.

[4] Barry P. *On Integer-Sequence-Based Constructions of Generalized Pascal Triangles* // J. Integer Sequences. – 2006. – V. 9, № 2. – Article 06.2.4, 34 pp. (electronic)

Про C- і C^*-вкладені підмножини площини Зорґенфрея

О. О. Карлова

(Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна)

E-mail address: maslenizza.ua@gmail.com

Нехай X – топологічний простір. Множина $E \subseteq X$ називається

- *C-вкладеною в X*, якщо довільну неперервну дійснозначну функцію f на E можна продовжити до неперервної функції на X.
- *C^*-вкладеною в X*, якщо довільну неперервну обмежену дійснозначну функцію f на E можна продовжити до неперервної функції на X.

Наступна відкрита проблема сформульована в [1].

Проблема 1. *Чи існує простір з першою аксіомою зліченності, що містить замкнену C^*-вкладену множину, яка не є C-вкладеною?*

Площиною Зорґенфрея $\mathbb{S}^2$ ми називаємо добуток прямих Зорґенфрея $\mathbb{S}$ (нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{S}$ – це числова пряма з топологією, базу околів точки $x \in \mathbb{R}$ в якій утворюють проміжки вигляду $[x, x + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$). Відомо, що площина Зорґенфрея $\mathbb{S}^2$ задовольняє першу аксіому зліченності і не є нормальним простором.

В цьому повідомленні ми охарактеризовуємо C- і C^*-вкладені множини в $\mathbb{S}^2$, які є підпросторами так званої *антидіагоналі* площини Зорґенфрея, тобто, множини $\mathbb{D} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Теорема 1. *Для множини $E \subseteq \mathbb{D}$ наступні умови рівносильні:*

1. *E – C-вкладена;*
2. *E – C^*-вкладена;*
3. *E – зліченна множина типу G_δ в $\mathbb{R}^2$;*
4. *E – зліченна функціонально замкнена множина в $\mathbb{S}^2$.*

Список літератури

[1] Open problems in topology II /ed. by Elliott Pearl/ Elsevier, 2007, 776 p.

Застосування іноваційних технологій навчання для активізації пізнавальної діяльності студентів.

Т. В. Качан

(ОТК ОНАХТ, Одеса, Україна)

E-mail address: pavlik72@ukr.net

У Національній доктрині розвитку освіти, затверджeній у квітні 2002 року, обґрунтовано завдання оновлення змісту освіти та навчально-виховного процесу. Як відомо, навчально-виховний процес повинен будуватися відповідно до потреб особистості та індивідуальних можливостей студентів, зростання їх самостійності й творчої активності. Хрестоматійним став вислів К.Д. Ушинського про те, що вчитель як фахівець живе доти, поки вчиться. Сприяти педагогу в цьому – провідна фун-кція методичної роботи. Методична робота – це систематична, цілеспрямована, колективна й індивідуальна діяльність педагогів з підвищення наукового та загальнокультурного рівня, вдосконалення психолого-педагогічної підготовки і професійної майстерності. Добре відомо, що ефективність методичної роботи значною мірою визначається рівнем творчого потенціалу викладача, технологічною компетентністю та сформованістю його інноваційної культури. Нові методи навчання, нестандартні форми заняття допомагають розбудити інтерес студента до досліджуваної проблеми, сприяють більш глибокому вивченню теми. Інтерактивні технології навчання - це така організація процесу навчання, у якому студенту неможливо не приймати участь – в колективному, взаємодоповнюючому, заснованому на взаємодії всіх його учасників процесу навчального пізнання. У сучасному світі мабуть немає галузі, де б не використовувався комп'ютер і освітня галузь не є виключенням. Інтерес до вивчення предмету багато в чому залежить від того, як проходять заняття. Застосування комп'ютерної техніки на парах дозволяє зробити урок нетрадиційним, яскравим, насиченим, наповнюючи його зміст знаннями з інших наочних областей, що перетворюють математику з об'єкту вивчення в засіб отримання нових знань. Найдоступнішими і самими поширеними технологіями є застосування табличного процесора MS Excel, програми для створення презентацій Microsoft Power Point, програми «Открытая математика» , контрольно-діагностичної системи Test-W. Кожен елемент із зазначеного переліку програмних засобів є достатньо досконалим у своєму роді. Використання інтерактивних, інформаційно-комунікаційних технологій на навчальних заняттях з математики сприяють активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів, швидкому та ефективному засвоєнню ними навчального матеріалу, формуванню ключових компетенцій студента. При цьому навчально-виховний процес організовується так, що студенти шукають зв'язок між новими та вже отриманими знаннями; приймають альтернативні рішення, мають змогу зробити "відкриття", формують свої власні ідеї та думки за допомогою різноманітних засобів; навчаються співробітництву.

Підпростори добутків лінійно впорядкованих просторів і конаміокові простори

В. В. Михайлюк

(Чернівецький національний університет, Чернівці, Україна)

E-mail address: vmykhaylyuk@ukr.net

Нехай X, Y – топологічні простори. Кажуть, що нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *має властивість Наміоки*, якщо існує щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$.

Компактний простір Y називається *конаміоковим*, якщо для довільного берівського простору X кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість Наміоки.

Досить загальні результати у напрямку вивчення властивостей конаміокових просторів були одержані в [1, 2], де встановлено, що клас компактних конаміокових просторів замкнений відносно добутку і містить компакти Валдівіа. В [4] було узагальнено ці результати і показано, що довільний лінійно впорядкований компакт є конаміоковим простором.

Разом з тим, приклад М. Талаграна [3] компактного простору, який не є конаміоковим, вказує на те, що замкнений підпростір конаміокового компакту може не бути конаміоковим. Тому природно виникає питання: чи обов'язково компактний підпростір Y добутку $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ скінченної кількості лінійно впорядкованих компактів Y_k є конаміоковим?

Теорема 1. *Нехай $Y_1, \dots, Y_n$ – лінійно впорядковані простори, $Y \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_n$ – такий компактний простір, що для довільного (можливо виродженого) паралелепіпеда $W = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subseteq Y_1 \times \cdots \times Y_n$ множина $Y \cap W$ зв'язна. Тоді Y конаміоковий.*

Список літератури

[1] Bouziad A. Notes sur la propriete de Namioka // Trans. Amer. Math. Soc. – 344, N2. – 1994. – P.873-883.

[2] Bouziad A. The class of co-Namioka spaces is stable under product // Proc. Amer. Math. Soc. – 124, N3. – 1996. – P.983-986.

[3] Talagrand M. 'Espaces de Baire et espaces de Namioka // Ann. of. Math. – 1985. – 270, №2. – P.159-164.

[4] Михайлюк В.В. Лінійно впорядковані компакти і конаміокові простори // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, №7. – С. 1001-1004.

Шляхи підвищення якості математичної підготовки спеціалістів та їх реалізації в учбовому процесі

Н. В. Нужна

(ОНАХТ, Одеса, Україна)

E-mail address: Lada5.00@rambler.ru

В теперішньому часі випускники технічних вузів потребують серйозну математичну підготовку. Математичні методи допомагають досліджувати широке коло проблем, застосувати теоретичні досягнення на практиці. Необхідно поставити математичну освіту в вузі таким чином, щоб випускники мали чітке уявлення, що таке математична модель, в чому полягає математичний підхід до вивчення явища реального світу, як його можна застосувати і що він може дати. На наш погляд, якість математичної підготовки спеціаліста залежить від наступних моментів:

1. зміст вивчаємих дисциплін;
2. забезпечення студентів навчальною і методичною літературою по вивчаємій дисципліні;
3. научного рівня та педагогічної майстерності викладацьких кадрів;
4. постановка методичної та виховної роботи;
5. контакту викладачів зі студентами і рівня індивідуальної роботи зі студентами.

Навчання математики в вузі переслідує такі цілі: розвиток логічного мислення та математичної індукції, виховання математичної культури, засвоювання математичних знань і уміння застосовувати їх в конкретних додатках. При складанні програми по математичним дисциплінам безумовно повинен бути критерій корисності конкретних математичних розділів для майбутньої спеціальності, але обмежуватись тільки їм було б великою помилкою. Потрібно враховувати внутрішню логіку і внутрішні зв'язки, необхідні для розуміння математичних зв'язків. Яким розділам математики і в якому обсязі потрібно вчити студентів даної спеціальності, повинні визначати математики сумісно з спеціалістами конкретної області. Для поліпшення якості засвоєння студентами кожної дисципліни велика роль належить підбору матеріала, вивчаємого в даній дисципліні. Важливо скласти программу вивчаємої дисципліни таким чином, щоб викладання проводилось по зростаючий важкості з врахуванням знання студентами як попередніх розділів даної дисципліни, так і інших дисциплін.

Диференціальні 1-форми на замкнених поверхнях

І. Ю. Оксьоненко, С. В. Білун

(КНУ)

E-mail address: demchenkoira@meta.ua

У працях ([1], [2]) було встановлено критерій топологічної еквівалентності замкнених 1-форм на замкненій орієнтованій поверхні. Для таких форм побудовано повний топологічний інваріант і доведено критерій топологічної еквівалентності. В данній роботі ці результати ми використовуємо для обчислення числа топологічно еквівалентних замкнених 1-форм.

А саме, ми розглядаємо процес склеювання циліндра та 2n-кутника зі збереженням орієнтації. З умов критерія еквівалентності випливає, що утворені діаграми повинні мати 1 цикл, тому ми розглядаємо лише 2n-кутники, де n-непарне. В іншому разі діаграма матиме парну кількість циклів.

Так, наприклад, розглянемо випадок коли n=5. Послідовно занумеруємо кожну другу грань десятикутника. До кожної з цих граней приклеїмо один кінець стрічки, а іншим кінцем будемо приклеювати до верхньої основи циліндра. Зафіксуємо стрічку під номером 1, а інші будемо приклеювати до циліндра різними способами не перекручуючи стрічку, таким чином зберігаючи орієнтацію. Для зручності позначимо нумерацію граней 10-кутника через послідовність $(a_n) = 1, 2, 3, 4, 5$, а варіанти приклеювання стрічок до циліндра через послідовність (b_n), перший член якої завжди фіксований і дорівнює 1, а інші 4 можуть розміщуватись у довільному порядку. Всіх можливих варіантів таких послідовностей, а значить і варіантів діаграм, буде 4!=24.

Циклом будемо називати компоненту края утвореної поверхні, крім нижньої основи циліндра. Діаграм з 1 циклом всього буде 8, відповідно маємо і 8 послідовностей b_n, а саме: 1,5,3,2,4; 1,5,2,4,3; 1,5,4,3,2; 1,4,2,5,3; 1,3,5,2,4; 1,4,3,5,2; 1,3,5,4,2 та 1,3,2,5,4.

Далі розглянемо можливі претворення діаграм з 1 циклом, породжені тим, що ми вибираємо по-іншому першу стрічку. При цьому відбувається циклічна перестановка цифр у кожній з відібраних послідовностей. В утвореній підстановці циклічно переставляються цифри так, щоб вона починалась з 1. В результаті отримаємо, що п'ять діаграм, яким відповідають послідовності 1,5,3,2,4; 1,4,3,5,2; 1,3,2,5,4; 1,5,2,4,3; та 1,3,5,4,2, еквівалентні між собою, а інші три еквівалентні самі собі. Підрахувавши, маємо 4 класи еквівалентності.

Список літератури

[1] О. О. Пришляк, Н. В. Будницька *Еквівалентність замкнених 1-форм на замкнених орієнтованих поверхнях.*,- Вісник Київського національного університету. Серія:фіз.-мат.науки, (2008), № 3, С. 36-38.

[2] С. В. Білун, О. О. Пришляк. *Замкнені 1-форми Морса на замкнених поверхнях.*

Характеристичне рівняння в теорії інфінітезимальних деформацій поверхонь обертання

І. В. Потапенко

(ОНУ ім. І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: igopotapenko@yandex.ru

Отримано характеристичне рівняння в теорії інфінітезимальних деформаційз фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду поверхонь обертання без омбілічних точок, розвязок якого характеризує деформуюче поле таких деформацій Варіації коефіцієнтів другої квадратичної форми δb_{ij} поверхні віднесеної до ліній кривини при деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду мають вигляд ([1])

$$\begin{aligned} \delta b_{11} &= b_{11}p - \frac{\delta K g_{11}}{2\sqrt{E}} + \frac{b_{11}\delta g_{11}}{g_{11}}, \\ \delta b_{22} &= -b_{22}p + \frac{\delta K g_{22}}{2\sqrt{E}} + \frac{b_{22}\delta g_{22}}{g_{22}}, \\ \delta b_{12} &= \sqrt{g}q, \\ p &= \frac{\delta H}{\sqrt{E}}, \end{aligned} \tag{1}$$

де δH - варіація середньої кривини,δK - варіація гауссової кривини, E - ейлерова різниця, δg_{ij} - варіація коефіцієнтів першої квадратичної форми, q - варіація геодезичного скруту вздовж головних напрямів при цьому ([2]) рівняння Гаусса будуть виконані тотожньо,а рівняння Петерсона - Майнарді - Кодацці будуть виконані за умови що варіація δH - середньої кривини задовольняє характеристичному рівнянню

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \delta b_{11}}{\partial {x^2}^2} - \frac{\partial^2 \delta b_{22}}{\partial {x^1}^2} + \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^1_{11} - \delta b_{22}\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \delta b_{11}\Gamma^1_{11}\Gamma^1_{22} + \frac{\partial \delta b_{22}}{\partial x^1}\Gamma^2_{21} + \delta b_{22}\frac{\partial \Gamma^2_{12}}{\partial x^1} - \\ &- \delta b_{11}\frac{\partial \Gamma^1_{22}}{\partial x^1} - \frac{\partial \delta b_{11}}{\partial x^1}\Gamma^1_{22} = \Gamma^1_{11}(-b_{11}\delta\Gamma^1_{22} + b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + \frac{\partial}{\partial x^2}(b_{11}\delta\Gamma^1_{12} - b_{22}\delta\Gamma^2_{11}) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x^1}(-b_{22}\delta\Gamma^2_{12} + b_{11}\delta\Gamma^1_{22}) \end{aligned} \tag{2}$$

Список літератури

[1] І. В. Потапенко *Характеристика деформуючого поля при інфінітезимальних деформаціях з фіксованою варіацією символів Крістоффеля другого роду.*, - Тези доповідей міжнародної конференції в Одесі - (2013), – 2013. – С.24

[2] І. В. Потапенко *Нові рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь в Е3.* ,- // Український математичний журнал.: Наука, (2010).– Т.62, №2. – С. 199 – 202

Про розв'язність матричного рівняння $AXB = C$ над областю головних ідеалів

В. М. Прокіп

(ІППММ НАН України, Львіва, Україна)

E-mail address: `v.prokip@gmail.com`

Нехай R – область головних ідеалів з одиницею $e \neq 0$. Позначимо: $M_{m,n}(\mathrm{R})$ – множина $(m \times n)$-матриць над R; I_n – одинична матриця вимірності n; $0_{m,k}$ – нульова $(m \times k)$-матриця.

Розглянемо матричне рівняння

$$AXB = C, \tag{1}$$

де $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$, $B \in M_{k,l}(\mathrm{R})$, $C \in M_{m,l}(\mathrm{R})$, $C \neq 0_{m,1}$, і X невідомий елемент із $M_{n,k}(\mathrm{R})$. Методам розв'язності лінійного рівняння (1) присвячена значна кількість робіт. Це обумовлено не тільки академічним інтересом до цієї задачі, але і багатьма задачами прикладного характеру, для розв'язування яких використовуються такого виду рівняння.

Якщо $\mathrm{R} = \mathbb{F}$ – поле, то рівняння (1) над $\mathbb{F}$ розв'язне (див. [1]) тоді і тільки тоді, коли

$$\mathrm{rank} A = \mathrm{rank}\,[A\,, C] \quad i \qquad \mathrm{rank} B = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix}.$$

Ці умови не можна застосувати для розв'язності рівняння (1) над областю головних ідеалів.

Нагадаємо, що для матриці $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$ рангу $\mathrm{rank}\, A = r$ над областю головних ідеалів R існують матриці $U \in GL(m, \mathrm{R})$ та $V \in GL(n, \mathrm{R})$ такі, що

$$S_A = UAV = \mathrm{diag}\,(a_1,\, a_2,\, \dots\,, a_r,\, 0, \dots\,, 0),$$

де $a_1,\, a_2,\, \dots\,, a_r$ – ненульві елементи із R, і $a_i \,|\, a_{i+1}$ (ділить) для всіх $i = 1, \dots\, r-1$. Елементи $a_1,\, a_2,\, \dots\,, a_r$ називаються інваріантними множниками матриці A, а діагональна матриця S_A називається формою Сміта матриці A.

Нижче вказані умови розв'язності рівняння (1) над областю головних ідеалів R.

Теорема 1. *Нехай $A \in M_{m,n}(\mathrm{R})$, $B \in M_{k,l}(\mathrm{R})$, $C \in M_{m,l}(\mathrm{R})$ – ненульові матриці. Нехай, далі,*

$$S_A = U_1 A V_1 = \mathrm{diag}\,(a_1,\, a_2,\, \dots\,, a_p,\, 0, \dots\,, 0)$$

і

$$S_B = U_2 B V_2 = \mathrm{diag}\,(b_1,\, b_2,\, \dots\,, b_q,\, 0, \dots\,, 0)$$

форми Сміта матриць A та B відповідно, де $U_1 \in GL(m, \mathrm{R})$, $V_1 \in GL(n, \mathrm{R})$, $U_2 \in GL(k, \mathrm{R})$ і $V_2 \in GL(l, \mathrm{R})$. Рівняння $AXB = C$ розв'язне над областю головних ідеалів R тоді і тільки тоді, коли матриця $U_1 C V_2$ допускає зображення у вигляді $U_1 C V_2 = \begin{bmatrix} D & 0_{p,l-q} \\ 0_{m-p,q} & 0_{m-p,l-q} \end{bmatrix}$, де

$$D = \begin{bmatrix} a_1 b_1 h_{11} & a_1 b_2 h_{12} & \dots & a_1 b_q h_{1q} \\ a_2 b_1 h_{21} & a_2 b_2 h_{22} & \dots & a_2 b_q h_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_p b_1 h_{p1} & a_p b_2 h_{p2} & \dots & a_p b_q h_{pq} \end{bmatrix} \in M_{p,q}(\mathrm{R}) \quad i \quad h_{i,j} \in \mathrm{R}.$$

Список літератури

1. R. C. Rao, S. K. Mitra *Generalized inverse of matrices and its applications.* – John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney, (1971), 240p.

Одеський період наукової творчості проф. М.Г. Чеботарьова (До 120-річчя з дня народження).

О. М. Рябухо

(ДВНЗ "ДДПУ Слов'янськ, Україна)

E-mail address: rom.olena@gmail.com

Наукову діяльність видатного математика і педагога, вихованця Київського Університету св. Володимира М.Г.Чеботарьова можна умовно розділити на три періоди: київський (1918-1921рр.), одеський (1921-1927рр.) і казанський (1927-1947рр.). У повідомленні пропонується аналіз циклу праць М.Г. Чеботарьова, які відносяться до одеського періоду (1921 - 1927).

По приїзді в Одесу Чеботарьов деякий час працював викладачем в різних навчальних закладах, а з 1924 року зайняв посаду секретаря науково-дослідної кафедри при Одеському інституті народної освіти. На одеський період припадає також закордонне відрядження М.Г.Чеботарьова – виїзд до Німеччини, відвідання кількох німецьких університетів і участь в роботі з'їзду математиків в Данцігу.

Вагомим алгебраїчним дослідженням М.Г.Чеботарьова київського та початку одеського періоду є робота [4], присвячена розв'язанню проблеми Фробеніуса. Саме її в 1926р. Чеботарьов подав до Української академії наук в якості докторської дисертації, яку захистив у 1927р. Опонентами на захисті були Д.О.Граве, М.Ф.Кравчук і Г.В. Пфейффер. Після захисту дисертації Чеботарьов був запрошений до Казанського університету, де потім працював до кінця свого життя.

В цілому під час перебування в Одесі М.Г.Чеботарьов отримав наступні математичні результати:

1) довів, що прості числа , які належать до окремих класів підстановок, існують. Тим самим було розв'язано відому проблему Фробеніуса;

2) вивчив властивості і будову групи класів в алгебраїчних полях;

3) продовжив свої дослідження з теорії поверхонь переходу і отримав істотно нові результати в даному напрямку;

4) оформив як цілісні статті свої раніше розрізнені результати про корені цілих трансцендентних функцій;

5) провів дослідження в напрямку оберненої проблеми теорії Ґалуа.

Дослідження з теорії Ґалуа, виконані в Одесі, лягли в основу праць, що принесли міжнародну наукову славу Миколі Григоровичу. В 1932 році на Міжнародному математичному конгресі в Цюриху Чеботарьов зробив пленарну доповідь присвячену 100-річчю з дня смерті Еваріста Ґалуа.

Список літератури

[1] Чеботарев Н.Г. *Критерий вещественности корней трансцендентных уравнений.* Уч. Зап. В. Шк. Одессы, 2 (1922), С. 15-30.

[2] Чеботарев Н.Г. *Задача, обратная задаче Tschirnhausen'a.*, Вестник Чистого и Прикл. Знания (Одесса) I, вып. 2 (1922), С. 1-8.

[3] Чеботарев Н.Г. *Доказательство теоремы Kronecker'a-Weber'a относительно абелевых областей.* Мат. сб., 31 (1923), С. 302-308.

[4] Чеботарев Н.Г. *Определение плотности совокупности простых чисел, принадлежащих к заданому классу подстановок.* Изв. Росс. АН, 1923, с. 205-250.

[5] Чеботарев Н.Г. *О поверхностях переноса.* , – Мат. сб., 31 (1924), С. 434 -– 445.

Про нескінченно малі конформні деформації поверхонь з деяким обмеженням на тип деформації

Ю. С. Федченко

(ОНАХТ, Одеса, Україна)

E-mail address: `Fedchenko_Julia@ukr.net`

Досліджуємо нескінченно малі конформні деформації поверхні S в евклідовому просторі E_3 ([1]), ([2]).

Теорема 1. *Для того, щоб поверхня S класу C^3 допускала нескінченно малу конформну деформацію, необхідно і достатньо, щоб тензорні поля $\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta}$, T^α та функція φ, що представляють похідну вектора зміщення $\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\overline{n}$, задовольняли систему наступних рівнянь:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} b_{\alpha\beta}\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha T^\alpha & = & 0; \\ \nabla_\alpha \overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} - T^\alpha b_\alpha^\beta & = & \varphi_\alpha c^{\alpha\beta}; \\ \overset{0}{T}{}^{\alpha\beta}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right) & = & 0; \\ \varphi_i & = & \partial_i\varphi. \end{array}\right. \tag{1}$$

Система 1 досліджується за умови $T^i = 0$.

Теорема 2. *Якщо поверхня $K \neq 0$ допускає нетривіальні нескінченно малі конформні деформації при $T^i = 0$, то така поверхня є мінімальною.*

Для мінімальних поверхонь здійснено дослідження основних рівнянь.

Список літератури

[1] Ю. С. Федченко. Про нескінченно малі конформні деформації мінімальних поверхонь зі збереженням середньої кривини // Праці міжнародного геометричного центру. – О., (2012). - Т. 5, № 3-4, С. 24-31.

[2] Ю. С. Федченко. Про існування нескінченно малих конформних деформацій поверхонь // Математичний вісник Наукового товариства ім. Тараса Шевченка. – Л., (2013). – Т. 10. – С. 115–121.

О критерии контактной автодуальности

А. В. Аристархова

(Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК), Москва, Россия)

E-mail address: `aristarhowa@gmail.com`

Контактно-автодуальные многообразия [1], снабженные почти контактной метрической структурой, являются естественным обобщением 4-мерных автодуальных многообразий [2] на 5-мерный случай. В данной работе ограничимся рассмотрением контактной автодуальности квази-сасакиевых многообразий (как наиболее изученного и интересного подкласса почти контактных метрических многообразий). В самом деле, установлен критерий контактной автодуальности 5-мерных квази-сасакиевых многообразий:

Теорема 1. *5-мерное квази-сасакиево многообразие M контактно-автодуально тогда и только тогда, когда на пространстве присоединенной G-структуры*

$$A^{ac}_{bd} = 2B^a_b B^c_d + B^a_d B^c_b + \left(B^a_h B^h_b - B^a_b B^h_h\right)\delta^c_d + \left(B^c_h B^h_b - \frac{1}{2}B^f_h B^h_f \delta^c_b\right)\delta^a_d +$$

$$+ \left(B^a_h B^h_d - \frac{1}{2}B^f_h B^h_f \delta^a_d\right)\delta^c_b - \frac{1}{3}\left(B^f_h B^h_f + \frac{\kappa}{4}\right)\tilde{\delta}^{ac}_{bd},$$

где $\tilde{\delta}^{ac}_{bd} = \delta^a_b\delta^c_d + \delta^a_d\delta^c_b$ *- симметричная кронекеровская дельта 2-го порядка.*

Заметим, что набор функций $\{B^a_b\}$ является набором компонент комплексного тензорного поля B типа (1,1) на M, называемого *структурным тензором первого рода*, а система функций $\{A^{ac}_{bd}\}$ определяет тензорное поле A типа (2,2), называемое *структурным тензором второго рода* или *тензором голоморфной секционной кривизны квази-сасакиева многообразия.* При этом, $a, b, c, d, h, f = \overline{1, 2}$. В случае контактной антиавтодуальности критерий получить не удалось, был установлен признак контактной антиавтодуальности 5-мерных квази-сасакиевых многообразий:

Теорема 2. *Если 5-мерное квази-сасакиево многообразие M контактно-антиавтодуально, то его скалярная кривизна κ на пространстве присоединенной G-структуры вычисляется по формуле:* $\kappa = 2B^b_a B^a_b - 6B^a_a B^b_b$.

Список литературы

[1] А. В. Аристархова, В. Ф. Кириченко *Контактно-автодуальная геометрия 5-мерных квази-сасакиевых многообразий.*,- Матем. заметки. 90: 5, (2011), С. 643-658.

[2] А. Бессе *Многообразия Эйнштейна.*,-М.: Мир, (1990), Т. 1-2, 704 с.

Q-алгебры основных типов обобщенных почти эрмитовых многообразий

О. Е. Арсеньева

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: `highgeom@yandex.ru`

Понятия обобщенного почти эрмитова (короче, $GA\mathcal{H}$-) многообразия и присоединенной к нему Q-алгебры сформировались в 80-е годы минувшего столетия и изучались в ряде работ (см., например,[1]). Теория $GA\mathcal{H}$-структур представляет интерес потому, что позволяет с единых позиций взглянуть на такие, на первый взгляд различные, объекты, как, например, эрмитова и контактная геометрии. Больший интерес представляют $GA\mathcal{H}$-многообразия ранга 1 дефекта 0, типичным представителем которых являются f-многообразия Яно.

Определение 1. *Q-алгебра V называется:*

- *абелевой, или коммутативной Q-алгеброй, если $X * Y = 0 \quad (X, Y \in V)$;*
- *K-алгеброй, или антикоммутативной Q-алгеброй, если $X * Y = -Y * X \quad (X, Y \in V)$,*
- *A-алгеброй, или псевдокоммутативной Q-алгеброй, если*

$$\langle X * Y, Z\rangle + \langle Y * Z, X\rangle + \langle Z * X, Y\rangle = 0, \quad (X, Y, Z \in V).$$

Почти эрмитова структура (g, J); $J^2 = -\mathrm{id}$; $g(X, Y) = g(JX, JY)$ называется:

- эрмитовой, или интегрируемой, если $\nabla_X(f)Y - \nabla_{fX}(f)(fY) = 0$;
- G_1-структурой, если $\nabla_X(f)X - \nabla_{fX}(f)(fX) = 0$;
- G_2-структурой, если $\mathfrak{S}_{XYZ}(\langle Y, \nabla_X(f)Z\rangle - \langle Y, \nabla_{fX}(f)fZ\rangle) = 0$.

Теорема 1. *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с абелевой присоединенной Q-алгеброй совпадает с классом эрмитовых многообразий.*

Теорема 2. *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с присоединенной K-алгеброй совпадает с классом G_1-многообразий.*

Теорема 3. *Класс $GA\mathcal{H}$-многообразий ранга 1 дефекта 0 с присоединенной A-алгеброй совпадает с классом эрмитовых многообразий.*

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко *Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий.*,-Итоги науки и техники ВИНИТИ СССР. Проблемы геометрии. Т. 18. 1986. С. 25-71

Градиентность вектора $C_{i\alpha}T^\alpha$ при А-деформации поверхности

Л. Л. Безкоровайная

(ОНУ им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: mazur _ elena@mail.ru

Пусть

$$\vec{u_i} = C_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\vec{r_\beta} + C_{i\alpha}T^\alpha\vec{n}$$

- частные производные вектора смещения $\vec{u}$ при А-деформации поверхности в E^3, $C_{i\alpha}$ - дискриминантный тензор.

Теорема 1. Если $C_{i\alpha}T^\alpha$ – градиентный вектор, то тензоры А–деформации произвольной поверхности класса C^3 имеют представление:

$$T^{\alpha\beta} = \omega\rho^{\alpha\beta},$$

$$T^i = C^{\alpha i}\psi_\alpha,$$

где $\rho^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C^{\alpha\gamma}b_\gamma^\beta + C^{\beta\gamma}b_\gamma^\alpha)$, $b_\gamma^\alpha = g^{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}$, $b_{\beta\gamma}$ – коэффициенты второй основной квадратичной формы поверхности, а $\omega(x^1, x^2)$ и $\psi(x^1, x^2)$ функции класса C^2, которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\omega_\beta\rho^{\alpha\beta} + \omega C^{\alpha\beta}H_\beta = C^{\gamma\beta}b_\beta^\alpha\psi_\gamma, \ 2H = b_\alpha^\alpha.$$

Теорема 2. В случае минимальной поверхности вектор $C_{i\alpha}T^\alpha$ является градиентным тогда и только тогда, когда ареальная бесконечно малая деформация этой поверхности является нормальной.

Заметим, что в отличие от ареальной бесконечно малой деформации, понятие нормального бесконечно малого изгибания не имеет смысла.

Теорема 3. При ареальной бесконечно малой деформации с градиентным вектором $C_{i\alpha}T^\alpha$ сеть LGT- линий [1] произвольной поверхности класса C^3 является сетью стационарной длины. Сеть асимптотических линий минимальной поверхности также является сетью стационарной длины.

Список литературы

[1] Л. Л. Безкоровайная, Т. Ю. Вашпанова *LGT-сеть и деформации поверхности.* Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 2. К 100-летию со дня рождения Н. В. Ефимова, Издательство Московского университета, 2011, С. 157-163.

А–деформации с вектором смещения перпендикулярным плоскости

Л. Л. Безкоровайная, В. А. Москалик

(ОНУ им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail addresses: Moskalik_ Valentina@mail.ru

Объектом исследования является А–деформация с вектором смещения $\vec{u} = (0, 0, \zeta(x, y))$ поверхности класса C^3, однозначно проектирующейся на плоскость Oxy, заданной уравнением $z = z(x, y)$ в трехмерном евклидовом пространстве. В результате исследования уравнений ([1]):

$$d\vec{r}d\vec{u} = \varepsilon_{ij}dx^i dx^j,$$

$$\varepsilon_{ij}g^{ij} = 0,$$

получена следующая теорема:

Теорема 1. Для того чтобы бесконечно малая деформация с вектором смещения $\vec{u} \perp Oxy$ была ареальной, необходимо и достаточно, чтобы вертикальная компонента вектора $\vec{u}$ являлась решением системы уравнений:

$$\zeta_x = \frac{\varepsilon_{11}}{z_x},\ \zeta_y = \frac{-\varepsilon_{11}}{z_y}. \tag{1}$$

Система уравнений (1) имеет решение тогда и только тогда, когда ε_{11} удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению с частными производными:

$$z_x^2 z_y \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x} + z_y^2 z_x \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial y} = z_x^2 z_{xy}\varepsilon_{11} + z_y^2 z_{xy}\varepsilon_{11}.$$

Теорема 2. А–деформацию с вектором смещения $\vec{u} \perp Oxy$ допускают только следующие поверхности:

1) поверхности переноса, тогда вариации первой квадратичной формы находятся в виде:

$$\varepsilon_{11} = C,\ 2\varepsilon_{12} = \frac{C(z_y^2 - z_x^2)}{z_x z_y},\ \varepsilon_{22} = -C,$$

2) поверхности (при $z_{xy} \neq 0$), уравнения которых заданы гармонической функцией, при этом вариации первой квадратичной формы имеют представление:

$$\varepsilon_{11} = Cz_x z_y,\ 2\varepsilon_{12} = C(z_y^2 - z_x^2),\ \varepsilon_{22} = -Cz_x z_y,$$

где C– произвольная постоянная.

В работе найдены координаты вектора $\vec{u}$ из системы уравнений (1) в явном виде.

Для данной задачи имеет место теорема об А–жесткости:

Теорема 3. Если $\varepsilon_{11} = 0$ в некоторой точке поверхности $z = z(x, y)$, то эта поверхность является А–жесткой относительно А–деформации с вектором смещения $\vec{u} \perp Oxy$.

Отметим, что при б. м. изгибаниях поверхности данная задача не имеет смысла.

Список литературы

[1] Л. Л. Безкоровайная, В. А. Москалик *Теорема об ареальной бесконечно малой деформации скольжения.* Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе – 2013", 2013, стр. 59.

О почти геодезических отображениях первого типа римановых пространств при условии сохранения системы n-ортогональных гиперповерхностей

В. Е. Березовский, Й. Микеш, А.О. Пришляк

(Уманский национальный университет садоводства, Украина)

E-mail address: `Berez.Volod@rambler.ru`

(Palacky University, Olomouc, Czech Republic)

E-mail address: `Josef.Mikes@upol.cz`

(Киевский национальный университет им. Т.Г. Шевченко)

E-mail address: `Prishlyak@yahoo.com`

Рассмотрим частный случай почти геодезических отображений первого типа π_1 (псевдо-) римановых пространств $V_n \to \bar{V}_n$, характеризующийся следующими уравнениями:

$$P^h_{ij,k} = \varphi_k P^h_{ij}, \tag{1}$$

$$P^\alpha_{(ij} P^h_{k)\alpha} = a_{(ij}\delta^h_{k)}, \tag{2}$$

где P^h_{ij} – тензор деформации связностей, φ_k – некоторый вектор, a_{ij} – некоторый симметрический тензор, запятой обозначается ковариантная производная в пространстве V_n.

Указанные отображения обладают свойством взаимности, то есть, обратные им отображения также являются отображениями π_1, которые, однако, могут не порождаться уравнениями (1) и (2). Имеет место

Теорема 1. *Если риманово пространство V_n отнесено к n-ортогональной системе координат и диагональные компоненты метрического тензора удовлетворяют следующей системе типа Коши в частных производных*

$$\partial_h \ln g_{ii} = \frac{C_i e^{-2x^i} - 3C_h e^{-2x^h}}{C_h e^{-2x^h} - C_i e^{-2x^i}}, \quad (h \neq i),$$

$$\partial_i \ln g_{ii} = -4 + g_{ii} \cdot \sum_{\alpha \neq i} \frac{1}{g_{\alpha\alpha}} \cdot \frac{C_i e^{-2x^i} - 3C_\alpha e^{-2x^\alpha}}{C_\alpha e^{-2x^\alpha} - C_i e^{-2x^i}},$$

где C_i – некоторые ненулевые постоянные, то V_n допускает почти геодезическое отображение типа π_1, определяемое уравнениями (1) и (2), при котором сохраняется система n-ортогональных гиперповерхностей, на риманово пространство $\bar{V}_n$ с метрическим тензором $\bar{g}_{ij}$ причем

$$\bar{g}_{hh} = \frac{C_h e^{-2x^h}}{\prod\limits_{i=1}^{n} e^{-x^i}} \cdot g_{hh}, \qquad \bar{g}_{ij} = 0 \ (i \neq j).$$

Частным решением системы, указанной в теореме, будет

$$\bar{g}_{ii} = \prod_{\alpha \neq i} (C_\alpha e^{-2x^\alpha} - C_i e^{-2x^i})\, e^{-x^\alpha} e^{-x^i}, \quad g_{ij} = 0 \ \ (i \neq j). \tag{3}$$

Таким образом, риманово пространство V_n, метрика которого имеет вид (3), допускает почти геодезическое отображение типа π_1, при котором сохраняется система n-ортогональных гиперповерхностей, на риманово пространство $\bar{V}_n$, метрический тензор $\bar{g}_{ij}$ которого имеет представление

$$\bar{g}_{ii} = C_i e^{-2x^i} \prod_{\alpha \neq i} (C_\alpha e^{-2x^\alpha} - C_i e^{-2x^i})\, e^{-x^\alpha} e^{-x^i}, \quad \bar{g}_{ij} = 0 \ \ (i \neq j).$$

О макроскопической размерности вполне неспиновых многообразий.

Д. В. Болотов, А. Н. Дранишников

(ФТИНТ НАНУ им. Б.И. Веркина, Харьков, Украина)

E-mail address: bolotov@ilt.kharkov.ua

Ранее нами в [1] был дан частичный ответ на вопрос,поставленный М.Громовым о макроскопической размерности многообразий положительной скалярной кривизны. А именно, при некоторых дополнительных условиях на фундаментальную группу замкнутого спинового многообразия M^n положительной скалярной кривизны было доказано, что макроскопическая размерность его универсального накрытия $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n-2$. В данной работе мы делаем попытку обобщить этот результат на вполне неспиновые многообразия, т.е. многообразия, чье универсальное накрытие не является спиновым. Нами доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M^n – замкнутое вполне неспиновое многообразие, допускающее метрику положительой скалярной кривизны . Тогда:*

- *если $\pi_1(M^n)$ виртуально абелева, то $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n-2$.*
- *если $\pi_1(M^n)$ содержит коконечную подгруппу с двойственностью и удовлетворяет следующему условию: гомоморфизм $ko_n(B\pi) \to KO_n(B\pi)$, индуцированный преобразованием связного и периодического спектров $ko \to KO$ является мономорфизмом, то $\dim_{mc} \widetilde{M}^n \leq n-1$.*

Список литературы

[1] D. V. Bolotov, A. N. Dranishnikov *On Gromov's scalar curvature conjecture.*,- Proc. Amer. Math. Soc. 138, (2010), P. 1517-1524

Свойства дуальных модулей над алгеброй Стинрода

А. Н. Васильченко

(СамГУ, Самара, Россия)

E-mail address: `vass-alexandr@yandex.ru`

В работах ([2], [3], [4]) изучалась структура модулей над алгебрами Стинрода и дуальных к ним. В работе ([1]) автор изучает модули $A(n)$, образованные ануляторами классов когомологий степени не выше n в алгебре Стинрода. В дуальной алгебре Стинрода вводятся также ануляторы $A(n)^+$ когомологических операций избытка большего чем n.

В данной работе эти результаты используются для нахождения явного вида модулей $A(n-1)/A(n)$ и им дуальных модулей $A(n)^*$, $A(n)^+/A(n-1)^+$, $(A(n-1)/A(n))^*$, $A(n-1)^*/A(n)^*$, а также исследуется их структура. Результаты сформулированы в следующих утверждениях.

Предложение 1. *Анулятор $A(n)^+$ модуля $A(n)$ является A^*-комодулем и выполняется условие*

$$A(n)^+ \cong (A/A(n))^*$$

$A(n)^+$ генерируется всеми мономами мультипликативности не больше чем n и является индуцированным A^*-комодулем, для которого выполняется условие

$$A(n)^* \cong A^*/A(n)^+$$

Предложение 2. $(A(n-1)/A(n))^*$ *является левым индуцированным A^*-комодулем и как векторное пространство над Z/p имеет базис, образованный всеми мономами мультипликативности n в A^*. Выполняются следующие изоморфизмы:*

$$(A(n-1)/A(n))^* \cong A(n)^+/A(n-1)^+ \cong A(n-1)^*/A(n)^*$$

Список литературы

[1] H. Cartan, *Algebres d'Eilenberg-MacLane at Homotopie.*,- Seminare Cartan ENS **7e** (1954-1955).

[2] N. Steenrod, D. B. A. Epstein, *Cohomological Operations.*,- // Princeton Univ.Press(1962).

[3] J. Milnor, *The Steenrod algebra and its dual.*,- Ann. of Math. 67 (1958), P. 150-171.

[4] J. Milnor, J. Moore, *On the structure of Hopf algebras.*,- Ann. of Math. 81 (1965), P. 211-264.

Критерий топологической сопряженности накрытий окружности.

И. Ю. Власенко

(Институт Математики, Киев, Украина)

E-mail address: vlasenko@imath.kiev.ua

Для нетривиальных, т.е. не являющихся гомеоморфизмами, накрытий окружности построен набор топологических инвариантов, определены понятия допустимого инварианта и эквивалентности инвариантов.

Доказана теорема реализации, о том, что для каждого допустимого инварианта существует накрытие окружности с указанным инвариантом и доказана теорема о топологической классификации: два накрытия окружности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их соответствующие инварианты эквивалентны.

Список литературы

[1] И. Ю. Власенко *Динамика внутренних отображений.*,- Нелінійні Коливання. 2011. Т.14 № 2. –С. 181–186.

Полусвободное R^1-действие и отображения Ботта

Д. А. Гольцов

(Інститут математики НАН України, Київ)

E-mail address: `golts@ukr.net`

В работе ([1]) для компактных замкнутых многообразий были исследованы R^1-отображения Ботта. Также, для гладких многообразий M^{2n} с полусвободным действием окружности, которое имеет конечное количество неподвижных точек, были изучены R^1-инвариантные отображения Ботта и частично исследована проблема поиска точного значения минимального числа сингулярных окружностей для таких отображений.

Отображение $f : M^n \longrightarrow R^1$ называется R^1-отображением Ботта, если все его критические точки образуют невырожденные критические окружности. Известно, что существование R^1-отображения Ботта еквивалентно тому, что гладкое многообразие M^n допускает разложение на круглые ручки.

Доказано, что на замкнутом гладком многобразии M^{2n}, у которого все неподвижные точки являются изолированными, существует R^1-инвариантное R^1_*-отображение Ботта из M^{2n} в R^1, а также, что число этих неподвижных изолированых точек всегда четное и равно эйлеровой характеристике этого многообрзаия.

R^1-числом Морса $\mathcal{M}_i^{R^1}(M^{2n}, St(\Lambda))$ индекса i называется минимальное число of сингулярных окружностей индекса i над всеми R^1-инвариантными R^1_*-функциями Ботта f на M^{2n} со состоянием $St_f(\Lambda)$.

Тогда для M^{2n} $(2n > 8)$ со состоянием $St(\Lambda) = (0, \ldots, 0, 2n, \ldots, 2n)$

$$\mathcal{M}_i^{R^1}(M^{2n}, St(\Lambda) = \mathbb{D}^i(V^{2n-1}, \partial_0 V^{2n-1}) + \widehat{S}^i_{(2)}(V^{2n-1}, \partial_0 V^{2n-1}) +$$

$$+ \widehat{S}^{i+1}_{(2)}(V^{2n-1}, \partial_0 V^{2n-1}) + dim_{N(Z[\pi])}(H^i_{(2)}(V^{2n-1}, \partial_0 V^{2n-1}))$$

для $3 \leq i \leq 2n - 4$.

Список литературы

[1] D. Gol'tsov, V. Sharko *Semi-free R^1 action and Bott map*, - Збірник праць Інституту Математики Національної академії наук України, Т.6 №6, (2013), P. 224-235.

Метод трехмерного геометрического моделирования энергетических негармонических процессов и его применение в радиотехнике.

М. Н. Горбачев

(Национальный технический университет Украины, Киев, Украина)

E-mail address: `1lider.tk@gmail.com`

В современной радиотехнике с целью повышения КПД широко применяются ключевые методы усиления колебаний в широком диапазоне частот, например, в радиовещательных передатчиках, усилителях класса Д и других радиотехнических устройствах. Особенность ключевых режимов заключается в том, что энергетические периодические процессы в радиотехнических устройствах являются существенно негармоническими. Это значит, что напряжения, токи и составляющие полной мощности в силовых цепях этих устройств содержат бесконечный спектр гармоник, что значительно затрудняет анализ и расчет ключевых энергетических режимов.

Применяемые традиционно известные одномерные математические модели в виде активной P, реактивной Q и искажающей составляющих полной мощности S для исследования указанных энергетических ключевых режимов являются неэффективными, так как не позволяют исследовать эти процессы как единое целое.

В связи с этим был разработан новый метод – метод трехмерного геометрического моделирования указанных энергетических процессов. Этот метод основан на нахождении трехмерной геометрической модели этих процессов как физически единого целого в виде пространственной кривой (режимной траектории), которая расположена на сферической оболочке единичного радиуса. При этом режимная траектория рассчитывается и строится на основе аналитических выражений для нормированных координат x, y, z, указанных составляющих P, Q, T как проекций вектора полной мощности S в трехмерном евклидовом пространстве $E^{(3)}$:

$$x = \frac{(P(q))}{(S(q))}, \quad y = \frac{(Q(q))}{(S(q))}, \quad z = \frac{(T(q))}{(S(q))},$$

где q является переменным физическим параметром радиотехнического объекта (устройства или цепи, например, добротностью). В этом случае произвольная точка (x, y, z) на режимной траектории отображает вполне определенное энергетическое состояние указанного объекта.

В докладе рассмотрены примеры расчета и построения трехмерных геометрических моделей для радиотехнической цепи типа RL с переменной добротностью q при воздействии негармонических периодических испытательных сигналов, применяемых в радиотехнике (например, сигналов, имеющих форму прямоугольных импульсов, сигналов треугольной и трапецеидальной формы).

Показано, что в общем случае режимная траектория является неплоской сферической кривой. Разработанный метод является универсальным, более информативным и наглядным. Это позволяет его эффективно использовать на этапе расчета и проектирования ключевых энергетических режимов соответствующих радиотехнических устройств.

Классификация многомерных эластичных тканей с тензором кручения ранга 1

К.Р. Джукашев

(Тверской государственный университет, Тверь, Россия)

E-mail address: `zhukashev@gmail.com`

Многомерная три-ткань называется эластичной или тканью E, если в любой ее координатной лупе выполняется тождество эластичности $x(yx) = (xy)x$. В [1] было доказано, что эластичные три-ткани образуют собственный подкласс средних тканей Бола и найдены уравнения двух шестимерных три-тканей E: E_1 и E_2. Тензорные соотношения эластичных тканей мы рассматривали в работе [2].

Ткани E_1 и E_2 имеют специфическое строение тензора кручения: определяемая им производная алгебра одномерна. Мы обобщаем класс эластичных тканей ранга 1 на многомерный случай. Оказалось, что и в многомерном случае естественным образом выделяются два класса. В данной работе мы находим структурные уравнения этих тканей, интегрируем их и находим уравнения тканей ранга 1 в локальных координатах.

Уравнения ткани E_1^τ в локальных координатах примут вид:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + e^{x^2}(y^1 - \lambda_{ab} x^a y^b), \\ z^a &= x^a + y^a, \end{aligned}$$

а уравнения ткани E_2^τ в локальных координатах:

$$\begin{aligned} z^1 &= x^1 + y^1 + \frac{1}{3} b^1_{(a|b|c)} x^a x^c y^b - \frac{1}{3} b^1_{(ab)c} y^a y^b x^c + c^1_{bc} x^c y^b, \\ z^a &= x^a + y^a. \end{aligned}$$

Список литературы

[1] Шелехов, А.М.: *Об аналитических решениях уравнения $x(yx) = (xy)x$.* Матем. заметки **50** (1991), N 4, 132–140 (РЖМат, 1992, 5А550).

[2] Джукашев, К.Р.: *О три-тканях с эластичными координатными лупами.* Труды международного геометрического центра, т. 6 (2013), № 4, 52–80, Одесса, 2013

[3] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения:* Монография. - Тверь, Тверской государственный университет, 2010. - 308 с.

Эрмитовы и приближённо келеровы f-структуры на группах Ли

П. А. Дубовик

(БГУ, Минск, Беларусь)

E-mail address: `geometryk@gmail.com`

Метрические f-структуры в смысле К. Яно ($f^3 + f = 0$) на римановых многообразиях входят в число основных дифференциально-геометрических структур и являются фундаментальным объектом в обобщённой эрмитовой геометрии ([1]). Отметим также, что метрические f-структуры — частный случай *обобщённой почти эрмитовой структуры*, или GAH-структуры ранга r на (псевдо)римановом многообразии (M, g) ([1]). В работе рассмотрены метрические f-структуры следующих классов: *эрмитовы* ($T(X, Y) = 0$), *приближёно келеровы* f-структуры ($\nabla_{fX}(f)fX = 0$), где ∇ — связность Леви-Чивита римановой метрики g, T — композиционный тензор ([1],[2]). Пусть G — связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — соответствующая алгебра Ли, $\mathfrak{g}^{(1)}=[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, $\mathfrak{g}^{(2)}=[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$ — первый и второй идеал производного ряда, $Z(\mathfrak{g})$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$, g — левоинвариантная риманова метрика на G. Получены следующие результаты:

Теорема 1. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на группе Ли G удовлетворяет любому из условий*:

(i) $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathrm{Ker} f$;

(ii) $\mathrm{Im} f \subset \mathfrak{g}^{(1)}$, $\mathfrak{g}^{(2)} \subset \mathrm{Ker} f$;

(iii) $\mathrm{Im} f \subset Z(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{g}^{(1)}$;

Тогда f является эрмитовой f-структурой. При выполнении условия (iii) f является также приближенно келеровой f-структурой.

Теорема 2. *Пусть левоинвариантная метрическая f-структура f на группе Ли G удовлетворяет условию*: $\mathfrak{g}^{(1)} \subset \mathrm{Ker} f$. *Тогда f является приближённо келеровой f-структурой в том и только том случае, если* $[fX, f^2X] = 0$, $\forall X \in \mathfrak{g}$.

Указанные f-структуры имеются, например, на 6-мерной обобщённой группе Гейзенберга ([3]) и на 5-мерной группе Гейзенберга $H(2, 1)$ ([4]).

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко *Квазиоднородные многообразия и обобщённые почти эрмитовы структуры*. - Известия АН СССР: Математика. 47: 6, (1983), С. 1208–1223.

[2] В. В. Балащенко, Ю. Г. Никоноров, Е. Д. Родионов, В. В. Славский *Однородные пространства: теория и приложения: монография*. - Полиграфист, Ханты-Мансийск, (2008), 280 с.

[3] V. V. Balashchenko *Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group*. - Kragujevac Journal of Mathematics. 35: 2, (2011), P. 209–222.

[4] В. В. Балащенко, П. А. Дубовик *Левоинвариантные f-структуры на 5-мерной группе Гейзенберга* H(2,1). - Вестник Белорусского государственного университета. Серия 1, Физика. Математика. Информатика, (2013), № 3, С. 112-117.

О групповых свойствах n-мерных псевдоримановых пространств специального типа, допускающих проективные движения

З. Х. Закирова

(КГЭУ, Казань, Россия)

E-mail address: zolya_zakirova@mail.ru

В работе мы продолжаем исследование n-мерных псевдоримановых пространств $V^n(g_{ij})$ с сигнатурой $[+ + - - -.... - -]$, которые допускают проективные движения, то есть группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. Основной метод нахождения таких пространств был развит А.В. Аминовой. В работе [1] А.В. Аминова классифицировала все лоренцевы многообразия размерности ≥ 3, допускающие негомотетические инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования. Данная проблема не решена для псевдоримановых пространств с произвольной сигнатурой.

Напомним, что для того, чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, надо проинтегрировать уравнение Эйзенхарта (см. [2])

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i}. \tag{1}$$

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта, называются *$h-$ пространствами.*

Используя технику интегрирования в косонормальном репере (см. [1]), в работе [3] были найдены метрики $h-$ пространств типов [22111...1], [32111...1], [33111...1], [4111...1], [5111...1].

В данной работе доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Аффинная группа в $h-$ пространствах типов* [22111...1], [32111...1], [33111...1], [4111...1] [5111...1] *непостоянной кривизны состоит из гомотетий.*

Теорема 2. *Если $h-$ пространства типов* [22111...1], [32111...1], [33111...1], [4111...1] [5111...1] *допускают негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит подалгебру H_{r-1} инфинитезимальных гомотетий размерности $r-1$.*

Список литературы

[1] Аминова А.В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий*, Успехи Мат.Наук **50** (1995), 1(301), 69-142.

[2] Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия*- М.:ИЛ, 1948, 316 с.

[3] Закирова З.Х. *О некоторых псевдоримановых пространствах, допускающих проективные движения*, Тезисы докладов международной конференции «Геометрия в Одессе-2013» 27 мая – 1 июня 2013 г, с. 45.

Определение области устойчивости раздельного кольцевого двухфазного течения

В. Х. Кириллов, Н. П. Худенко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: khudenkon@mail.ru

Одним из эффективных способов взаимодействия фаз в контактных устройства тепломассобменных аппаратов является осуществление контактирования фаз при плёночном течении жидкости. Такие плёночные аппараты получили широкое применение во многих отраслях пищевой промышленности.

При вертикальном плёночном течении жидкости в контакте с газовым потоком имеет место два вида неустойчивости свободной поверхности: капиллярно-гравитационный, обусловленный силами поверхностного натяжения жидкости, и неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, за счёт сил давлений со стороны потока газа. Оба вида неустойчивости приводят к образованию крупных волн на поверхности раздела, дальнейшему их разрушению и выносу капельной влаги из аппарата. Данный эффект перекачки жидкости интенсифицируется при увеличении скорости газа. Такой каплеунос является негативной характеристикой плёночных аппаратов, работающих в интенсивном режиме.

Целью данного исследования является определение области устойчивости свободной поверхности плёнки плёнки жидкости при раздельном двухфазном кольцевом течении. Пренебрегая касательными напряжениями на поверхности раздела фаз жидкость-газ, учитывая, что поверхностная неустойчивость обусловлена нормальными напряжениями, можно считать, что в обеих фазах имеют место потенциальные течения.

Исследование кольцевого двухфазного течения проводится в цилиндрических координатах. Для определения потенциалов скоростей решается краевая задача, содержащая уравнения неразрывности, интегралы Коши-Лагранжа для каждой из фаз; краевые условия формулируются на стенках канала и в ядре газового потока, а также на поверхности раздела.

На свободной поверхности жидкости задаётся волновое возмущение

$$h(t,x) = h_0 + \alpha e^{ik(x-ct)},$$

где $c = c_1 + c_2 i$.

Подставив данное возмущение в исходную краевую задачу, получим соответствующее дисперсное соотношение, в котором разделятся действительная и мнимая части. Учитывая, что при $c_2 > 0$ имеет место неустойчивость поверхности раздела, предельную скорость газа, выше которой развивается неустойчивость кольцевого течения, определяем из условия $c_2 = 0$:

$$V_* = \left[\frac{\sigma k}{\rho_2}\frac{I_1(kh_0)}{I_0(kh_0)}\left(1 - \frac{1}{k^2h_0^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} - U_0.$$

Список литературы

[1] Дж. Хьюитт, Н. Холл-Тейлор. Кольцевые двухфазные течения // М.: Энер-гия, (1974), 408 с.

[2] В. Х. Кириллов. Гидродинамика и тепломассообмен в двухфазных потоках плёночных аппаратов для холодильной техники // Одесса, (1994). Докт дис.

ξ-инвариантные формы Ли на почти эрмитовых многообразиях

В. Ф. Кириченко

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: `highgeom@yandex.ru`

Е. В. Черевко

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: `cherevko@usa.com`

Пусть $\mathcal{S} = \{g, J\}$ – почти эрмитова структура на римановом многообразии M размерности $2n$. Здесь $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, $\mathfrak{X}^*(M)$ – дуальный модуль дифференциальных 1-форм на M, d – оператор внешнего дифференцирования, δ – оператор кодифференцирования, $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ – риманова метрика на M, ∇ – оператор ковариантного дифференцирования в римановой связности. $J^2 = -\mathrm{id}$, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$ (эндоморфизм J называется *почти комплексной структурой*). Построим на многообразии M дифференциальную 1-форму

$$\omega = \frac{1}{n-1}\delta\Omega \circ J,$$

называемую *формой Ли*. Здесь $\Omega = \langle X, JY \rangle$ – *фундаментальная форма* структуры. Векторное поле ξ, дуальное форме Ли, называется *вектором Ли*. Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется *торсообразующим*, если $\nabla\xi = \rho\mathrm{id} + a \otimes \xi$ для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. Такое поле называется *концкурклярным*, если $da = 0$, называется *спецконциркулярным*, если $a = 0$, и называется *рекуррентным*, если $\rho = 0$.

Теорема. *Пусть ξ – торсообразующий вектор Ли почти эрмитова многообразия M, ω – соответствующая форма Ли этого многообразия. Тогда форма ω будет инвариантной относительно действия локальной однопараметрической группы диффеоморфизмов, порожденной векторным полем ξ, тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_\xi(\omega)X = -||\omega||^2 a(X) - \rho\omega(X).$$

Следствие 1. *Если M – обобщенное многообразие Хопфа, ω – ξ-инвариантная форма Ли, то*

$$||\omega||^2 a(X) + \rho\omega(X) = 0.$$

Следствие 2. *Допустим, что ξ – спецконциркулярное векторное поле. Тогда*

$$\nabla_\xi(\omega)X = -\rho\omega(X).$$

Следствие 3. *Если ξ – рекуррентное векторное поле. Тогда*

$$\nabla_\xi(\omega)X = -||\omega||^2 a(X).$$

О дивергенции тензора концикулярной кривизны левоинвариантных (псевдо)римановых метрик групп Ли малых размерностей

П. Н. Клепиков, О. П. Хромова

(АлтГУ, Барнаул, Россия)

E-mail address: askingnetbarnaul@gmail.com, khromova.olesya@gmail.com

Изучение конформно-инвариантных свойств римановых многообразий является одной из наиболее актуальных задач современной дифференциальной геометрии. В классе конформных преобразований можно выделить нетривиальные конформные преобразования, которые переводят геодезические окружности (кривые, у которых первая кривизна постоянна, а остальные кривизны равны нулю) в геодезические окружности и называются концикулярными.

Начало изучению концикулярных преобразований положено К.Яно в [1]. Также К.Яно ввел в рассмотрение тензор концикулярной кривизны, являющийся инвариантом концикулярных преобразований. Продолжение исследований концикулярных преобразований, свойств тензора концикулярной кривизны и его дивергенции нашло отражение в работах многих математиков (см., например, [2, 3, 4]).

Настоящая работа посвящена изучению свойств тензора концикулярой кривизны и его дифференциальных операторов на 3-мерных и 4-мерных группах Ли с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками. Получена полная классификация групп Ли малых размерностей с левоинвариантными (псевдо)римановыми метриками и бездивергентным тензором концикулярой кривизны.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–2263.2014.1), Grant of the Russian Federation for the State Support of Researches (Agreement No 14.B25.31.0029), а также Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Список литературы

[1] K. Yano *Concircular geometry, I-IV*,- Proc. Imp. Acad. Tokyo. 16, (1940), P. 195-200, 354-360, 442-448, 505-511.

[2] В. Ф. Кириченко, Л. И. Власова *Концикулярная геометрия приближенно келеровых многообразий*,- Математический сборник. 193:5, (2002), С. 53-76.

[3] Н. С. Синюков *Геодезические отображения римановых пространств*,- М., Наука, (1979).

[4] Z. Ahsan, S. A. Siddiqui *Concircular Curvature Tensor and Fluid Spacetimes*,- Int. J. Theor. Phys. 48, (2009), P. 3202–3212.

Конформные дифференциальные инварианты

Н. Г. Коновенко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: konovenko@ukr.net

В данной работе мы предлагаем схему для распознавания форм областей на плоскости, оснащенных некоторой геометрической структурой. Эта схема во многом аналогично той, которая была использована в работе ([2]) для описания пространства форм. Мы рассматриваем случай, когда внутри односвязной области, ограниченной гладкой кривой, задана дифференциальная 1-форма.

Мы сводим задачу распознавания форм областей к локальной классификации дифференциальных 1-форм на плоскости относительно группы $SL_2(\mathbb{C})$ конформных дробно линейных преобразований. Мы описываем поле рациональных конформных дифференциальных инвариантов. Именно такие инварианты, согласно ([1]), разделяют регулярные орбиты.

Нами показано, что это поле порождается двумя инвариантными дифференцированими

$$\delta = t^{-1}\left(u\frac{d}{dx} + v\frac{d}{dy}\right), \qquad \widetilde{\delta} = t^{-1}\left(-v\frac{d}{dx} + u\frac{d}{dy}\right),$$

а также двумя дифференциальными инвариантами 1-го порядка

$$J_1 = \frac{-v_x + u_y}{u^2 + v^2}, \qquad J_2 = \frac{u_x + v_y}{u^2 + v^2}$$

и двумя инвариантами 2-го порядка R и Φ, где (x, y, u, v) - канонические координаты в в $T^*\mathbb{R}^2$, а $t = u^2 + v^2$. Это приводит к классификации регулярных дифференциальных форм.

Обозначим через F - конформный дифференциальный инвариант, а через γ - дифференциальную 1-форму. Пусть $F(\gamma)$ - значение этого инварианта на форме γ. Скажем, что росток дифференциальной 1-формы γ регулярен, если значения $J_1(\gamma)$, $J_2(\gamma)$ функционально независимы.

В этом случае значения дифференциальных инвариантов второго порядка являются функциями от $J_1(\gamma)$ и $J_2(\gamma)$, скажем

$$\begin{gathered}
\delta(J_1)(\gamma) = A_1\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\delta(J_2)\gamma = A_2\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\widetilde{\delta}(J_1)\gamma = B_1\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\widetilde{\delta}(J_2)\gamma = B_2\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
R(\gamma) = r\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big),\\
\Phi(\gamma) = f\big(J_1(\gamma), J_2(\gamma)\big).
\end{gathered}$$

Теорема 1. *Ростки регулярных 1-форм конформно эквивалентны в том и только том случае, когда соответствующие функции A_1, A_2, B_1, B_2, r и f - совпадают.*

Список литературы

[1] B. Kruglikov, V. Lychagin. Global Lie-Tresse theorem // (2013), 48p., http://arxiv.org/pdf/1111.5480.pdf

[2] E. Sharon, D. Mumford. 2D-Shape Analysis Using Conformal Mapping // International Journal of Computer Vision 70(1), p. 55–75, (2006) // DOI: 10.1007/s11263-006-6121-z

Голоморфные торсообразующие векторные поля на почти эрмитовых многообразиях

В. М. Кузаконь

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

Пусть M – n-мерное гладкое многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ – $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, d – оператор внешнего дифференцирования, $\mathfrak{L}_X$ – оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X. Все многообразия, тензорные поля и т.п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1. *[2] Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется* торсообразующим, *если*

$$\nabla\xi = \rho \mathrm{id} + a \otimes \xi$$

и называется псевдо-торсообразующим, *если $\nabla\xi = \rho J + a \otimes \xi$ для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. Дифференциальную 1-форму a и функцию ρ назовем* характеристическими. *Торсообразующее векторное поле называется* концикулярным, *если $da = 0$, и называется* спецконциркулярным, *если $a = 0$.*

Пусть $\mathcal{S} = \{g, J\}$ – почти эрмитова (короче, $A\mathcal{H}$-) структура на M, $J^2 = -\mathrm{id}$, $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$(эндоморфизм J называется *почти комплексной структурой*)

Определение 2. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии (M, J, g) назовем* абсолютным, *если векторное поле $J\xi$ псевдо-торсообразующее.*

Определение 3. *Векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии M называется* голоморфным, *если эндоморфизм J ξ-инвариантен, и называется* биголоморфным, *если, кроме того, он $(J\xi)$-инвариантен.*

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на квазикелеровом многообразии спецконциркулярно.*

Теорема 2. *Биголоморфное абсолютно торсообразующее векторное поле на эрмитовом многообразии спецконциркулярно.*

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко , В. М. Кузаконь *О геометрии голоморфных торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях*,- Укр. матем. ж., 2013, т.65, No 7, с.1005-1008.

[2] А. В. Аминова *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*,- Москва, Янус-К, 2003, 619 с.

[3] A. Gray , Hervella *The sixteen classes of almost Hermitian manifolds and their linear invariants* ,-Ann. Math. pure and appl. 123 (1980), 35-58.

Инварианты гладкой субмерсии $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$

В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов

(ОНАПТ, Одесса, Украина; ТвГУ, Тверь, Россия)

E-mail addresses: kuzakon_v@ukr.net; amshelekhov@yandex.ru

Дифференциальные инварианты слоений изучались одним из авторов настоящей статьи в работах [1]–[8], методами, описанными в работах [9], [10]. В [11] мы показали, как исследовать геометрию гладких слоений классическим методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана: нашли канонический вид структурных уравнений гладкой субмерсии и выяснили геометрический смысл проведенной канонизации. Кроме того, в [11] детально рассматрено расслоение двумерных поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве, найдены его дифференциальные инварианты относительно группы движений D^3, выяснен их геометрический смысл.

В настоящей работе методом Картана мы находим инварианты гладкой субмерсии $f : \mathbb{E}^n \to \mathbb{R}$ относительно псевдогруппы $D^n \times \mathcal{Q}$, где D^n — группа евклидовых движений, $\mathcal{Q}$ — псевдогруппа локальных диффеоморфизмов на прямой.

Для этого мы, в отличие от классического подхода, используем в $\mathbb{E}^n$ подвижной ортогональный репер, в котором все векторы, кроме вектора e_n , являются единичными. Этот вектор направлен по нормали к слою слоения Φ, определяемого субмерсией. Такой подход дает возможность рассматривать инварианты псевдогруппы Q как инварианты калибровки $e_n \to \lambda e_n$.

Список литературы

[1] Кузаконь В.М., Рахула М.О. Инварианты расслоения локально-евклидовой поверхности. "Украинский геометрический сборник", 21, 1978, с. 44–50.

[2] Кузаконь В.М. Тензорные инварианты сечний субмерсий с дополнительными структурами. Математичнi СтудiЁ (2002), Т.17, 2, 199-210.

[3] Кузаконь В.М. Вычисление дифференциальных инвариантов второго порядка субмерсий евклидовых пространств. Мат. методи та фiз.-мех. поля. 2005, Т. 48, 4, с. 95-99.

[4] Кузаконь В.М. Метрические дифференциальные инварианты расслоения кривых на плоскости. Збiрник праць Iнституту математики НАН України. 2006, Т. 3, 3, с. 201-212.

[5] Кузаконь В.М., Стрельцова И.С. Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Минковского. Мат. Методы та фiз.-мех. поля, 2007, Т. 43, 1, с. 49-54.

[6] Кузаконь В.М. Дифференциальные инварианты слоений. Доклады Национальной Академии Наук Украины. 2009, 4, с. 25-27.

[7] Кузаконь В.М. Дифференциальные инварианты расслоений кривых на плоскости Лобачевского. Збiрник праць Iн-ту математики НАН України, 2009, Т.6, 2, с.82-90.

[8] Кузаконь В.М. Диференцiальнi iнварiантi розшарування кривих на площинi вiдносно $\mathbb{R}$-конформно-метричної групи. Прикл. проблеми мех. и мат. – 2008. – Вип. 6. – С. 61–65.

[9] Алексеевский Д.В., Виноградов А.М., Лычагин В.В. Основные идеи и понятия дифференциальной геометрии. Современные проблемы математики. Фудаментальные направления. Геометрия-1. Т.28. Москва, 1988, 289 с.

[10] Красильщик И.С., Лычагин В.В., Виноградов А.В. Введение в геометрию нелинейных дифференциальных уравнений, - Москва, "Наука (1986), 336 с.

[11] Кузаконь В.М., Шелехов А.М. Инварианты гладких слоений (в печати).

Особенности F-планарных отображений квазисимплектических пространств

И.Н.Курбатова, М. В. Добик

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

Мы изучаем F-планарные отображения, которые были введены Синюковым Н.С. и Микешем Й. в ([2]).

Говорят, что риманово пространство S_n наделено симплектической структурой([3]), если на нём задано поле тензора типа $(0,2)$ F_{ij}, удовлетворяющего условиям:

$$F_{ij,k} + F_{jk,i} + F_{ki,j} = 0, \quad F_{ij} + F_{ji} = 0, \quad F_{ij} = F_j^{\alpha} g_{\alpha i}, \quad |F_i^h| \neq 0,$$

где "," - знак ковариантной производной по связности пространства S_n.

Мы рассматриваем структуру более общего типа, отказавшись от требования невырожденности аффинора, и называем ее *квази-симплектической*, а риманово пространство, допускающее такую структуру, - *квази-симплектическим*.

Далее рассматриваются F-планарные отображения римановых пространств в предположении, что аффинор F определяет квази-симплектическую структуру на V_n и $\overline{V}_n$.

Мы строим так называемое *инвариантное преобразование*([4]) , которое позволяет из пары квази-симплектических пространств, находящихся в нетривиальном F-планарном отображении, построить новую пару квази-симплектических многообразий, также находящихся в нетривиальном F-планарном отображении.

Отметим, что голоморфно проективное отображение келеровых пространств с сохранением почти комлексной структуры ([1]) представляет собой частный случай изучаемых нами отображений. Известно, что между любыми келеровыми пространствами постоянной голоморфной кривизны можно установить нетривиальное голоморфно-проективное отображение([1]). Поэтому беря в качестве исходной пары квази-симплектических многообразий келеровы пространства постоянной голоморфной кривизны, находящиеся в голоморфно-проективном отображении, и применяя к этой паре наше инвариантное преобразование, получаем новую пару уже даже не Эйнштейновых, не келеровых, но квази-симплектических пространств, состоящих в нетривиальном F-планарном отображении. Найдена их внутренняя тензорная характеристика.

Список литературы

[1] J.Mikes, A.Vanzurova, I.Hinterleitner. Geodesic Mappings and Some Generalizations//Palacky University, Olomouc, Faculty of Science. Olomouc, 2009.

[2] Микеш Й., Синюков Н.С. О квазипланарных отображениях пространств аффинной связности // Известия ВУЗов, Математика, (1983), №1(248),56-61.

[3] Фоменко А.Т. Дифференцальная геометрия и топология.Дополнительные главы// М.: изд-во Моск. ун-та, (1983).

[4] Синюков Н.С. Геодезические отображениях римановых пространств // Москва "Наука", (1979).

Квази-геодезические отображения специальных римановых пространств

И. Н. Курбатова, О. Т. Сисюк

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

Квази-геодезические отображения были введены академиком А.З. Петровым в ([1]) при исследовании проблемы моделирования (в смысле поведения пробных частиц) физических полей. В результате А.З. Петров пришел к задаче квази-геодезических отображений римановых пространств V_4 сигнатуры Минковского. В ([2]) эти отображения были обобщены на случай произвольной размерности и сигнатуры.

Пусть римановы пространства $\left(V_n, g_{ij}\right)$ и $\left(\overline{V}_n, \overline{g}_{ij}\right)$ находятся в квази-геодезическом отображении (КГО). Тогда их основные уравнения в общей по отображению системе координат $\left(x^i\right)$ имеют вид:

$$\overline{\Gamma}^h_{ij}(x) = \Gamma^h_{ij}(x) + \psi_{(i}(x)\delta^h_{j)}(x) + \varphi_{(i}(x)F^h_{j)}(x)$$

$$F_{(ij)} = \overline{F}_{(ij)} = 0,$$

$$F_{(ij)} = F^\alpha_j g_{\alpha i}, \overline{F}_{(ij)} = F^\alpha_j \overline{g}_{\alpha i},$$

где $\overline{\Gamma}^h_{ij}, \Gamma^h_{ij}$ - компоненты объектов связности пространств $\overline{V}_n$ и V_n с метрическими тензорами $\overline{g}_{ij}$ и g_{ij}, соответственно; ψ_i, φ_i - ковекторы; F^h_i- аффинор; круглыми скобками обозначено симметрирование. При $\varphi_i = 0$ квази-геодезическое отображение вырождается в геодезическое ([4]), при $\psi_i = 0$ мы называем его каноническим ([3]).

Мы изучали случаи сохранения первой и второй ковариантной производной аффинора F^h_i относительно рассматриваемых отображений при условии, что аффинор задает на $\overline{V}_n$ и V_n e-структуру ([4]), т.е. $F^h_\alpha F^\alpha_i = e\delta^h_i$, где $e = \pm 1, 0$. При этом сохранение первых ковариантных производных при КГО устанавливает зависимость между векторами ψ_i и φ_i. Доказано, что сохранение относительно КГО и вторых ковариантных производных аффинора возможно только для абсолютно параллельной аффинорной структуры.

Канонические КГО при условии сохранения относительно них первых и вторых ковариантных производных аффинора в случае $e = 0$ возможны только для пространств, в которых имеют место соотношения

$$F^h_{\alpha,j} F^\alpha_i = 0, \quad F^h_{i,\alpha} F^\alpha_j = 0,$$

причем вектор φ_i связан с аффинором соотношениями $\varphi_\alpha F^\alpha_{i,j} = 0$. Здесь "," - знак ковариантной производной по связности Γ^h_{ij}.

При $e = -1$ условия сохранения первых и вторых ковариантных производных приводят к тривиальности канонических КГО, т.е. $\varphi_i = 0$.

Список литературы

[1] А. З. Петров. Моделирование физических полей // Гравитация и теория относительности, (1968), вып.4-5. Изд. Казанск. ун-та. С. 7-21.

[2] И. Н. Курбатова. Квази-геодезические отображения римановых пространств // Дисс. на соиск. учен. степ. к. ф.-м. н. Одес. ОГУ, 1979 99 с.

[3] И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств // Proc. Intern. Geom. Center.Vol.7,No.1,2014.

[4] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.

Почти эквидистантные параболически келеровы пространства

И. Н. Курбатова, М. Хаддад

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: irina.kurbatova27@gmail.com

При изучении специального вида квази-геодезических отображений параболически келеровых пространств (мы назвали их каноническими ([2])) показано, что почти эквидистантные основного типа параболически келеровы пространства такие отображения всегда допускают.

Напомним,что четномерное риманово пространство K_n с метрическим тенозром $g_{(ij)}(x)$ называется *параболически келеровым* (в терминологии В.В. Вишневского ([1]) - *A-пространством*), если на нем определена аффинорная структура $F_i^h(x)$ максимального ранга $m(n = 2m)$, удовлетворяющая условиям:

$$F_i^\alpha F_\alpha^h = 0, \quad F_{(ij)} = 0, \quad F_{ij} = F_j^\alpha g_{\alpha i},$$

$$F_{i,j}^h = 0$$

где $<,>$ - знак ковариантной производной по связности пространства K_n.

Эквидистантное риманово пространство ([3]) определяется наличием в нем векторного поля $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющего уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho g_{ij}$. Здесь по необходимости $\rho = const$. Основному типу соответствует $\rho \neq 0$.

Мы назвали параболически келерово пространство *почти эквидистантным*, если в нем существует векторное поле $\varphi_i \neq 0$, удовлетворяющее уравнениям $\varphi_{i,j} = \rho F_{ij}$. Здесь также по необходимости $\rho = const$.

Нетрудно видеть, что если в эквидистантном основного типа K_n $\varphi_{\bar{i}} \neq 0$, то оно будет и почти эквидистантным основного типа, так как тогда $\varphi_{\bar{i},j} = \rho F_{ij}$. Обратное, вообще говоря, неверно. То есть класс почти эквидистантных параболически келеровых пространств гораздо шире класса эквидистантных.

Аналогично тому, как это сделано в [4], мы получили метрики почти эквидистантных параболически келеровых пространств в специальной системе координат.

Список литературы

[1] В. В. Вишневский. Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения ВИНИТИ. М., Т.73, 2002 5–64.

[2] И. Н. Курбатова. Канонические квази-геодезические отображения параболически келеровых пространств.//Proc. Intern. Geom. Center.Vol.7,No.1,2014.

[3] Н. С. Синюков. Геодезические отображения римановых пространств // М.: Наука, Москва, 1979. 256 с.

[4] М. Шиха, Й. Микеш. Об эквидистантных параболически келеровых пространствах.//Тр.геом.семин.22,Казань(1994).с.97-107.

Обобщенные шеддоки

А. Д. Милка, В. А. Горькавый, Д. В. Калинин

(ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина)

E-mail address: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

В докладе будет представлен обнаруженный А.Д. Милкой ряд *обобщенных шеддоков*. Каждый обобщенный шеддок $S(n, \beta)$ представляет собой невыпуклый многогранник без самопересечений, составленный из двух оснований, конгруэнтных правильному n-угольнику со сторонами длины 1, и бокового "пояса", образованного $2n$ треугольными гранями, конгруэнтными равностороннему треугольнику со сторонами длины 1, и $2n$ "лепестками", конгруэнтными ромбу со сторонами длины 1, переломанному вдоль ребра длины $L = L(\beta)$ с образованием двугранного угла β. Указанный ряд обобщенных шеддоков включает ортошеддок А. Дуади $S(n, \frac{\pi}{2})$ [1] и обобщающее его семейство шеддоков $\{S(3, \beta)\}_{\beta \in I}$, изученое А.Д. Милкой в [2]. При каждом $n > 3$ также возникает непрерывное семейство обобщенных шеддоков $\{S(n, \beta)\}_{\beta \in I}$, во многом наследующих комбинаторные, симметрийные и метрические свойства упомянутых классических шеддоков.

Установлено, что при каждом $n \geq 3$ в семействе $\{S(n, \beta)\}_{\beta \in I}$ существует единственный обобщенный шеддок $S(n, \beta_0)$, допускающий нетривиальное бесконечно малое изгибание, при котором векторы скоростей предполагаются наследующими свойства симметрии многогранника, а в вершинах оснований направлены перпендикулярно основаниям.

Кроме того, для непрерывной деформации нежесткого обобщенного шеддока $S(n, \beta_0)$ в семействе $\{S(n, \beta)\}_{\beta \in I}$ построено аппроксимирующее её специальное непрерывное линейное изгибание многогранника $S(n, \beta_0)$, при котором переламыванию подвергаются только лепестки $S(n, \beta_0)$ с расположением подвижных ребер излома в окрестности граничных ребер лепестков.

В докладе [3] на Международном математическом конгрессе, как и ранее в докладах [4], [5], отмечалось что ортошеддок Дуади представляет собой пример *модельного флексора* – неизгибаемого по Коши многогранника, физическая модель которого является неустойчивой и допускает значительные обратимые непрерывные деформации без видимого искажения материала подобно моделям изгибаемых многогранников – теоретических флексоров Коннели, Штефана и др. Аналогичный эффект модельной флексорности присущ и обобщенным шеддокам $S(n, \beta_0)$. Подобно другим известным примерам модельных флексоров – звездчатым пирамидам Александрова-Владимировой, указанный эффект может объясняется как нежесткостью многогранника, так и наличием упомянутых выше специальных линейных изгибаний.

Список литературы

[1] М. Берже *Геометрия. Т.1.* - М.: Мир, (1984), 560 с.

[2] А. Д. Милка *Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников* // Математическая физика, анализ, геометрия, (1994), 1, С. 116-130.

[3] А. Д. Милка *Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников* // International Congress of Mathematicians. Berlin, August 18-27, 1998. Abstracts of Short Communications and Poster Sessions. - Berlin, (1998).

[4] А. Д. Милка *Линейные изгибания правильных выпуклых многогранников* // Міжнародна конференція з геометрії "в цілому". Тези доповідей. - Черкаси, (1995), С. 61-62.

[5] А. Д. Милка, Р. З. Рамазанов *Обобщение теоремы Адриена Дуади о многограннике шеддок* // Міжн. конф. з геометрії "в цілому". Тези доповідей. - Черкаси, (1997), С. 25-26.

О геометрии многообразий неотрицательной кривизны

А. Я. Нарманов, Б. А. Турсунов

(НуУз, Ташкент, Узбекистан)

E-mail address: narmanov@yandex.ru, t.bayramali@yandex.ru

Пусть M - гладкое риманово многообразие размерности n, g - риманова метрика, T_pM - касательное пространсво в точке $p \in M$, ∇ - связность Леви-Чивита, определенная римановой метрикой g. Всюду в работе гладкость означает гладкость класса C^∞.

Пусть F-слоение размерности k, где $0 < k < n$ [2]. Обозначим через L_p слой слоения F, проходящий через точку $p \in M$, через T_qF - касательное пространство слоя L_p в точке $q \in L_p$, через $H(q)$ - ортогональное дополнение подпространства T_qF. В результате возникают подрасслоения $TF = \{T_qF\}$, $TH = \{H(q)\}$ касательного расслоения TM и имеем ортогональное разложение $TM = TF \oplus H$. Таким образом каждое векторное поле X разложимо в виде: $X = X^v + X^h$, где $X^v \in TF$, $X^h \in TH$. Если $X^h = 0$ (соответственно $X^v = 0$), то поле X называется вертикальным (соответственно горизонтальным) векторным полем.

В этой работе рассмотрим слоение, порожденное субмерсией и изучим связь между секционными кривизнами многообразий M и слоев.Изучению геометрии и топологии слоений, порожденных субмерсиями, посвящены многочисленные исследования [1-4], в частности в работе [3] получены фундаментальные уравнения субмерсии.

Напомним, что дифференцируемое отображение $f : M \to B$ максимального ранга, где M, B - гладкие многообразия разметности n, m соответственно, $n > m$, называется субмерсией. По теореме о ранге дифференцируемого отображения для каждой точки $p \in B$ польный прообраз $f^{-1}(p)$ является подмногообразием размерности $k = n - m$.

Пусть $f : M \to R^m$-дифференцируемое отображение максимального ранга. Случай, когда $m = 1$ изучена в работе [4]при условии, что для каждого вертикального векторного поля X выполнено условие $X(|gradf|^2) = 0$, т.е. когда длина градиентного векторного поля постоянна на каждом слое постоянна. Отображение $F : M \to R^m$ задается с помощью m функций:

$$f_i : M \to R^1, i = 1, 2, ..., m. \tag{1}$$

Следующая теорема показывает связь между секционными кривизнами мнообразия M и подмногообразий $L_p = f^{-1}(p), p \in R^m$.

Теорема. Пусть M - многообразие неотрицательной (положительной) секционной кривизны, $f : M \to R^m$ - дифференцируемое отображение максимального ранга, и $X(|gradf_i|^2) = 0$ для каждого вертикального векторного поля X для всех $i = 1, 2, ...m$. Тогда каждый слой слоения $F(L_p = f^{-1}(p), p \in R^m)$ является подмногообразием неотрицательной (положительной) секционной кривизны.

Список литературы

[1] Каипназарова Г., Нарманов А. Топология слоений, порожденных поверхностями уровня. Узбек. Матем. журнал,2008,№2, С.53-60.

[2] Hermann R. A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds to be a fiber bundle. Proc. Amer. Math. Soc.11 (1960), 236-242.

[3] O'Neil B. The Fundamental equations of a submersions. Michigan Mathematical Journal, v.13, 1966, p.459-469

[4] Tondeur Ph. Foliations on Riemannian manifolds. Springer-Verlag, New York, 1988.

О параллельных перенесениях на распределении плоскостей

О. М. Омельян

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
Калининград, Россия)

E-mail address: `olga_omelyan2002@mail.ru`

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $R = \{A, A_I\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

а базисные формы $\omega^I, \omega_I, \omega_I^J$ проективной группы $GP(n)$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I,\ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,\ D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

Продолжим рассмотрение распределения m-мерных плоскостей P_m. Индексы в работе принимают следующие значения : $i, \dots = \overline{1, m}$; $a, \dots = \overline{m+1, n}$. В ассоциированном с распределением расслоении $G(NS_n)$ выделяются четыре главных фактор-расслоения. В этом расслоении задана связность объектом связности $\Gamma = \{\Gamma_{jk}^i, \Gamma_{ja}^i, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}, \Gamma_{bi}^a, \Gamma_{bc}^a, \Gamma_{aj}^i, \Gamma_{ab}^i, \Gamma_{ai}, \Gamma_{ab}\}$.

Произведено композиционное оснащение распределения NS_n. Выражения для дифференциалов точек оснащающих плоскостей B_a, B_i имеют вид:

$$dB_a = (\dots)_a^b B_b + (t_{aj}^i \omega^i + t_{ab}^i \omega^b) B_i + ((t_{ai} - \lambda_j t_{ai}^j)\omega^i + (t_{ab} - \lambda_i t_{ab}^i)\omega^b)A,$$

$$dB_i = (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (t_{ij}\omega^j + t_{ia}\omega^a),$$

где объект t называется тензором неспециальных смещений. Ранее было показано, что распределение плоскостей NS_n и его композиционное оснащение индуцируют в ассоциированном расслоении $G(NS_n)$ групповую связность $\overset{0}{\Gamma}$, а также пучок связности 1-го с объектоми $\overset{1}{\Gamma}$.

Обращая в нуль ковариантные производные $\nabla_J \lambda$ оснащающего тензора λ в ассоциированной связности Γ получим

$$\overset{1}{\Gamma}_{ij} = \lambda_{ij} + \lambda_k \Gamma_{ij}^k, \qquad \overset{1}{\Gamma}_{ia} = \lambda_{ia} + \lambda_j \Gamma_{ia}^j,$$

$$\overset{1}{\Gamma}{}_{aj}^{i} = \lambda_{aj}^i - \lambda_a^k \Gamma_{kj}^i + \lambda_b^i \Gamma_{aj}^b, \qquad \overset{1}{\Gamma}{}_{ab}^{i} = \lambda_{ab}^i - \lambda_a^j \Gamma_{jb}^i + \lambda_c^i \Gamma_{ab}^c, \dots$$

Выражения для дифференциалов точек B_a, B_i, записанные с помощью ковариантных дифференциалов $\overset{1}{\nabla} \lambda$ оснащающего тензора λ в пучке связностей $\overset{1}{\Gamma}$, имеют вид:

$$dB_a = (\dots)_a^b B_b + (\overset{1}{\nabla} \lambda_a^i + t_{aJ}^i \omega^J) B_i + (\overset{1}{\nabla} \lambda_a - \lambda_i \overset{1}{\nabla} \lambda_a^i + (t_{aI} - \lambda_j t_{aI}^j)\omega^I)A,$$

$$dB_i = (\dots)_i^j B_j + (\dots)_i^a B_a + (\overset{1}{\nabla} \lambda_i + t_{iJ}\omega^J)A.$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Плоскость Картана C_{n-m-1} переносится параллельно тогда и только тогда, когда она смещается в нормали 1-го рода Нордена P_{n-m}, причем перенесение ($\overset{1}{\nabla} \lambda^i_a|_\rho = 0$) осуществляется в пучке групповых подсвязностей $\{\Gamma_0, \overset{1}{\Gamma}{}^{i}_{aJ}\}$, если композиционное оснащение b-специальное. Нормаль 2-го рода Нордена N_{m-1} переносится параллельно в пучке групповых подсвязностей $\{\overset{0}{\Gamma}{}^{i}_{jK}, \overset{1}{\Gamma}_{iJ}\}$ тогда и только тогда, когда она смещается: а) в гиперплоскости Бортолотти P_{n-1}, если композиционное оснащение a-специальное ($\overset{1}{\nabla} \lambda_i|_\rho = 0$); б) произвольно в случае a-неспециального композиционного оснащения.*

О существовании средних три-тканей Бола с канонической почти редуктивной структурой

Е. А. Оноприенко

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: katrinonoprienko@mail.ru

Рассматриваются средние три-ткани Бола с ковариантно постоянным тензором кривизны, которые обозначаются нами $B_m^{\triangledown}$. Так как тензор кривизны ткани Бола является существенной частью тензора кривизны связности Черна ([1]), то тензор кривизны этой связности также является ковариантно постоянным. Будем говорить, что многообразие аффинной связности несет почти редуктивную структуру, если тензор кривизны этой связности является ковариантно постоянным. Таким образом, многообразие ткани $B_m^{\triangledown}$ является почти редуктивным пространством, для которого связность Черна является канонической почти редуктивной связностью. Известно ([1]), что на базе третьего слоения средней ткани Бола имеется симметрическая структура, определяемая сердцевиной этой ткани. Таким образом, с тканью $B_m^{\triangledown}$ связаны две структуры — симметрическая на базе третьего слоения ткани и почти редуктивная на многообразии ткани.

Пусть, как обычно ([1], стр.9), слоения три-ткани $B_m^{\triangledown}$ на многообразии размерности $2r$ заданы уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0,$$

а структурные уравнения имеют вид ([1], стр.16):

$$\begin{aligned} d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \omega_j^i + a^i_{jk}\, \underset{1}{\omega}^j \wedge \underset{1}{\omega}^k, \\ d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \omega_j^i - a^i_{jk}\, \underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{2}{\omega}^k, \\ d\omega^i_j &= \omega^k_j \wedge \omega^i_k + b^i_{jkl}\, \underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{2}{\omega}^l, \end{aligned}$$

здесь и далее $i, j, k = 1, 2, 3 \ldots r$. Верна

Теорема 1. *Тензоры кручения и кривизны ткани* $B_m^{\triangledown}$ *связаны следующими дифференциальными и конечными соотношениями:*

$$\nabla a^i_{jk} = -b^i_{[jk]\ell}\left({}^{\ell} - {}^{\ell}\right), \nabla b^i_{jkl} = 0; \tag{1}$$

$$b^i_{j(kl)} = 0, \quad b^i_{[jk\ell]} = 2a^m_{[jk}a^i_{|m|\ell]}, \quad a^p_{jk}b^i_{p\ell m} = a^i_{pk}b^p_{j\ell m} - a^i_{pj}b^p_{k\ell m},$$
$$b^i_{jkp}a^p_{\ell m} = 0, \quad b^i_{jkp}b^p_{lmq} = 0, \quad b^i_{prs}b^p_{jkl} = b^i_{pkl}b^p_{jrs}.$$

Эта система замкнута относительно операции внешнего дифференцирования. Следовательно, ткани $B_m^{\triangledown}$ существуют с произволом N постоянных, где N — число независимых пфаффовых уравнений (1) — определяется из приведенной системы конечных соотношений. Таким образом, классификация тканей $B_m^{\triangledown}$ сводится к анализу этих соотношений, то есть к классификации соответствующих алгебр Бола.

Список литературы

[1] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения.* (Тверь: Твер. гос. ун-т., 2010)

О спектре оператора кривизны конформно плоских левоинвариантных римановых метрик 4-мерных групп Ли

Д. Н. Оскорбин, Е. Д. Родионов, О. П. Хромова

(АлтГУ, Барнаул, Россия)

E-mail address: oskorbin@yandex.ru, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Исследование конформно плоских римановых многообразий, т.е. многообразий с тривиальным тензором Вейля является одной из актуальных задач римановой геометрии [1]. Спектры (наборы собственных значений) дифференциальных операторов на римановых многообразиях также интенсивно изучаются в последнее время [2]. Особый интерес среди них представляет спектр оператора кривизны.

В настоящей работе исследован спектр оператора кривизны конформно плоских левоинвариантных римановых метрик 4-мерных групп Ли.

Используя инвариантность римановой метрики, вопрос об изучении спектра оператора кривизны на группе Ли сводится к соответствующему вопросу на алгебре Ли группы Ли. Далее, применяя результаты работ [3, 4, 5], в соответствующих базисах определены компоненты спектра оператора кривизны 4-мерных алгебр Ли групп Ли, наделенных конформно плоской левоинвариантный римановой метрикой. В частности, установлено на каких 4-мерных конформно плоских алгебрах Ли метрики являются (анти)торповыми, т.е. для каких 4-мерных конформно плоских алгебрах Ли операторы Ходжа и кривизны (анти)коммутативны.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант НШ–2263.2014.1), Grant of the Russian Federation for the State Support of Researches (Agreement No 14.B25.31.0029), а также Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный университет» (код проекта: 1148).

Список литературы

[1] А. Бессе *Многообразия Эйнштейна*,- М., Мир, (1990), 704с.

[2] C. S. Gordon *Survey of isospectral manifolds. Handbook of Diff. Geom.*,- Amsterdam: N.-Holland (2000), Vol. 1, P.747-778.

[3] А. Г. Кремлев, Ю. Г. Никоноров *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Унимодулярный случай* , - Мат. труды. 11: 2, (2008), С. 115-147.

[4] А. Г. Кремлев, Ю. Г. Никоноров *Сигнатура кривизны Риччи левоинвариантных римановых метрик на четырехмерных группах Ли. Неунимодулярный случай*, - Мат. труды. 12:1, (2009), С. 40-113.

[5] О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский *О спектре оператора кривизны конформно плоских римановых многообразий* , - ДАН. 450:2, (2013), С. 140–142.

Об автоморфизмах пространств Вейля

В. И. Паньженский, О. П. Сурина

(Пензенский государственный университет, Пенза, Россия)

E-mail address: kaf_geom@mail.ru.

Как известно, с созданием общей теории относительности впервые было геометризовано гравитационное поле. Геометрия пространства-времени в ОТО определяется распределением и движением материи и является геометрией четырехмерного (псевдо)риманова многообразия лоренцевой сигнатуры.

Затем была поставлена задача геометризации единой теории гравитации и электромагнетизма. Именно в рамках решения этой задачи возникли новые неримановы геометрии. Первую такую геометрию предложил в 1918 году Г. Вейля. Вейль обратил внимание на инвариантность уравнений Максвелла для без массовых частиц относительно конформных (масштабных) преобразований и предложил более общую теорию, в котором кроме преобразований координат, еще допускается изменение масштаба, а при параллельном перенесении векторов изменяются длины векторов. Таким образом пространство Вейля — это гладкое n-мерное многообразие M с заданным на нем (псевдо)римановой метрикой $g(g_{ij})$ и связностью $\overline{\nabla}(\overline{\Gamma}_{ij}^{k})$ без кручения такой, что

$$\overline{\nabla}_k g_{ij} = 2A_k g_{ij}, \qquad (1)$$

где ковектор A_k с точностью до размерного множителя отождествляется с векторным потенциалом электромагнитного поля ([1]).

Диффеоморфизм φ многообразия M называется автоморфизмом пространства Вейля $\big(M, g, \overline{\nabla}\big)$, если φ оставляет инвариантным g и $\overline{\nabla}$. Доказана следующая

Теорема. Максимальная размерность группы Ли автоморфизмов n-мерного многообразия Вейля равна $\frac{n(n-1)}{2} + 1$.

Список литературы

[1] А. П. Норден, *Пространства аффинной связности, Наука, М., 1976.*

А-деформации прямого кругового цилиндра со стационарными геодезическими линиями

Т. Ю. Подоусова

(ОГАСА, Одесса, Украина)

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Н. В. Вашпанова

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

Прямой круговой (п.к.) цилиндр имеет большое применение в технике. Нефтяная цистерна, боковые поверхности различных труб, ось в механизме и машине, обод маховика, поверхность подшипника оси, консервная банка - все эти предметы имеют форму п.к. цилиндра. Винтовые линии, образующие, окружности, лежащие в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, являются геодезическими линиями на п.к. цилиндре также как прямые на плоскости и большие круги на сфере. Геодезические линии на поверхности п.к. цилиндра очень часто бывают кратчайшими линиями между двумя точками.

В работе ([1]) задача о существовании А-деформаций регулярных поверхностей S класу C^3 в E_3-пространстве со стационарными геодезическими линиями приводится к решению следующей системы уравнений

$$\begin{cases} T^{\alpha i}_{,\alpha} - b^i_\alpha T^\alpha = 0, \quad b_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} + T^\alpha_{,\alpha} = 0, \quad c_{\alpha\beta}T^{\alpha\beta} = 0, \\ T^{\alpha\beta}_{,k}\left(c_{i\alpha}g_{j\beta} + c_{j\alpha}g_{i\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}\right) \end{cases}$$

относительно ψ-некоторого градиентного вектора и тензорных полей $T^{\alpha\beta}, T^\alpha(\alpha, \beta = 1, 2)$, через которые выражаются частные производные вектора смещения:

$$\mathbf{y}_i = c_{i\alpha}T^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha\mathbf{n}.$$

В частности было доказано, что нетривиальные А-деформации первого порядка со стационарными геодезическими линиями допускают только регулярные поверхности $S \in C^3$ нулевой гауссовой кривизны ($K = 0$) и только они.

В качестве примера рассмотрим деформации указаного вида п.к. цилиндра, заданного уравнением

$$\mathbf{r} = (R\cos v, R\sin v, u),$$

где R-радиус основания цилиндра. Доказана следующая

Теорема:Регулярный прямой круговой цилиндр допускает нетривиальные А-деформации со стационарными геодезическими линиями. Тензорные поля при этом выражаются через наперед заданную функцию $\varphi = \varphi(v) \in C^3$:

$$T^1 = u(\varphi + \varphi'), \quad T^2 = -\varphi', \quad T^{11} = -R\varphi, \quad T^{22} = -\frac{1}{R}\varphi, \quad T^{12} = A = const,$$

а ψ-некоторый постоянный вектор.

Список литературы

[1] Т. Ю. Вашпанова *Про нескінченно малі геодезичні деформації поверхонь.*,-// Матеріали XII Міжнародної конференції ім. академіка М. Кравчука.–Київ(15-17 травня), 2008, с.535.

Про існування А-деформацій першого порядку поверхонь додатньої гаусової кривини з краєм

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

E-mail address: tatyana_top@mail.ru

Л. Л. Безкоровайна

(Одеський національний університет ім. І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

Н. В. Вашпанова

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

Нехай однозв'язна поверхня S разом зі своєю границею ∂S є строго внутрішньою частиною деякої поверхні S_0 додатньої гаусової кривини класу $C_\lambda^{\ell+4}(0 < \lambda < 1, \ell \geq 0)$ заданої в E_3 просторі [1]. Будемо рахувати, що за допомогою спряженої ізотермічної параметризації S з границею ∂S гомеоморфно відображена на область G площини з границею ∂G.

Розглянемо нескінченно малу (н.м.) ареальну деформацію (А-деформацію) першого порядку S за умови, що вздовж її границі буде стаціонарний повний геодезичний скрут $\widetilde{K}$ ([2]), тобто

$$\delta\widetilde{K} = 0 \quad (\ \partial G), \tag{1}$$

де $\delta\widetilde{K}$ - перша варіація повного скруту $\widetilde{K}$ поверхні S.

Враховуючи запис основних рівнянь А-деформацій S в комплексному вигляді ([3]), поставлена задача зводиться до розв'язування наступної крайової задачі відносно функції ω:

$$\begin{cases} \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} - A\omega - \overline{B}\overline{\omega} = F, & (G) \\ Re(\overline{\lambda}\omega) = \gamma, & (\partial G) \end{cases} \tag{2}$$

де функції F і γ залежать від наперед заданих двох функцій, A і B-відомі функції точки поверхні S і мають такий же вигляд, як і в ([1]). Доведені наступні

Теорема 1. *Однозв'язна поверхня S класу $C_\lambda^{\ell+4}(0 < \lambda < 1, \ell \geq 0)$ додатньої гаусової кривини і без точок заокруглення з границею $\partial S \in C_\lambda^{\ell+4}$ допускає нетривіальну А-деформацію першого порядку в класі $C_\lambda^{\ell+3}(\overline{G})$ поверхонь зі стаціонарним повним геодезичним скрутом вздовж границі ∂S. Компоненти вектора зміщення при цьому залежать від двох наперед заданих функцій класу $C_\lambda^{\ell+3}(\overline{G})$ і від однієї довільної сталої.*

Теорема 2. *При н.м. ареальній деформації поверхні $S \in C_\lambda^{\ell+4}(0 < \lambda < 1, \ell \geq 0)$ додатньої гаусової кривини без точок заокруглення зі стаціонарним повним скрутом на ∂S головні напрями геодезичного скруту вздовж границі ∂S поверхні зберігаються.*

Список літератури

[1] И. Н. Векуа *Обобщенные аналитические функции.*,-//М.: Наука, 1988.– 509 с.

[2] Т. Ю. Вашпанова *А-деформації поверхонь з стаціонарним повним скрутом.*,-// Матеріали всеукраїнської накової конференції молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань.–Донецьк, 2008, с.31-32.

[3] Л. Л. Безкоровайная *О бесконечно малых ареальных деформациях овальных поверхностей.*,-// Известия вузов, Математика, 1983 г., №5(252), стр. 69-71.

Приближение второго порядка для риманова пространства ненулевой постоянной кривизны

Покась С. М., Крутоголова А. В.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: pokas@onu.edu.ua, 01link01@rambler.ru

Рассмотрим риманово пространство $V_n(x;g)$. В окрестности его произвольной точки M_0 строится пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2(y;\widetilde{g})$:

$$\widetilde{g}_{ij}(y) = \underset{\circ}{g}_{ij} + \frac{1}{3}\underset{\circ}{R}_{i\alpha\beta j}\, y^\alpha y^\beta, \tag{1}$$

где $\underset{\circ}{g}_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $\underset{\circ}{R}_{i\alpha\beta j} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$.

Известно, что в $\widetilde{V}_n^2$ существует аналитический вектор Киллинга $\widetilde{\xi}^h(y)$ вида:

$$\widetilde{\xi}^h(y) = \sum_{p=0}^{\infty} \underset{p}{a}^h, \tag{2}$$

где

$$\underset{p}{a}^h = a^h_{\cdot l_1\ldots l_p} y^{l_1}\cdot\ldots\cdot y^{l_p}, \quad \underset{\circ}{a}^h = a^h_{\cdot} \tag{3}$$

тогда и только тогда, когда выполняются условия

$$\underset{2p}{a}^h = \frac{(-1)^{(p+1)}}{2p-1} a^\alpha t^{(p)h}_{\alpha} \tag{4}$$

$$\underset{2p+1}{a}^h = 0 \tag{5}$$

$$a_{(ij)} = 0 \tag{6}$$

$$a^\alpha_{\cdot\,(i}\underset{\circ}{R}_{j)(l_1l_2)\alpha} + a^\alpha_{\cdot\,(l_1}\underset{\circ}{R}_{l_2)(ij)\alpha} = 0 \tag{7}$$

$$\underset{2k-1}{a}^\alpha_{\cdot\,(i} t_{j)\alpha} + \underset{2k}{a}_\alpha\, \mu^\alpha_{ij} = 0 \tag{8}$$

Здесь $\quad t^h_k = \frac{1}{3}\underset{\circ}{R}^h_{\cdot l_1 l_2 k}\, y^{l_1} y^{l_2}, \quad \mu^h_{ij} = \frac{1}{3}\underset{\circ}{R}^h_{\cdot (ij) l}\, y^l, \quad t^{(p)h}_k = t^h_\alpha t^{(p-1)\alpha}_{k} \quad (p = 2, 3, \ldots)$

Когда исходное V_n - пространство ненулевой постоянной кривизны, уравнения (7) выполняются тождественно для любых a_{ij}, удовлетворяющих (6), а из (8) следует, что $a^h_{\cdot} = 0$. Поэтому из (2) получаем, что $\widetilde{\xi}^h(y) = a^h_{\cdot l} y^l$, т.е. приходим к группе линейных однородных движений

$$y'^h = y^h + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{t^p a^{(p)h}_{\ \ l}}{p!} y^l$$

$$\left(a^{(p)h}_{\ \ l} = a^h_{\cdot\alpha} a^{(p-1)\alpha}_{\ \ l}, \quad p = 2, 3, \ldots\right)$$

Т.о. доказаны

Теорема 1. *Пространство второго приближения $\widetilde{V}_n^2$ для пространства ненулевой постоянной кривизны V_n допускает группу линейных однородных движений G_r порядка $r = \frac{n(n-1)}{2}$.*

Теорема 2. *Пространство второго приближения для пространства ненулевой постоянной кривизны является субпроективным пространством В. Ф. Кагана.*

Метрически правильные срединно/триадно-усеченные симплексы

Ю. С. Резникова

(Институт математики НАН Украины, Киев, Украина)

E-mail address: `yurss@mail.ru`

Рассмотрим векторное метрическое пространство $\{V^n(\Re),\rho\}$, $n \geq 2$, где ρ — фиксированная метрика.

Множество $S_\rho = \{\vec{x} \in V^n(\Re) : \rho(\vec{x}) = c\}$, $c = const > 0$, представляет собой $\rho-$сферу радиуса c в $\{V^n(\Re),\rho\}$.

Обозначим через $P_m^{(n)}$ $n-$мерный многогранник с m вершинами, $m \geq n+1$.

Определение 1. *$n-$мерный многогранник $P_m^{(n)}$ в векторном метрическом пространстве $\{V^n(\Re),\rho\}$, удовлетворяющий условиям:*

- *вершины многогранника $P_m^{(n)}$ лежат на описанной $\rho-$сфере,*
- *$\rho-$длины $1-$граней (ребер) многогранника $P_m^{(n)}$ равны,*

называется метрически правильным ($\rho-$правильным).

Утверждение 1. *$n-$мерный срединно/триадно-усеченный симплекс в векторном метрическом пространстве $\{V^n(\Re),\rho\}$, $n \geq 2$, где ρ — фиксированная метрика, вписанный в произвольный метрически правильный $n-$мерный симплекс, является метрически правильным.*

В процессе исследования метрически правильных срединно/триадно-усеченных симплексов координаты указанных многогранников были определены в явном виде для случая $n-$мерных евклидового пространства и $\sigma-$пространства, где $\sigma = max\{0;w_1;....;w_n\} - min\{0;w_1;....;w_n\}$ [1].

При этом использовано матричное преобразование векторного метрического $n-$мерного $\sigma-$пространства в $n-$мерное евклидово.

Лемма 1. *$\forall n \geq 2$ произвольная точка $P(w_1^0;....;w_n^0)$ векторного метрического пространства $\{V^n(\Re),\sigma\}$ может быть переведена в точку $\tilde{P}(x_1^0;....;x_n^0)$ векторного метрического пространства $\{V^n(\Re),\rho\}$, где ρ — евклидова метрика, при помощи матричного преобразования вида $A \times P^T = \tilde{P}^T$.*

Причем элементы матрицы A имеют вид:

$$\begin{cases} a_{ii} = \sqrt{\frac{(n-i+1)(n+1)}{(n-i+2)\cdot n}},\ i = \overline{1,n}, \\ a_{i(i+1)} = -\sqrt{\frac{n+1}{(n-i+1)(n-i+2)\cdot n}},\ i = \overline{1,n-1}, \\ a_{ij} = 0,\ j < i,\ i = \overline{2,n}, \\ a_{ij} = a_{i(i+1)},\ i+1 < j \leq n,\ i = \overline{1,n-1}. \end{cases}$$

Список литературы

[1] А. П. Великий, А. Ф. Турбин *Преобразования А.И.Лобанова.* – Кибернетика и системный анализ, (2004), № 5, С. 160-168.

Классификация причин возникновения бесконечных лоренцевых расстояний

А. Н. Романов

(ОмГУ, Омск, Россия)

E-mail address: aroms@yandex.ru

Работа посвящена рассмотрению пространств, наделенных лоренцевой метрикой. Исследование направлено на изучение причин возникновения бесконечных лоренцевых расстояний в подобных пространствах. В приложениях лоренцевой геометрии присутствует идея отождествления лоренцева расстояния с собственным временем, которое проживает объект, движущийся по некоторой пространственно-временной траектории.

Первый тип пространств характеризуется наличием замкнутых времениподобных кривых. Лоренцево расстояние между любыми двумя точками, лежащими на такой кривой, равно бесконечности: $d(a,b) = sup\ L(\gamma_{ab}) = \infty$. Такие пространства не являются хронологическими.

Второй тип: пространства содержат одно или несколько "непрерывных" множеств замкнутых изотропных кривых. Непрерывность понимается здесь в смысле C^0- топологии на кривых (см. [1]). Причиной возникновения бесконечных лоренцевых расстояний служит поведение метрики в области, состоящей из замкнутых изотропных кривых.

Третий тип: пространства содержат замкнутые изотропные кривые, изолированные от себе подобных. Причиной возникновения бесконечных лоренцевых расстояний между некоторыми точками служит "экстремальное" поведение метрики в непосредственной близости от замкнутой изотропной кривой.

Червертый тип: пространства не содержат замкнутых причинных кривых, однако могут содержать захваченные (в прошлом или будущем) причинные кривые, то есть допустимо явление захвата. Такие пространства являются причинными, но не являются ни устойчиво причинными, ни сильно причинными, то есть малые изменения метрики могут приводить к замкнутым причинным кривым. Как раз из-за таких "неустойчиво причинных" областей и возникают бесконечные лоренцевы расстояния.

Пятый тип пространств характеризуется совместными условиями, складывающимися в топологической и причинной структуре постранства: при наличии в пространстве-времени некоторых "вырезанных" (замкнутых) областей, поведение метрики может быть такой, чтобы в достаточной "близости" к такой области коэффициенты метрики принимали бы бесконечно большие значения, что в свою очередь приводило бы к бесконечности лоренцева расстояния между некоторыми точками данного пространства-времени.

Список литературы

[1] Дж. Бим , П. Эрлих. *Глобальная лоренцева геометрия*,- М.: Мир, (1985).

[2] А.. Романов *Отображения пространства-времени и условия причинности*,- // Тезисы докладов конференции по Анализу и Геометрии. ИМ СО РАН. Новосибирск. (2004), С. 219.

Организация самостоятельной работы в техникуме.

В. В. Ромчук

(ТГНП ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: vakrom@mail.ru

Основная задача среднего профессионального образования заключается в формировании творческой личности специалиста, способного к саморазвитию, самообразованию, инновационной деятельности. Поэтому сегодня стоит задача не просто научить студентов тем или иным наукам, а научить их учиться и пополнять свои знания на протяжении всей жизни.

В ее решении важная часть отводится самостоятельной работе студента (СРС)

Самостоятельная работа студентов – это не что иное, как моделирование их будущей профессиональной деятельности, в которой не будет преподавателей, но будут руководители, как правило, оценивающие самостоятельность как одно из самых востребованных профессиональных качеств. Это некая универсальная компетенция, которая применима к любой профессиональной деятельности.

Усиление роли самостоятельной работы студентов означает принципиальный пересмотр организации учебно-воспитательного процесса в техникуме.

Ведь не секрет, что многие студенты сталкиваются с рядом трудностей, связанных с отсутствием привычки к систематическому умственному труду, неорганизованностью, шаблонным, отсутствием критического мышления и т.д. При изучении математических дисциплин выделяют два вида самостоятельной работы: аудиторная самостоятельная работа, которая выполняется на учебных занятиях по заданию преподавателя и под его непосредственным руководством и внеаудиторная самостоятельная работа, выполняемая студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Содержание СРС по математике определяется в соответствии с рабочей программой дисциплины. При этом важно четкое планирование и организация.

Для этого следует определить, с какой целью выполняется самостоятельная работа: закрепление, углубление и систематизация знаний и практических умений, полученных во время аудиторных занятий; самостоятельное овладение учебным материалом; развитие исследовательских умений.

Материалы для СРС должны быть тщательно подобраны преподавателем, содержать инструкции по выполнению, методические указания с решениями подобных заданий. Разработаны четкие критерии оценивания.

При выполнении заданий самостоятельной работы студентам предстоит: сбор и изучение информации; анализ, систематизация и трансформация информации; отображение информации в необходимой форме; консультация у преподавателя; коррекция поиска информации и плана действий (при необходимости); оформление работы; поиск способа подачи выполненного задания; представление работы на оценку преподавателя.

По итогам самостоятельной работы студенты должны: развить такие универсальные умения, как умение учиться самостоятельно, принимать решения, проектировать свою деятельность и осуществлять задуманное, проводить исследование, формулировать получаемые результаты, познать радость самостоятельных побед, открытий, творческого поиска.

На протяжении всей самостоятельной работы студентов должен сопровождать педагог, выступающий в роли консультанта, координатора действий студентов. Контроль самостоятельной работы осуществляет преподаватель в аудитории в отведенные для этой цели часы. Формы проведения контроля определяются преподавателем. К ним относятся: собеседование, устный опрос, контрольная работа, проверка индивидуальных заданий, деловая игра, компьютерное тестирование, зачет по теме (разделу).

Бесконечно малые изгибания 2-го порядка поверхностей вращения с уплощениями в полюсах

И. Х. Сабитов[1]

(МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: `isabitov@mail.ru`

Мы продолжаем изучение бесконечно малых (б.м.) изгибаний поверхностей вращения с уплощениями в полюсах. Результаты о б.м. изгибаниях 1-го порядка опубликованы в [1]. В планируемом докладе будет рассказано о признаках существования/несуществования для таких поверхностей б.м. изгибаний 2-го порядка как в окрестности полюса, так и "в целом". Приведем несколько теорем.

Пусть $z = \varphi(\rho), 0 \le \rho < a$ – меридиан поверхности вращения с условиями $\varphi'(0) = 0$, $\varphi'(\rho) > 0, 0 < \rho < a$. Пусть в стандартных обозначениях $\alpha_m(\rho)$ определяет гармонику с номером $m \ge 2$ для вертикальной компоненты поля б.м. изгибания 1-го порядка. Верна

Теорема 1. *Для возможности продолжения m-й гармоники данного C^1- гладкого поля б.м. изгибания 1-го порядка с известной компонентой $\alpha_m(\rho)$ в C^1-гладкое б.м. изгибание 2-го порядка необходимо, чтобы при $\rho \to 0$ было выполнено условие*

$$\Big[\frac{(\rho\alpha'_m - m^2\alpha_m)^2}{m^2(m^2-1)} - \alpha_m^2\Big]\rho^{m^2-3}(\rho\alpha'_m - m^2\alpha_m)\ \exp\Big(m^2(1-m^2)\int\limits_\rho^{\rho_0}\frac{\alpha_m(t)}{t(t\alpha'_m - m^2\alpha_m)}dt\Big) \to 0. \qquad (1)$$

Мы показываем на примерах, что это необходимое условие выполняется не всегда, и тем самым получаем примеры нежестких поверхностей с *локальной* жесткостью 2-го порядка. Формулировка необходимых и достаточных условий локальной продолжаемости m-й гармоники в б.м. изгибание 2-го порядка весьма сложная (ее можно будет найти в [2]).

В случае аналитических поверхностей вращения мы вводим так называемое условие M, состоящее в требовании, чтобы интеграл

$$\int\limits_\rho^{\rho_0}\frac{dt}{\varphi'(t)\alpha_{2m}^2(t)}$$

не содержал слагаемое с $\ln\rho$. При этом условии дается критерий локальной нежесткости 2-го порядка и доказывается

Теорема 2. *Для того, чтобы гармоника с номером m, задающая аналитическое б.м. изгибание 1-го порядка на всей поверхности с однозначно проектирующимся на ось вращения аналитическим меридианом $\rho = \rho(z)$ и удовлетворяющая в окрестности каждого полюса условию M, была продолжаема на всей поверхности в аналитическое б.м. изгибание 2-го порядка необходимо и достаточно, чтобы она была продолжаема в аналитическое б.м. изгибание 2-го порядка в окрестности каждого полюса.*

Список литературы

[1] И. Х. Сабитов *Жесткость и неизгибаемость "в малом" и "в целом" поверхностей вращения с уплощениями в полюсах.*,- Мат. сборник, (2013), т.204, № 10, С. 129-160.

[2] И. Х. Сабитов *Бесконечно малые изгибания 2-го порядка поверхностей вращения с уплощениями в полюсах.*,- Мат. сборник (послано в журнал).

[1]Работа автора поддержана грантом РФФИ № 12-01-90415-УКРа

Геометрия касательного расслоения, связанная с инвариантными приближениями в римановых пространствах

Е. Н. Синюкова

(ПНПУ, Одесса, Украина)

E-mail address: marbel@ukr.net

Инвариантная теория приближений в римановой геометрии основывается на известном тензорном ряде Тейлора для тензорных полей [1]. Однако сложность структуры коэффициентов указанного ряда в пространствах, отнесенных к произвольной системе координат. приводит к недостаточной эффективности такого подхода. Гораздо более продуктивным оказывается использование римановой системы координат с центром в произвольной точке рассматриваемого риманова пространства. Появляется возможность получения инвариантного ряда типа Тейлора, зависящего не только от координат текущей точки, но и от касательного элемента в ней, как для любого тензора, так и для объекта аффинной связности риманова пространства V^n. [2] Это избавляет от необходимости реализации в V^n фактического перехода к римановой системе координат, что, в общем случае, практически неосуществимо.

Для компонент g_{ij} метрического тензора риманова пространства V^n и для компонент Γ^h_{ij} его объекта аффинной связности получаем

$$g_{ij}(x;y) = g_{ij}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(x)y^\alpha y^\beta + \{3\}; \quad \Gamma^h_{ij}(x;y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3}R^h_{(ij)\alpha}(x)y^\alpha + \{2\}.$$

Оба геометрических объекта при этом оказываются зависимыми не только от текущей точки $x^1;...;x^n$, но и от заданного в этой точке касательного элемента y^h. Если отказаться соответственно от слагаемых третьего и второго порядков малости относительно компонент касательного элемента y^h получаем тензор

$$\widetilde{g}_{ij}(x;y) = g_{ij}(x) + \frac{1}{3}R_{i\alpha\beta j}(x)y^\alpha y^\beta$$

и объект связности

$$\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x;y) = \Gamma^h_{ij}(x) - \frac{1}{3}R^h_{(ij)\alpha}(x)y^\alpha,$$

определяющие на V^n геометрию, подобную финслеровой, и естественным образом связанную с инвариантной теорией приближений в V^n. Применяя к $\widetilde{g}_{ij}(x;y)$ и $\widetilde{\Gamma}^h_{ij}(x;y)$ операции полного лифта и синектического продолжения, на касательном расслоении $T(V^n)$ можно построить несколько разных метрик и связностей, геометрии которых естественным образом связаны с инвариантной теорией приближений риманова пространства V^n.

Изучены геометрические объекты пространства, определенного метрикой

$$ds^2 = \widetilde{g}_{\alpha\beta}(x;y)dx^\alpha Dy^\beta,$$

где $Dy^\beta = dy^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}y^\alpha dx^\gamma$.

Список литературы

[1] Веблен О. *Инварианты дифференциальных квадратичных форм* .,- М.: И.Л., (1948), 140 с.

[2] Синюков Н.С., Синюкова Е.Н., Мовчан Ю.А. *Некоторые актуальные аспекты развития теории геодезических отображений римановых пространств и ее обобщений.*, - Изв. вузов, Математика, № 3(382), (1994), С. 76-80.

Ортогональные преобразования барицентрической системы координат

П. Г. Стеганцева

(ЗНУ, Запорожье, Украина)

E-mail address: `steg_pol@mail.ru`

Основы барицентрического метода были заложены немецким геометром А.Ф.Мебиусом, с ними можно ознакомиться в работе [1]. Имеется много возможностей эффективного применения этого метода в математических исследованиях [2].

Нормированными барицентрическими координатами точки P плоскости относительно данного на плоскости треугольника ABC называются числа λ_1, λ_2, λ_3 такие, что $\overline{OP} = \lambda_1\overline{OA} + \lambda_2\overline{OB} + \lambda_1\overline{OC}$, причем $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_1 = 1$, O - произвольная точка вне плоскости.

Если на плоскости задать два треугольника - "старый" ABC и "новый" $A'B'C'$, то формулы преобразования барицентрических координат произвольной точки $M(x_1, x_2, x_3)$ имеют следующий матричный вид $X' = TX$, где в матрице T перехода столбцами являются координаты вершин нового базисного треугольника относительно старого базисного треугольника.

В аналитической геометрии кривых второго порядка большое значение имеют ортогональные преобразования ортонормированного базиса, который по отношению к произвольному аффинному базису можно назвать каноническим. В случае барицентрических координат тоже естественно рассматривать аналог ортонормированного базиса и называть его каноническим барицентрическим треугольником. В качестве такого примем правильный треугольник со стороной 1.

Полученные результаты сформулируем в виде следующих предложений.

Определение. *Преобразование* канонической барицентрической системы координат называется *ортогональным*, если оно задается ортогональной матрицей.

Предложение 1. *Матрица поворота канонической барицентрической системы координат вокруг центра базисного треугольника является циклической матрицей.*

Приведем вид матрицы поворота

$$T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\cos\varphi & 1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi & 1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi \\ 1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi & 1+2\cos\varphi & 1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi \\ 1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi & 1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi & 1+2\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Предложение 2. *Поворот канонической барицентрической системы координат вокруг центра базисного треугольника является ортогональным преобразованием.*

Ортогональные преобразования барицентрической системы координат будут применены для описания алгоритма приведения общего барицентрического уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

Список литературы

[1] М. Б. Балк, В. Г. Болтянский *Геометрия масс.*- М.: Наука, 1987. - 160 с.

[2] Я. П. Понарин *Элементарная геометрия*: В 3 т. - Т.3: Треугольники и тетраэдры. - М.: МЦНМО, 2009. - 192 с.

О геометрии левых три-тканей Бола

Толстихина Г.А., Шелехов А.М.

(ТвГУ, Тверь, Россия)

E-mail address: `amshelekhov@yandex.ru`

Известно [1], [2], что любая левая три-ткань Бола B_ℓ индуцирует на базе первого слоения локальную гладкую r-мерную квазигруппу, называемую сердцевиной ткани B_ℓ. Мы говорим, что левая три-ткань Бола B_ℓ обладает IC-свойством, если ее координатная квазигруппа и сердцевина изотопны. В [3] показано, что указанная изотопия устанавливается с помощью некоторого гладкого r-мерного подмногообразия V, трансверсального слоям ткани, и найдена характеристика координатной лупы ткани B_ℓ, обладающей IC-свойством.

Нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Поверхность V является изоклинно-геодезической и одновременно диагональной поверхностью ткани B_ℓ. Обратно: если на левой ткани Бола B_ℓ существует такая поверхность, то сердцевина этой ткани изотопна ее координатной квазигруппе.*

Теорема 2. *Левая ткань Бола B_ℓ обладает IC-свойством в том и только в том случае, если на этой ткани существует гладкое r-мерное подмногообразие V, трансверсальное слоям три-ткани, на котором локально симметрическая связность $\tilde{\Gamma}$ совпадает с канонической связностью Черна.*

В [4] нами доказана

Теорема 3. *Пусть B_ℓ — левая три-ткань Бола, заданная на $2r$-мерном гладком многообразии, CB_ℓ — левая три-ткань Бола, определяемая сердцевиной ткани B_ℓ, CCB_ℓ — левая три-ткань Бола, определяемая сердцевиной ткани CB_ℓ. Тогда три-ткани CB_ℓ и CCB_ℓ эквивалентны. Иными словами, оператор $C : B_\ell \to CB_\ell$ является идемпотентным.*

В [5] мы показываем, как по заданным структурным уравнениям три-ткани B_ℓ найти структурные уравнения три-ткани CB_ℓ.

Список литературы

[1] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*//монография/ Тверь, ТвГУ, 2010, 308 с.

[2] Толстихина Г. А. *О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p, q, q)$*// Геометрія, топологія та їх застосування/ Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2009, **т. 6**, № 2, с. 247–255.

[3] Толстихина Г. А. *Об условиях изотопии координатной квазигруппы и сердцевины левой ткани Бола*// Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского/ Серия: физ.-матем. и техн. науки, раздел: математика, № 4 (26), 2011, с. 255–262.

[4] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О три-ткани, определяемой сердцевиной левой три-ткани Бола.* (В печати)

[5] Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О структурных уравнениях три-ткани, определяемой сердцевиной левой три-ткани Бола.* (В печати)

Трудное и опасное восхождение в 256-мерное пространство и триумфальное возвращение в трёхмерный мир

А. Ф. Турбин

(НПУ имени М. Драгоманова, Киев, Украина)

E-mail address: turbin@imath.ua

После формулировки теоремы Л. Шлефли и "доказательства", М. Берже в своей знаменитой "Геометрии" [1] пишет:

"Итак, мы констатируем, что правильные многогранники более многочисленны в маленьких размерностях, чем в больших. Существует только три общие серии многогранников, еще есть исключительные многогранники в размерностях 3 и 4 и бесконечное число правильных многогранников в размерности 2. Этот результат хорошо иллюстрирует одну из створок следующего эвристического диптиха (принадлежащего Р. Тому): богатые структуры более многочисленны в малых размерностях, а бедные структуры более многочисленны в больших размерностях".

Трудно представить более глубоко "бессмысленное" утверждение.

Суперправильные многогранники в $E^n, n \geq 4$.

Совершенные многогранники: правильные, самодвойственные, заполняют пространство. Открывает бесконечную серию совершенных многогранников мегаоктаэдр Г. Брендта $(12, 48, 48, 12)$.

Звёздно правильные многогранники: правильные, самодвойственные, звезда любой вершины является и его $(n-1)$-гранью. Открывает серию звёздно многогранников мегаикосианоэдр Д. Грегори–А. В. Погорелова $(24, 144, 144, 24)$.

Идеальные многогранники: правильные, самодвойственные, заполняют пространство и на вершинах многоранника, вписанного в гиперсферу радиуса $S_{n-1}(R)$, размещаются (без пересечений) "ньютоновы" гиперсферы. Открывает бесконечную серию идеальных многогранников в $E^n, n \geq 5$ мегаоктаэдр И. Ньютона–Н. Кузенного $(40, 240, 400, 240, 40)$.

Программа на третье тысячелетие:

Построить правильные многогранники в размерностях от 4 до 256, трёхмерные грани которых тетраэдры $(4, 6, 4)$, октаэдры $(6, 12, 8)$, кубы $(8, 12, 6)$, икосаэдры $(12, 30, 20)$ и додекаэдры $(20, 30, 12)$.

Список литературы

[1] Берже М. Геометрия, т.1. – М.: Мир, 1984. т.2. – 546 с.

Многомерные миражи

А. Ф. Турбин

(НПУ имени М. Драгоманова, Киев, Украина),

Ю. Д. Жданова

(ГУТ, Киев, Украина)

E-mail address: yuzhdanova@yandex.ru

Если трёхмерному наблюдателю предъявить плоскую проекцию каркаса выпуклого многогранника в четырехмерном аффинно евклидовом пространстве E^4, у которого 8 вершин, 24 ребра и 32 двумерные грани (правильные треугольники), то "подготовленный" на знаменитых "Regular polytopes" Г. Кокстера [1], "Наглядной геометрии" Д Гильберта-С. Кон-Фоссена [2], "Геометрии" М. Берже [3] наблюдатель безаппеляционно заявит, что это 16-ячейка Л. Шлефли $(8, 24, 32, 16)$, многогранник, у которого все трёхмерные грани тетраэдры (?), якобы "двойственный" гиперкубу $(16, 32, 24, 8)$.

Неподготовленный же наблюдатель-дилетант увидит галлоэдр – выпуклый многогранник $(8, 24, 32, 16)$ в E^4, у которого 8 вершин, 24 ребра, 32 двумерные грани (правильные треугольники) и всего лишь 6 трёхмерных граней (два тетраэдра и четыре октаэдра). У галлоэдра $(8, 24, 32, 16)$ вопреки А. Пуанкаре $8 - 24 + 32 - 6 = 40 - 30 = 10$. У галлоэдра $(8, 24, 32, 16)$ нет "двойственного" ему многогранника $(6, 32, 24, 8)$.

Еще более неподготовленный наблюдатель-дилетант увидит даже гипероктаэдр $(8, 24, 32, 16)$ в E^4, двойственный гиперкубу, у которого 8 вершин, 24 ребра и 32 двумерные грани (правильные треугольники) и 16 трёхмерных граней (октаэдров).

Многомерные миражи присутствуют всегда, если двумерные грани многогранника треугольники.

Подготовленный наблюдатель, который, наконец, избавился от "категорического диктата" теоремы Шлефли о правильных многогранниках и теоремы Пуанкаре о "всех" выпуклых многогранниках в $E^n, n \geq 4$, и способен видеть многомерные миражи, принимает решение об индентификации граней сам!

Список литературы

[1] Coxeter, H.S.M. Regular. 3-rd edition. – Dover Publication, New York, 321 p.

[2] Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981. – 344 с.

[3] Берже М. Геометрия, т.1. – М.: Мир, 1984. – 546 с.

Инфинитезимальные проективные преобразования, сохраняющие тензор Эйнштейна

Е. Е. Чепурная

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: `culeshova@ukr.net`

Инфинитезимальные проективные (сохраняющие геодезические) характеризуются условием:

$$L_\xi \Gamma^h_{ij} = \frac{1}{2}(\varphi_i \delta^h_j + \varphi_j \delta^h_i) \tag{1}$$

Здесь символ L_ξ означает производную Ли вдоль поля ξ. Вследствие 1 уравнения инфинитезимальных проективных преобразований имеют вид [1],[2] :

$$\begin{cases} \xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ \varphi_{,i} = \varphi_i; \\ \xi_{i,jk} = \xi_\alpha R^\alpha_{kji} + \frac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik}) \\ \varphi_{ij} = \frac{1}{n-1}\left(\xi^\alpha R\alpha i, j + \xi^\alpha{}_{,i} R_{\alpha j} + \xi^\alpha{}_{,j} R_{\alpha i} + \xi^\alpha R^\beta_{ij\alpha,\beta}\right) \end{cases} \tag{2}$$

Тензор

$$E_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij} \tag{3}$$

называют тензором Эйнштейна [3]. Из требования сохранения тензора 3 вытекает, что помимо системы 2 должно выполняться уравнение

$$L_\xi E_{ij} = \xi^\alpha E_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} E^\alpha_j + \xi_{\alpha,j} E^\alpha_i = 0 \tag{4}$$

Нами доказана следующая теорема:

Теорема. *Для того, чтобы инфинитезимальные проективные преобразования оставляли инвариантным тензор Эйнштейна* $E_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{n} R g_{ij}$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:*

$$L_\xi Z^h_{ijk} = 0.$$

Тензор

$$Z^h_{ijk} \stackrel{\text{def}}{=} R^h_{ijk} - \frac{R}{n(n-1)}(\delta^h_k g_{ij} - \delta^h_j g_{ik}), \tag{5}$$

называется тензором конциркулярной кривизны.

Список литературы

[1] K. Yano *The theory of Lie derivatives and its applications*,-North-Holland, Amsterdam(1955).

[2] J. Mikeš,A. Vanžurovà,I. Hinterleitner I.*Geodesic mappings and some generalizations.*,-Palacky University Press, Olomouc, 2009, 304p.

[3] В. А. Киосак Е. Е. Чепурная *Инвариантные преобразования с сохранением геодезических*,-Proc. Intern. Geom. Center 2011 4(2) 36-42.

Инфинитезимальные конформные преобразования локально конформно-келеровых многообразий

Е. В. Черевко

(ОНЭУ, Одесса, Украина)

E-mail address: cherevko@usa.com

Пусть $\{M_n, J, g\}$ – локально конформно-келерово(ЛКК) многообразие, компоненты формы Ли, которого определяются формулой [2]:

$$\omega_i = \frac{2}{n-2} J^{\alpha}_{\beta,\alpha} J^{\beta}_i. \tag{1}$$

Известно [3], что, если векторное поле ξ порождает инфенитезимальные конформные преобразования, вместе с инвариантом φ должен удовлетворять системе :

$$\begin{array}{l} 1)\xi_{i,j} = \xi_{ij}; \\ 2)\varphi_{,i} = \varphi_i; \\ 3)\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \varphi g_{ij}; \\ 4)\xi_{i,jk} = \xi_{\alpha} R^{\alpha}_{kji} + \frac{1}{2}(\varphi_k g_{ij} + \varphi_j g_{ik} - \varphi_i g_{jk}); \\ 5)\varphi_{i,j} = \frac{2}{n-2}\left(\xi^{\alpha} R_{ij,\alpha} + \xi_{\alpha,i} R^{\alpha}_j + \xi_{\alpha,j} R^{\alpha}_i - \frac{g_{ij}}{2(n-1)}\left(\xi^{\alpha} R_{,\alpha} + \varphi R\right)\right). \end{array} \tag{2}$$

Рассмотрен случай, когда векторное поле $\xi(x^1, x^2, \dots, x^n)$ индуцирует преобразование, сохраняющее комплексную структуру [4]:

$$\mathfrak{L}_{\xi} J^i_j = J^i_{j,k}\xi^k - J^{\alpha}_j \xi^i_{\ ,\alpha} + J^i_{\alpha}\xi^{\alpha}_{\ ,j} = 0. \tag{3}$$

Такое поле называется *контравариантным почти аналитическим* векторным полем. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *При инфинитезимальных конформных преобразованиях ЛКК-многообразий, сохраняющих комплексную структуру, векторное поле ξ и инвариант φ для которых определяются из системы (2), компоненты производной Ли формы Ли равны частным производным инварианта φ, взятым с обратным знаком:*

$$\mathfrak{L}_{\xi}\omega_i = -\varphi_i.$$

Теорема 2. *Если ЛКК-многообразие $\{M_n, J, g\}$, $n = 2m$ допускает группу G_r инфинитезимальных конформных преобразований, сохраняющих комплексную структуру, то ее порядок r не превышает $m+1$.*

Список литературы

[1] В. Ф. Кириченко *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях*,- М., МПГУ, 2003, 495 с.

[2] В. Ф. Кириченко *Локально конформно-келеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны* ,- Матем. сб., 182:3 (1991), 354–363

[3] Й. Микеш, Д. Молдобаев *О распределении порядков групп конформных преобразований римановых пространств*,- Изв. вузов. Матем., 1991, № 12, 24–29

[4] K. Yano *Differential geometry on complex and almost complex spaces*,- Pure and Applied Math. vol. 49, Pergamon Press Book, New York (1965).

О группе изометрий слоеного многообразия

А. С. Шарипов

(НУУз, Ташкент, Узбекистан)

E-mail address: asharipov@inbox.ru

Обозначим через G группу всех изометрий риманова многообразия M размерности n с римановой метрикой g. Известно, что группа G с компактно-открытой топологий является группой Ли [1]. В этой статье обсуждается вопрос о существование изометрических отображений слоеного многообразия (M, F). Обозначим через G_F группу всех изометрий слоеного риманова многообразия (M, F). Изучение структуры группы G_F слоеного многообразия (M, F) является новой и интересной задачей. Впервые эта задача рассмотрена в работе [2]. В этой работе доказано, что группа G_F с компактно-открытой топологией является топологической группой.

Пусть M, N -гладкие многообразия размерности n, на которых заданы k мерные слоения F_1, F_2 соответственно. Если для некоторого диффеоморфизма $\phi : M \to N$ образ $\phi(L_\alpha)$ каждого слоя L_α слоения F_1 является слоем слоения F_2, то отображение ϕ называется диффеоморфизмом слоеных многообразий $(M, F_1), (N, F_2)$ и пишется в виде $\phi : (M, F_1) \to (N, F_2)$. Если $M = N$ и $F_1 = F_2$, то ϕ называется диффеоморфизмом, сохраняющим слоение F (диффеоморфизмом слоеного многообразия (M, F)). Диффеоморфизмы, сохраняющие слоение, изучены в работах [1], [3].

Определение 1. Диффеоморфизм $\phi : (M, F) \to (M, F)$ называется изометрией слоеного многообразия (M, F), если сужение отображения ϕ на каждый слой слоения F является изометрическим отображением, т.е. для каждого слоя L_α отображение $\phi : L_\alpha \to f(L_\alpha)$ является изометрией между многообразиями $L_\alpha, \phi(L_\alpha)$.

Определение 2. Пусть M- гладкое многообразие размерности n. Функция $f : M \to R^1$ из класса $C^2(M, R^1)$ длина градиента которой постоянна на компонентах связности множеств уровня, называется метрической функцией.

Теорема. Пусть $f : R^n \to R^1$ - не является метрической функцией. Тогда, группа G_F является подгруппой группы G.

Замечание. Как показывают примеры, для метрических функций теорема не верна.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = \exp(Bx_2)$, заданная на плоскости. Линии уровня этой функции порождают слоение F, состоящее из параллельных прямых. Отображение $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, \lambda x_2)$, где $\lambda \neq 0$- постоянное, является изометрией слоения F, но оно не является изометрией плоскости.

Пример 2. Функция $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$, не является метрической, линии уровня порождают слоение F, состоящее из парабол. Изометрией этого слоения является параллельный перенос вида $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + \lambda)$, которая есть изометрия плоскости.

Список литературы

[1] S. B. Myers and N. Steenrod, The group of isometrics of a Riemannian manifold. Ann. of Math. 40 (1939), pp. 400-416.

[2] Narmanov A., Sharipov A. On the group of foliation isometries. Methods of functional Analysis and Topology, V-15, (2009) pp.195-200.

[3] Тамура И. Топология слоений. М.: Мир, 1979. 317 с.

Особенности геометрической составляющей обучения студентов-иностранцев на этапе довузовской подготовки

Л. И. Шпота

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: shpota.elena@mail.ru

Цель математической подготовки на предвузовском этапе – сформировать у иностранных студентов на неродном языке уровень математической образованности, необходимый для продолжения обучения математическим дисциплинам в украинских вузах.

Но несмотря на то, что главной составляющей обучения математике на предвузовском этапе является именно математическое содержание, а изучение языка предмета выполняет коммутативную функцию, большое внимание необходимо уделять правильной речи. Этому, как нельзя лучше, способствуют геометрические задачи, формулировки теорем, определения. В процессе рассуждений на «геометрические» темы происходит, как показывает многолетний опыт работы, формирование коммутативной компетентности, то есть способности обучающегося организовать свою речевую деятельность способами, соответствующими конкретной ситуации общения, адекватными по цели, содержанию, а именно, при решении геометрических задач как требующих логических геометрических доказательств, так и носящих вычислительный характер возникает необходимость словесно довести мысль на изучаемом языке. Таким образом, изучение предмета (геометрии) идет параллельно с изучением языка на геометрическом материале. Нельзя обучить предмету без изучения языка предмета.

При формулировке и решении задач по геометрии очень часто возникают словосочетания, фразы, которые используются в бытовой речи: «угол», «прямая проходит через», «основание» и т.д. Таким образом, на уроках геометрии невозможно только записать на доске математические выражения, не озвучив их, не объяснив связи слов в предложении, их значения, при этом необходимо следить за краткостью, лаконичностью речи преподавателя.

Итак, на этапе довузовской подготовки иностранных студентов необходимо подчеркнуть важность и необходимость изучении геометрии. При изучении этого предмета математики как нельзя успешнее происходит овладение учащимися языковых конструкций, необходимых для дальнейшего обучения.

The geometry of canonical almost product structures on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces

V. V. Balashchenko

(Belarusian State University, Minsk, Belarus)

E-mail address: `balashchenko@bsu.by; vitbal@tut.by`

Distributions on smooth manifolds can be constructed by various methods. In particular, classical affinor structures such as almost product structures, almost complex structures, f-structures of K. Yano and some others naturally determine two or more (real or complex) complimentary distributions. The distributions generated by almost product structures and their generalizations play a remarkable role in many branches of differential geometry and its applications, specifically, in the theory of Monge-Ampère equations (see [1], [2]).

Invariant distributions determined by invariant affinor structures on homogeneous manifolds are of especial interest. As the first step, we study invariant distributions on reductive Riemannian homogeneous spaces generated by invariant almost product structures. We prove the criteria under which these distributions belong to types $\boldsymbol{AF}$ (anti-foliation), $\boldsymbol{F}$ (foliation), $\boldsymbol{TGF}$ (totally geodesic foliation). Further, we concentrate on canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces $(G/H, g)$, where G is a compact semisimple Lie group and g is any diagonal Riemannian metric on G/H compatible with canonical distributions. These distributions are determined by a rich collection of canonical almost product structures on G/H (see [3], [4]). Applying the previous results we give a full description of all base canonical distributions by indicating the algebraic criteria for including these distributions into the classes $\boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{TGF}$. In particular, it follows that any base canonical foliation is totally geodesic. Finally, we examine in detail all canonical distributions (not only base) on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces with diagonal metrics for $k = 4, 5, 6$. As a result, a wide collection of new invariant Riemannian foliations (in particular, the Reinhart foliations) as well as the Naveira classes of Riemannian almost product structures is presented. It should be noted that canonical distributions on homogeneous k-symmetric spaces are closely related to special canonical almost complex structures and f-structures [4], which were recently applied by I. Khemar [5] to studying elliptic integrable systems.

Recently, so-called "metallic" structures (golden, silver and others) were introduced in [6]. Using the canonical almost product structures we show that all types of "metallic" structures can be effectively realized as the canonical structures on homogeneous k-symmetric spaces.

References

[1] A. Kushner, *Almost product structures and Monge-Ampèr equations.* - Lobachevskii Journal of Mathematics. 23, (2006), P. 151-181.

[2] A.G. Kushner, *r-tuple almost product structures.* - Journal of Mathematical Sciences. 177: 4, (2011), P. 569-578.

[3] V.V. Balashchenko, N.A. Stepanov, *Canonical affinor structures of classical type on regular Φ-spaces.* - Sbornik: Mathematics. 186: 11, (1995), P. 1551-1580.

[4] V.V. Balashchenko, Yu.G. Nikonorov, E.D. Rodionov, V.V. Slavsky, *Homogeneous spaces: theory and applications: monograph.* - Polygrafist, Hanty-Mansijsk, (2008), 280 pp. (in Russian).

[5] I. Khemar, *Elliptic integrable systems: a comprehensive geometric interpretation.* - Memoirs of the American Mathematical Society. 219: 1031, (2012), x + 217 pp.

[6] C.-E. Hretcanu, M. Crasmareanu, *Metallic structures on Riemannian manifolds.* - Revista de la Union Matematica Argentina. 54: 2, (2013), P. 15-27.

Pairs of compact convex sets: categorical properties

L. Y. Bazylevych, A. G. Savchenko, M. M. Zarichnyi

(Polytechnic University, Lviv; Agrarian University, Kherson; Ivan Franko University, Lviv, Ukraine)

E-mail address: izar@litech.lviv.ua, savchenko1960@rambler.ru, mzar@litech.lviv.ua

The pairs of convex subsets in linear spaces find numerous applications in different areas of mathematics. In particular, they are used in the quasidifferential calculus [1] and mathematical economics.

The mentioned construction was considered from the categorical point of view in the realm of fuzzy metric spaces by the second named author [3]. In this paper, a fuzzy norm on the linear space of (equivalence classes of) convex sets is defined and it is proved that the functor of the pairs of polyhedral convex sets (i.e., the convex hulls of finite subsets) determines a monad in a suitable category.

For every linear topological space X, let $\mathrm{cc}(X)$ denote the set of nonempty compact convex subsets in X. As usual, $+$ stands also for the Minkowski addition: $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$, for every $A,B\in\mathrm{cc}(X)$.

Consider the following equivalence relation $\sim$ on the set $\mathcal{L}=\mathrm{cc}(X)\times\mathrm{cc}(X)$: $(A,B)\sim(C,D)$, if $A+D=B+C$.

The equivalence class containing (A,B) is denoted by $[A,B]$. The quotient set $\mathcal{K}(X)=\mathcal{L}/\sim$ is a linear space with respect to the addition

$$[A,B]+[C,D]=[A+C,B+D]$$

and multiplication by scalar defined by the formula: $\lambda[A,B]=[\lambda A,\lambda B]$, if $\lambda>0$, and $[-\lambda B,-\lambda A]$, if $\lambda<0$ (see [2]).

Suppose now that $(X,\|\cdot\|)$ is a normed space. Denote by d_H the Hausdorff metric on $\mathrm{cc}(X)$ with respect to the metric d induced by the norm $\|\cdot\|$. It is known (see, e.g., [2]) that the following function is a norm on $\mathcal{K}(X)$: $\|[A,B]\|=d_H(A,B)$.

Let $\tilde{\mathcal{K}}(X)$ denote the completion of $\mathcal{K}(X)$ with respect to the norm $\|\cdot\|$. Given a bounded linear operator $f\colon X\to Y$, let a map $\tilde{K}(f)\colon\tilde{\mathcal{K}}(X)\to\tilde{\mathcal{K}}(Y)$ be defined on the dense subset $\mathcal{K}(X)$ as follows: $\tilde{K}(f)([A,B])=[f(A),f(B)]$, if $[A,B]\in\mathcal{K}(X)$. It is easy to check that $\tilde{K}(f)$ is a well-defined linear operator. We therefore obtain a functor $\tilde{K}$ acting in the category **Ban** of Banach spaces and bounded linear operators.

We show that the functor $\tilde{K}$ determines a monad in the category **Ban** and characterize the category of algebras of this monad in terms of the Banach lattice theory.

We also consider a subfunctor of $\tilde{K}$ related to the classes of compact convex sets of constant width.

References

[1] V. F. Demyanov, A. M. Rubinov, Quasidifferential calculus, Optimization Software Inc., Publications Division, New York, (1986).

[2] A. G. Pinsker, The space of convex sets of a locally convex space. Leningrad. Inzh.-Ekonom. Inst. Trudy. Vyp. 63, 1966, 13–17.

[3] О. Савченко, Пари опуклих множин у розмитих нормованих просторах, Математичний вісник НТШ, 2012, Т. 9, 285–296.

Some topological properties of complete linked systems

Beshimov R.B.[1], Mukhamadiev F.G.[2]

([1]Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Uzbekistan)

([2]National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, Uzbekistan)

E-mail address: [1]`rbeshimov@mail.ru`, [2]`farhod8717@mail.ru`

In the work [1] V.Chatyrko and Y.Hattory introduced the notion of an admissible extension of topological spaces. Let us recall those two definitions.

Definition 1 [1]. Suppose τ_1 and τ_2 are two topology on X. We say that the topology τ_2 on X is an admissible extension of τ_1 if

(i) $\tau_1 \subseteq \tau_2$;

(ii) τ_1 is a π-base for τ_2, i.e. for each nonempty element $O \in \tau_2$ there exists an element $V \in \tau_1$ such that $V \subset O$.

A.V.Ivanov [2] defined the space NX of complete linked systems (CLS) of a space X in a following way:

Definition 2 [2]. A linked system M of closed subsets of a compact X is called a complete linked system (CLS) if for any closed set of X, the condition

"Any neighborhood OF of the set F consists of a set $\Phi \in M$" implies $F \in M$.

A set NX of all complete linked systems of a compact X is called the space NX of CLS of X. This space is equipped with the topology, the open basis of which is formed by sets in the form of $E{=}O(U_1, U_2, ..., U_n)\langle V_1, V_2, ..., V_s\rangle{=}\ \{M \in NX :$ for any $i = 1, 2, ..., n$ there exists $F_i \in M$ such that $F_i \subset U_i$, and for any $j = 1, 2, ..., s$, $F \cap V_j \neq \emptyset$ for any $F \in M\}$, where $U_1, U_2, ..., U_n, V_1, V_2, ..., V_s$ are nonempty open in X sets.

Theorem. Suppose τ_1 and τ_2 are two topologies on X. If the topology $N(\tau_2)$ is an admissible extension of the topology $N(\tau_1)$ on NX then the topology τ_2 is also an admissible extension of the topology τ_1.

References

[1] Chatyrko V.A., Hattory Y. A poset of topologies on the set of real numbers. Comment.Math.Univ.Carolin., 54,2(2013), pp.189-196.

[2] Ivanov A.V. Cardinal-valued invariants and functors in the category of bicompacts. *Doctoral thesis in physics and mathematics.* Petrozavodsk,1985, 235p.

Studying interaction dynamics of chaotic systems within nonlinear prediction method: Application to neurophysiology

S. V. Brusentseva

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantbru@mail.ru

S. S. Seredenko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantnik@mail.ru

I. N. Serga

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucserga@mail.ru

Paper is devoted to an employing a variety of techniques for characterizing dynamics of the nonlinear neuro-physiological systems identifying the presence of chaotic elements [1, 2]. As example, let us underline that an ability to provide interaction between the different areas of the brain by using a multichannel electroentselophalogramms helps determine the location of the foci of abnormal activity in brain of patients with epilepsy. Many diseases of the brain, including epilepsy, Parkinson's disease, are associated with abnormal synchronization large groups of neurons in the brain.

Particular attention is paid to a non-linear signals as obvious is a typicality of a chaotic behavior of nonlinear systems. To analyze measured time histories of the neuro-physiological system responses with the use of the recurrence plots method the phase space of these systems was reconstructed by delay embedding. The mutual information approach, correlation integral analysis,false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, and surrogate data method are used for comprehensive characterization [1]-[4]. The correlation dimension method provided a low fractal-dimensional attractor thus suggesting a possibility of the existence of chaotic behavior. Statistical significance of the results was confirmed by testing for a surrogate data. We also present the concrete numerical results regarding the ensembles fluctuations of spontaneous Parkinsonian tremor of a few patients [4].

References

[1] H. Schuste *Deterministic Chaos: An Introduction.*,- Wiley, N.-Y., (2005), 312p.

[2] A. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa,OSENU, (2013), 400p.

[3] A. Glushkov, V. Kuzakon et al *Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on basis of temporal series analyses.*,-Dyn.Systems - Theory and Appl. 1, (2011), P.31-38.

[4] O. Khetselius, S. Brusentseva, T. Tkach *Studying interaction dynamics of chaotic systems within non-linear prediction method: Application to neurophysiology.*,-Dyn.Systems - Theory and Appl. 1, (2013), P.LIF139 (8p.).

Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac equation and calculating the dielectronic satellites spectra: New numerical algorithm

Yu. G. Chernyakova

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantche@mail.ru

A new approach to quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the Dirac-Slater equation for N-particle quantum systems is developed. In difference of our previous similar self-conjunctive versions [1], new method has a few advantages. It is based on ab initio version of the quantum electrodynamics perturbation theory for the N-quasi-particle systems with using comprehensive, gauge invariant Dirac-Slater relativistic orbital basis's generation scheme [2] and effective procedure of the Fano-Byorke type [3] for calculating the perturbation operator matrix elements for N-quasi-particle states and with accurate accounting the complex correlation effects. The recurrence relationships between the three-body and two-body matrix elements have been obtained within new scheme. The theorem establishing a link between gauge non-invariant contributions into the matrix elements and quality of the eigen functions basis of the corresponding Dirac-Slater operator is proven.

New approach is applied in calculation of the characteristics for dielectronic satellites of spectral lines for multicharged ions. New spectral data have been obtained for characteristics Na-like satellite lines within a full relativistic perturbation theory [2] calculation. An effective procedure for theoretical modelling the dielectronic satellites spectra of multicharged ions is carried out and applied to modelling spectra of neon-and sodium-like multicharged ions. This scheme is based on using obtained relativistic, gauge-invariant calculation data and statistical procedure of accounting line intensity distribution for transitions between configurations with great number of lines [3]. There is performed comparison of the test data obtained within different methods, namely, multi-configuration Dirac (Hartree)-Fock calculation, density-functional theory and others and found that a new approach has the best accuracy and especially effective for studying complex configurations, where it is realized an intermediate case [3].

References

[1] Yu. G. Chernyakova et al *Estimating the tokamak parameters by means high resolution theoretical spectroscopy method.*,- Photoelectr. 19: 1, (2010), P. 107-110.

[2] Yu. G. Chernyakova, Yu. V. Dubrovskaya, T. A. Florko, et al, *An advanced approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Slater equation.*,-Proceedings of International Geometry Center. 6: (2013), P.29-34.

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Fractal geometry approach and a chaos theory method to numerical analysis and forecasting nonlinear dynamics of chaotic systems (application to econophysics): New numerical algorithm

A. V. Duborez

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantdub@mail.ru

Nonlinear modeling of chaotic processes can be carried out on the base of fractal geometry approach and a chaos theory method [1]. Here we present a new numerical approach to analysis and forecasting nonlinear dynamics of chaotic system on the example of the econophysical system. Use of the information about the phase space in the simulation of the evolution of the econophysical process in time can be considered as a major innovation in the modeling of chaotic process. The main concept can be achieved by constructing a parameterized non-linear function $F(x, a)$, which transform $y(n)$ to $y(n+1)=F[y(n), a]$, and then use different criteria for determining the parameters a . To analyze measured time histories of the econophysical system the phase space of these systems was reconstructed by delay embedding. The mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbour algorithm, Lyapunov exponent's analysis, and surrogate data method are used for comprehensive characterization [1, 2]. Further, since there is the notion of local neighborhoods, we can create a model of the process occurring in the neighborhood, at the neighborhood and by combining together these local models to construct a global non-linear modelto describe most of the structure of the attractor. In finding the coefficients of a there is a possible encounter a few problems, which at first glance seem to be purely technical, but are related to the nonlinear properties of the system. If the low-dimensional chaotic system, the data that can be used for fitting, normally cover any available locally dimension, but only a certain subspace. Therefore, the linear system of equations to be solved by fitting is "ill-conditioned". However, if the system noise is present, the equations formally are not ill-conditioned, but part of the decision relating to the "direction" of noise points to the future, is not having a sense [2].

As an application we employ a varietyof techniques (in version [1]) for characterizing dynamics of the nonlinear econophysical system identifying the presence of chaotic elements. We considered ideal gas-like models of trading markets, where each agent is identified as a gas molecule that interacts with others trading in elastic or money-conservative collisions. Traditionally, these models introduce different rules of random selection and exchange between pair agents. Unlike these traditional models, this work introduces a chaotic procedure able of breaking the pairing symmetry of agents (i, j) , (j, i). We confirm the known Pellicer-Lostao and Lopez-RuizIts result relatively that the asymptotic money distributions of a market under chaotic evolution can exhibit a transition from Gibbs to Pareto distributions, as the pairing symmetry is progressively broken. Besides, we present the numerical data about the key parameters of the studied system [3].

References

[1] A. V. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa, OSENU, (2013), 400p.

[2] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, G. P. Prepelitsa et al *Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos .*,- Dynamical Systems: Theory and Applications, (2011), P.73-38.

[3] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, S. V. Brusentseva, A. V. Duborez, *Numerical analysis and forecasting nonlinear dynamics of chaotic systems using a chaos theory methods.*,-Proc. of Int. Conf. on Computational Physics (Moscow, Russia), (2013), P.127.

Quantization of the quasistationary states for the Dirac-Fock equations with density dependent forces and calculating the beta-decay probabilities: New numerical algorithm

Yu. V. Dubrovskaya

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucdubr@mail.ru

This work goes on studying and development of a new effective numerical approach to problem of quantization of states of the relativistic equations and further using the corresponding eigen function basis in the calculations of the permitted beta transitions by means of the golden Fermi-rule [1]. In this paper we present a new numerical algorithm to quantization of the stationary (quasi-stationary) states for the Dirac-Fock equations with density dependent forces and calculating the beta-decay probabilities. The principally new element is connected with introducing the consistent density dependent functionals into the Dirac-Fock equations to take into account as the one-particle as the many-particle correlation effects. Besides, as usually, a great importance is turned on calculating the optimized sets of eigen functions and correspondingly eigen values. To provide and check fulfilling the gauge invariance in the optimized Dirac-Fock method with density dependent forces, the QED gauge-invariant approach [3] and the Yord equalities. The important topic is a correct account of he nuclear and radiation effects within quaelectrodynamics. As usually (see, for example, [1]), the correction due to the finite size of a nucleus (the charge distribution in a nucleus is modelled within the homogeneous charged ball and Gauss models) is accounted for in the zeroth approximation of the perturbation theory in an electric and vacuum-polarization potentials, which are substituted to the effective Dirac-Fock equations (i.e on the non-perturbative basis) [3].

As an example, a new effective Dirac-Fock approach with density dependent forces is applied to calculating the beta-decay parameters for a number of the permitted beta transitions. Calculation for superpermitted transitions has demonstrated good agreement between theory and experiment that is practically better than in a case of the standard Dirac-Fock, Hartree-Fock atomic models, Coulomb approximation and even our last version of the Dirac-Slater approach due to the more correct fulfilling the gauge invariance condition (i.e. more accurate account for exchange-correlation effects). Calculation of the influence for the atomic self-consistent field type on the Fermi function shows that for little and intermediate values of nuclear charge Z a difference in the data, provided by different methods is quite little, however for big Z (for example, ^{241}Pu-^{241}Am) it becomes quite significant (till a few percents in comparison with non-relativistic data). It is performed a quantitative analysis and estimate of difference (calculated within all cited above methods) between values of the Fermi function under definition of by means of values of the radial electron wave functions on the boundary of a nucleus and by means of the squares of expansion amplitudes of radial wave functions for r near zero).

References

[1] A. V. Glushkov, Yu. V. Dubrovskaya *QED theory of multiparticle Fermi systems.*,- // Recent Advances in Theory of Phys. and Chem. Systems. Progress in Methods and Applications, Ser. Progress in Theoretical Chemistry and physics. - Berlin, Springer. vol.15, (2006), P. 301-328.

[2] J. Slater *Methods of self-consitent field in theory of molecules and solids.*,- Wiley, (1974), 650p.

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Quantization of the quasi-stationary states for the many-body Dirac-Fock equation and calculating the radiative transition probabilities: New numerical approach

T. A. Florko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantflo@mail.ru

Our work goes on our studying the problem of quantization of the stationary and quasi-stationary states for the corresponding relativistic Dirac-Fock-like equations and precise calculating the radiative transitions characteristics in spectra of the heavy atomic systems. Let us remind that usually the multi-configuration Hartree-Fock and Dirac-Fock approaches are used in calculations of the energy eigen values and different spectral parameters for many-body atomic systems. Though these approaches provide the most reliable version of calculation, nevertheless, as a rule, detailed description of the method for studying role of the gauge-invariant contributions and more tiny radiative corrections is lacking. Serious problems are connected with correct definition of the high-order correlation corrections etc. The further improvement of this method is connected with using the gauge invariant procedures of generating relativistic orbital basis's and more correct treating the above cited effects [1].

Here we present a new gauge-invariant version of the relativistic many-body perturbation theory approach with the optimized Dirac-Fock zeroth approximation to description of the radiative transitions characteristics in spectra of the heavy atomic systems. New effective procedure for quantization of the stationary and quasi-stationary states for the corresponding Dirac-Fock equations is presented. Respectively, a new precise approach to calculating the (permitted and forbidden) radiative transition probabilities is developed [2]. New method is based on the energy approach and gauge-invariant QED perturbation theory formalism with using the optimized one-quasi-particle representation and precised accounting for the exchange-correlation effects [3].

As the test, there are carried out the calculations of energies, probabilities and oscillator strengths for the radiative (M1,M2, E2 etc) transitions in spectra of the HgII, ArII ions, ions of the isoelectronic sequences NeI, ZnI (Z till 92) and lanthanoides atoms EuI,YbI. A significant part of the quite exact spectral data is firstly obtained and can be used in different applications. There is performed a detailed comparison of received energy and spectral data with available alternative theoretical and experimental results for the cited systems. At last, the theorem about a link between the asymptotic properties of the eigen functions and minmax estimates of the corresponding radiative transition integrals is proven.

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[2] T. A. Florko *Quantum geometry: new numerical approach to quantization of the quasistationary states of Dirac-Fock equation.*,- Proc.Int.Geometry Center. 5: 3, (2010), P. 32-38.

[3] A. V. Glushkov, T. A. Florko et al *Optimized perturbation theory scheme for calculating the interatomic potentials and hyperfine lines shift.*,- Int.J. Quant. Th. 109: 4, (2009), P. 3325-3332.

Quantization of quasi-stationary states for many-body Dirac equation in collision problem: Advanced Operator approach

A. V. Glushkov

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `dirac13@mail.ru`

It is proposed a new generalized operator [1] approach to quantization of the quasi-stationary (scattering) states of relativistic many-body Dirac (Dirac-Kohn-Sham) equations for two classes of non-stationary and collision tasks. Earlier we have developed an effective operator approach to quantization of the quasi-stationary (scattering) for Dirac-Fock equations in a class of non-stationary tasks [2]. New algorithm was developed and based on the multi-body perturbation theory with the Dirac-Fock zeroth approximation and mapped Fourier grid technique [3]. Here we generalized this approach to take into account the many-body correlations in the quantum systems, described by the relativistic many-body Dirac (Dirac-Kohn-Sham) equations.

Besides, we elaborated new quantization procedure for the Dirac equation nuclear and electron quasistationary states. It results in redefinition of the cross-section for the nucleus-nucleus collision with EPPP by means of the modified expression through imaginary part of the complex energy. The latter is standardly defined within the relativistic energy approach, which is based on the S-matrix Gell-Mann and Low adiabatic formalism [4]. The nuclear and electron subsystems are described by the corresponding Dirac-Kohn-Sham equations and treated as two parts of the uniform supercompound system, interacting with each other through the special effective potential [2]. It is proven a generalized theorem limiting the asymptotic behavior of the collision cross-section at infinite energy.

References

[1] A. V. Glushkov, *Operator perturbation theory for quantum systems in a strong AC/DC electric field.*,- Advances in Quantum Methods and Applications in Chemistry, Physics, and Biology (Berlin, Springer). 28: (2013), P. 161-198.

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, A. A. Svinarenko *Frontiers in Quantum Systems in Chem. And Physics.*,- Progress in Theoretical Chemistry and Physics (Berlin, Springer). 18 : (2008), P. 505-570.

[4] A. V. Glushkov, *Advanced relativistic energy approach to radiative decay processes in multielectron systems.*,- Quantum Systems in Chemistry and Physics: Progress in Methods and Applications (Berlin, Springer). 26: (2012), P. 231-254.

Geometry of a Chaos: New combined method for treating a deterministic chaos in complex systems

A. V. Glushkov

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: dirac13@mail.ru

V. M. Kuzakon

(ONAFT, Odessa, Ukraine)

E-mail address: kuzakon-v@ukr.net

V. B. Ternovsky

(OSENU, Odessa, Ukraine)

V. V. Buyadzhi

(OSENU, Odessa, Ukraine)

Within a development of geometry of a chaos here We present new combined approach to treating a deterministic chaos in the complex systems, which includes new elements of advanced techniques such as the multi-fractal formalism, wavelet analysis, optimal propagators method, mutual information approach, correlation integral analysis, false nearest neighbor algorithm, Lyapunov exponent's analysis, memories function formalism, surrogate data method etc [2]. The new advanced chaos-geometrical approach is designed for analyzing the signal's temporal series in modelling interactions in a formally complex vibrational systems [3] and search of an existence of chaotic behavior in these systems. A chaos theory establishes that apparently complex irregular behaviour could be the outcome of a simple deterministic system with a few dominant nonlinear interdependent variables. The correlation dimension and optimal propagators methods provide a low fractal-dimensional attractor thus suggesting a possibility of the existence of chaos. The method of surrogate data, for detecting nonlinearity, provides significant differences in the correlation exponents between the original data series and the surrogate data sets. The Lyapunov exponents analysis supports conclusion that the systems studied exhibits low-D chaos.

As a concrete example, we studied the nonlinear dynamics of some laser systems and backward-wave tube in order to detect a chaos elements. We considered the dynamical chaos regime in generation of a laser with absorbing cell and chaotic self-oscillations in the backward-wave tube on the basis of numerical analysis by means a set of advanced methods. New data about the Lyapunov exponents' for two self-oscillations regimes in the backward-wave tube: i). the weak chaos (normalized length: L=4.24); ii) developed chaos (L=6.1). The correlations dimensions are respectively as 2.9 and 6.2. Our analysis confirms a conclusion about realization of the chaotic features in dynamics of the studied backward-wave tube system. The same program is realizing for laser system with absorbing cell.

References

[1] H. Schuste *Deterministic Chaos: An Introduction.*,- Wiley, N.-Y., (2005), 312p.

[2] A. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa,OSENU, (2013), 400p.

[3] A. Glushkov, V. Kuzakon et al *Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on basis of temporal series analyses.*,- Dyn.Systems - Theory and Appl. 1, (2011), P.31-38.

Bi-Hamiltonian two-dimensional nonlinear differential-difference systems

O. Ye. Hentosh

(Pidstryhach IAPMM, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine)

E-mail address: ohen@ua.fm

On the dual space $\mathcal{G}^*$ to the Lie algebra $\mathcal{G}$ of shift operators in the forms

$$\mathcal{A} = \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}}^{j\ll\infty} A_j T^j \in \mathcal{G}, \quad A_j \in C^\infty(\mathbb{Z}; g),$$

where g is a Lie algebra of shift operators with functional coefficients, $A_j = \sum\nolimits_{i\in\mathbb{Z}}^{i\ll\infty} a_{j,i}\mathcal{E}^j$ and $a_{j,i} \in C^\infty(\mathbb{Z}^2; \mathbb{R})$ for any $j, i \in \mathbb{Z}$, T and $\mathcal{E}$ are usual shift operators, acting by the rules

$$T^j a(n,m) = a(n+j,m)T^j, \quad \mathcal{E}^i a(n,m) = a(n,m+i)\mathcal{E}^i, \quad a \in C^\infty(\mathbb{Z}^2;\mathbb{R}),$$

with the standard commutator ([1])

$$[\mathcal{A},\mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A}, \quad \mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{G},$$

and the nondegenerated invariant scalar product

$$(\mathcal{A},\ \mathcal{B}) = \mathrm{Tr}\,(\mathcal{A}\mathcal{B}), \quad \mathrm{Tr}\,\mathcal{A} := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \tau(A_0) := \sum\nolimits_{n\in\mathbb{Z}} \sum\nolimits_{m\in\mathbb{Z}} a_{0,0},$$

one construct the Lie-Poisson bracket such as

$$\{\gamma,\mu\}_{\mathcal{R}}(\ell) = (\ell, [\nabla\gamma(\ell), \nabla\mu(\ell)]_{\mathcal{R}}), \quad \ell \in \mathcal{G}^*, \tag{1}$$

where $\gamma, \mu \in \mathcal{D}(\mathcal{G}^*)$ are smooth by Frechet functionals on $\mathcal{G}^*$, ∇ is a gradient symbol, $\mathcal{G} = \mathcal{G}_+ \oplus \mathcal{G}_-$, the Lie subalgebra $\mathcal{G}_+ \subset \mathcal{G}$ consists of the elements $\sum\nolimits_{s\in\mathbb{Z}_+}^{s\ll\infty} A_s T^s \in \mathcal{G}$, $P_\pm\mathcal{G} = \mathcal{G}_\pm$, $P_\pm\mathcal{G}_\mp = 0$, $\mathcal{R} = \frac{1}{2}(P_+ - P_-)$ and $[\mathcal{A},\mathcal{B}]_{\mathcal{R}} = [\mathcal{R}\mathcal{A},\mathcal{B}] + [\mathcal{A},\mathcal{R}\mathcal{B}]$ for any $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{G}$. The Lie-Poisson bracket (1) and the Casimir functionals $\gamma_k := \frac{p}{k+p}\mathrm{Tr}\,\ell^{\frac{k+p}{p}}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, as Hamiltonians generate hierarchy of evolution equations

$$\frac{d}{dt_k}\ell = [(P_+\ell^{\frac{k}{p}}),\ \ell], \quad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{2}$$

where $\ell := T^p + \sum\nolimits_{j\in\mathbb{Z}}^{j<p} \hat{u}_j T^j \in \mathcal{G}^*$, $\hat{u}_j \in C^\infty(\mathbb{Z}; g)$, $p \in \mathbb{N}$. The second Hamiltonian structure for (2), being compatible with the bracket (1), is given by the Lie-Poisson bracket

$$\{\gamma,\mu\}_{\mathcal{R}_\ell}(\ell) = (\ell, [\nabla\gamma(\ell), \nabla\mu(\ell)]_{\mathcal{R}_\ell}), \quad \ell \in \mathcal{G}^*, \tag{3}$$

where $\mathcal{R}_\ell(\mathcal{A}) = P_+(\ell\mathcal{A}) - P_-(\mathcal{A}\ell)$ and $[\mathcal{A},\mathcal{B}]_{\mathcal{R}_\ell} = [\mathcal{R}_\ell\mathcal{A},\mathcal{B}] + [\mathcal{A},\mathcal{R}_\ell\mathcal{B}]$ for any $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathcal{G}$.

The bi-Hamiltonian systems (2) on orbits of the coadjoint action of the Lie algebra $\mathcal{G}$ can be considered as Lax representations for $(2+1)$-dimensional differential-difference nonlinear dynamical systems. It is shown that in the special cases the bi-Hamiltonian structures for these systems can be obtained as reductions of the compatible Hamiltonian structures (1) and (3) on the mentioned above orbits. The analog of the theorem (see [2]) about the existence of bi-Hamiltonian interpretation for reduced Lax type hierarchy, concerning with the Lie algebra of integro-differential operators of two independent variables, is formulated.

References

[1] Hentosh O., Prytula M., Prykarpatsky A. *Differential-geometric and Lie-algebraic foundations of studying integrable nonlinear dynamical systems on functional manifolds.* - Lviv: Ivan Franko National University Publishing, (2006), 403p. (in Ukrainian)

[2] Dorfman I. Ya., Fokas A. S. *Hamiltonian theory over noncommutative rings and integrability in multidimensions.*, J. Math. Phys. 33: 7, (1992), P. 2504–2514.

Quantization of states of the relativistic Dirac equation with a non-singular potential and parity violation amplitudes of transitions for heavy finite Fermi-systems

O. Yu. Khetselius

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nuckhet@mail.ru

In this work we go on our investigation of a problem of the eigen-values spectrum and eigen-functions for an effective relativistic Hamiltonian of the finite heavy many-body Fermi-systems and further application to quantitative treating hyperfine structure parameters of these systems and description of the electroweak interactions with calculating the corresponding electro-weak amplitudes for transition, in which the parity violation effect occurs [1].

Here a new advanced approach to quantization of the bound and quasistationary (scattering) states of the relativistic Dirac equation with a non-singular (singular) potential is proposed. On its basis further we develop a new advanced approach to calculating the electro-weak amplitudes of the transitions with parity violation, provided by e-N electroweak interaction. Our advanced approach is based on the combined relativistic mean field model of a nucleus and QED gauge-invariant many-body perturbation theory with using the optimized one-quasiparticle representation [2]. The correction due to the finite size of a nucleus is accounted for in the relativistic Dirac equation (zeroth approximation of the perturbation theory) in the electric and vacuum-polarization potentials on the non-perturbation basis. The charge distribution in a nucleus is modelled within the relativistic mean field model. To take into account the main radiative effects such as vacuum-polarization and self-energy part of the Lamb shift, we develop the relativistic Green's function method for Dirac equation with relativistic mean-field nuclear potential and complex energy. The effectiveness of the quantization procedure and correctness of the one-quasiparticle representation (zeroth relativistic Dirac approximation) are checked on example of accurate calculating parity violating dipole amplitudes for a number of the finite heavy Fermi-systems. A theorem, providing reconstruction of the conservation effect, has been proven.

New approach is applied in calculating the hyperfine structure parameters, parity non-violation electro-weak amplitudes for a set of the heavy finite Fermi-systems with accounting of exchange-correlation, Breit, weak e-e interactions, radiative and nuclear (magnetic moment distribution, finite size, neutron "skin") corrections, nuclear-spin dependent corrections due to anapole moment, Z-boson ((AnVe) current) exchange, combined hyperfine and Z boson exchange ((VnAe) current) interactions [3]. Firstly we predict values of the weak charge for ytterbium and other heavy elements and compare with the corresponding Standard model data.

References

[1] O. Yu. Khetselius *Quantum structure of electroweak interaction in heavy finite Fermi-systems.*,- Odessa, Astroprint, (2011), 452p.

[2] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[3] O. Yu. Khetselius, *Quantum Geometry: New approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac equation for relativistic many-body system and calculating some spectral parameters.*,- Proceedings of International Geometry Center. 6, N1: (2013), P.60-66.

About equiscalar lines of a continuous function in the neighborhood of isolated local minimum (maximum) and locally star-shaped regions

A. A. Kotliar

(Taras Shevchenko National University of Kiev)

E-mail address: `anastasija_kotliar@bigmir.net`

Isolated local minima (maxima) of continuous functions and its' equiscalar lines are considered in order to derive topological invariant of the given function in the neighborhood of this isolated local point. In the investigation an answer on the question:"Are the equiscalar lines of a continuous function always homeomorphic to circles?" is given. The example of a continuous function with the equiscalar lines, that are not homeomorphic to circles was introduced.

Definition1 A family F of curves is called ***regular*** in U if for each arc PQ of the curve C and for every $\epsilon>0$ there exists $\delta>0$ such that if ρ(P,P')$<\epsilon$, where P'$\in C'\in F$, then σ(P'Q',PQ)$<\delta$.

Theorem1 Equiscalar lines of a continuous function in the neighborhood of isolated local minimum (maximum) are homeomorphic to circles if and only if they form a regular family of curves in the neighborhood of his point.

Earlier, only curves which bound a star-shaped region were considered.

Definition2 A plane Jordan's curve γ ***bounds a star-shaped region*** if there exists a point O in the closure of this region such, that each linear segment which connects this point O with any point of a curve wholly belongs to the closure of the region. A point O from this definition is called ***a center of star-shapedness***.

More general definition was introduced:

Definition3 A point x_1 from a set Γ is called ***a point of local star-shapedness*** if for it there exists a subset Γ_{α_1} such that x_1 is a center of star-shapedness of Γ_{α_1}. A set Γ_{α_1} is called ***locally star-shaped region***.

Obviously, if, in general, a closed Jordan's curve bounds a region which is not star-shaped then it can be partitioned into locally star-shaped subregions.

Theorem2 For a region that is bounded by any closed Jordan's curve there always exists a partitioning by finite number of subregions $\{\Gamma_{\alpha_i}\}, i \in \mathbb{N}$.

The theorem below generalizes a statement about the continuous function upon the star-shaped region to the case of locally star-shaped region.

Theorem3 A set of cones that are built upon star-shaped subregions of a locally star-shaped region topologically equivalent to some continuous function.

Intrinsic clothing of regular family of hyperplane elements

A. V. Kuleshov

(I. Kant BFU, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: `arturkuleshov@yandex.ru`

Let P_N be a projective space of dimension N ($N \geq 4$) and P_N^* be its dual space. A hyperplane element of the space P_N is a pair $L_{N-1}^* = (L_{N-1},\, A)$ where L_{N-1} is a hyperplane in P_N and $A \in L_{N-1}$. Consider a smooth family B of hyperplane elements. Define two mappings $\xi\colon B \to P_N$ and $\eta\colon B \to P_N^*$ by $\xi\colon (L_{N-1},\, A) \mapsto L_{N-1}$, $\eta\colon (L_{N-1},\, A) \mapsto A$. By definition, $B_{p,\,q}$ is a family B satisfying the following conditions: 1) $\eta(B_{p,\,q})$ is a smooth p-dimensional surface S_p ($p < N-2$); 2) the projection $\eta : B_{p,\,q} \to S_p$ is a fiber bundle over S_p with q-dimensional fibers, where $1 \leqslant q \leqslant N-p-2$; 3) $T_A(S_p) \subset L_{N-1}$ for any $(L_{N-1}, A) \in \eta^{-1}(A)$.

Let $V(B_{p,\,q})$ denote the envelope of the smooth family $\xi(B_{p,\,q})$. A characteristic $F_r(L_{N-1}^*)$ of $B_{p,\,q}$ at L_{N-1}^* is the plane generator of $V(B_{p,\,q})$ at L_{N-1}^*. We say $B_{p,\,q}$ to be regular if for any $L_{N-1}^* \in B_{p,\,q}$ we have $F_r(L_{N-1}^*) \cap T_A(S_p) = A$ where $A = \eta(L_{N-1}^*)$. In this case $r = N-p-q-1$.

Let $\mathcal{F}(B_{p,q})$ denote the bundle of projective frames adapted to the regular family $B_{p,\,q}$ so that any frame $\{A_0,\, A_i,\, A_u,\, A_y,\, A_N\}$ in the fiber over $L_{N-1}^* = (L_{N-1},\, A)$ satisfies the following conditions: $A_0 = A$, $A_i \in T_A(S_p)$, $A_u \in L_{N-1}$, $A_y \in F_r(L_{N-1}^*)$, where $i,\, j = \overline{1,\, p}$; $u,\, v = \overline{p+1,\, p+q}$; $y = \overline{p+q+1,\, N-1}$. Equations of $B_{p,\,q}$ in the adapted frame have the form

$$\omega^u = 0, \quad \omega^y = 0, \quad \omega^N = 0, \quad \omega^N_y = 0, \quad \omega^u_i = \Lambda^u_{ij}\theta^j, \quad \omega^y_i = \Lambda^y_{ij}\theta^j,$$

$$\omega^N_i = \Lambda^N_{ij}\theta^j, \quad \omega^u_y = \Lambda^u_{yi}\theta^i + \Lambda^{uv}_{yN}\theta^N_v, \quad \omega^i_y = \Lambda^i_{yj}\theta^j + \Lambda^{iu}_{yN}\theta^N_u,$$

where θ^i, θ^N_u are the base forms of the family and the functions Λ form the first-order fundamental object of the family $B_{p,\,q}$ which includes the tensor Λ^N_{ij}. The components of the latter satisfy the following equations:

$$d\Lambda^N_{ij} + \Lambda^N_{ij}\omega^N_N - \Lambda^N_{kj}\omega^k_i - \Lambda^N_{ik}\omega^k_j = \Lambda^N_{ijk}\theta^i - \Lambda^u_{ij}\theta^N_u.$$

For regular family $B_{p,\,q}$ we have $det\|\Lambda^N_{ij}\| \neq 0$, so one can consider inverse tensor V^{ij}_N and the objects

$$\Lambda^u_N = \frac{1}{p}\Lambda^u_{jk}V^{jk}_N, \quad \Lambda^y_N = \frac{1}{p}\Lambda^y_{jk}V^{jk}_N, \quad \Lambda_k = \frac{1}{p+2}\Lambda^N_{ijk}V^{ij}_N.$$

We denote $\bar{B}$ a regular family $B_{p,N-p-2}$. For such a family $y = p+q+1$. In the general case for $\bar{B}$ one can reduce the bundle $\mathcal{F}(B_{p,q})$ in five steps. As a result, all the forms for except ω^i_j, ω^u_v, ω^y_y, ω^N_N will be expressed by the base forms, and the vertices of the adapted frame will be spanned by the invariant planes of the five-term composition:

$$A \oplus N_{p-1} \oplus N_{q-1} \oplus A_y \oplus A_N = P_N, \quad N_{p-1} = [A_i], \quad N_{q-1} = [A_u]. \tag{1}$$

Theorem. *In the general case, the composite clothing consisting of fields of the planes in (1) is attached to regular family $\bar{B}$.*

Quantization of the states for the Schrödinger equation with a crossed AC electric and magnetic field potential

A. S. Kvasikova

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `quantkva@mail.ru`

A new approach to quantization of the states for the Schrödinger equation with a crossed AC electric and magnetic field potential is developed within the operator perturbation theory [1]. New numerical approach has been carried out to calculating the energy eigen values and eigen functions of the energies, Stark resonances widths and probabilities of transitions between Stark and Zeemane sublevels for atomic system in the crossed AC electric and magnetic fields. In difference of the similar approach for a case of the crossed DC electric and magnetic field, the problem studied has some especial features. The non-stationary problem is in fact reduced to the stationary problem for the eigenvalues and eigenvectors of the energy matrix A (with the consideration of several Floka-zones), where the natural state is actually scattering resonances in the complex energy: $E{=}E_r$-i$G/2$. A diagonalization performed using the system of the Sturm-Liouville approximation for the Schrödinger equation. Further, the operator perturbation theory [2] has been used, and the zeroth order Hamiltonian in the Schrödinger equation with a crossed field potential is defined by the set of the orthogonal eigen values and eigen functions without specifying the explicit form of the corresponding zeroth order potential. it allows to overcome the formal and numerical difficulties. We have proven a generalized theorem that G/E remains less than $1/n$ even in the vicinity of the "new continuum" boundary (n is the principal quantum number).

As example of application, we present the calculation results for the energy eigen values of the ground state for hydrogen in the AC electric and magnetic fields [3]. For comparison there are also listed the results of the ground state energy eigen values obtained on the basis of the standard perturbation theory (look, for example, review in [2]). Analysis shows that the both results are in the reasonable agreement, at least till the field strengths values 0.04 atomic units. Further in a case more strong field it begins to increase the difference between our theory data and the standard perturbation theory results. From the one side, for weak field strength values an excellent agreement between both approaches can be easily explained. From the other hand, the standard PT formalism falls in a case of consideration the strong electric or magnetic or both simultaneously fields. Our theory is absolutely valid in a case of the strong fields too [3].

References

[1] A. V. Glushkov, L. N. Ivanov *Consistent quantum approach to DC strong field Stark effect.*,- Journ. Phys. B. (UK) 26: 16, (1993), P. L379-386.

[2] A. V. Glushkov *Atom in electromagnetic field: Numerical models.*,- KNT, Kiev, (2005), 450p.

[3] A. S. Kvasikova et al *Spectroscopy of the hydrogen in the crossed dc electric and magnetic field.*,- Photoelectr. 20: (2011), P. 71-75.

Double equivalence of Morse-Smale pair on 3-manifolds

N. V. Lukova-Chuiko, O. O. Voronchuk

(State University of Telecommunications, Kiev, Ukraine)

E-mail address: `lukova@ukr.net`

A pair (f, X) is called *Morse-Smale pair* if f is a Morse function and X is gradient-like vector field for f.

Morse-Smale pairs (f, X) (g, Y) are called *double equivalent* if there exist a homeomorphism $h : M \to M$, $h' : R \to R$ for which $f \circ h = h' \circ g$ and in addition homeomorphism h maps the trajectory of X on the trajectory of Y.

For Morse-Smale pair we construct generalized ordered Heegaard diagram (GOHD). Heegaard surface F is the boundary of the union of handles index 0 and 1.

Meridians are the intersections of the surface F with unstable manifolds of critical points of index 1 and the intersections of the surface F with stable manifolds of critical points of index 2. Let y_1, ..., y_N are the critical values of functions that are organized by increase ($y_1 < y_2 < ... < y_N$). We set σ $(y_i) = i$. Each critical point of index 0 corresponds to the area U_i, the point index 1corresponds to meridian u_i, point of index 2 corresponds to meridian v_i and the point of index 3 corresponds to region V_i. Thus, the performance mapping σ the set $\{U_1$, U_2, ..., U_k, u_1, u_2, ..., u_n, v_1, v_2, ..., v_m, V_1, V_2, ..., V_l $\}$ into the set $\{$ 1, 2, ..., N $\}$. Thus, each MC function GOHD sets. This GOHD we call GOHD that generated this MS function.

Two GOHD are called equivalent if there is a homeomorphism of GHD that keeps ordering.

Theorem 1. *Gradient-like pairs (f, X), (g, Y) are double equivalent if and only if their GOHD are equivalent.*

We describe some properties of the function σ:

1) if $u_i \subset \partial U_j$, then σ $(u_i) > \sigma$ (U_j);
2) if $v_i \subset \partial V_j$, then σ $(v_i) < \sigma$ (V_j);
3) if $u_i \bigcap v_j \neq \emptyset$, then σ $(u_i) < \sigma$ (v_j);
4) if $U_i \bigcap v_j \neq \emptyset$, then σ $(U_i) < \sigma$ (v_j);
5) if $u_i \bigcap V_j \neq \emptyset$, then σ $(u_i) < \sigma$ (V_j);
6) if $U_i \bigcap V_j \neq \emptyset$, then σ $(U_i) < \sigma$ (V_j).

A function σ, which satisfies properties 1) - 6) will be called *admissible*.

The order of each meridian of the first type less order of any meridian the second type.

Theorem 2. *For each admissible GOHD there is a Morse-Smale pair that generates this GOHD.*

The realization of higher-dimensional breaking mechanism

T.V. Obikhod

(Institute for Nuclear Research NAS of Ukraine, Kyiv, 03680, Ukraine)

E-mail address: `obikhod@kinr.kiev.ua`

We study D-branes on Calabi-Yau threefolds, which are realized through the blowing up the singularity of orbifold. This D-branes, according to [1] are represented as sheaves, which can be stable or unstable, what is connected with the transition in the Teichmuller space. Using the derived category of McKay quiver representations, which describe D-branes as quivers and open superstrings between them by Ext groups [2], we can represent Higgs multiplets by the moduli space of an open superstring, connecting two McKay quivers. Through the equivalence between the derived category of coherent sheaves and triangulated category of distinguished triangles over the abelian category of McKay quivers we can associate D-branes with quivers or with sheaves, defined on Calabi-Yau. After the dimensional reduction of the ten-dimensional space-time we can receive matter content of the four-dimensional space-time [3]. Thus, a higher-dimensional breaking mechanism is associated with four-dimensional GUT Higgs multiplets and symmetry breaking higgs mechanism.

References

[1] P.S. Aspinwall. *D-branes on Calabi-Yau manifolds*, - arXiv: hep-th/0403166.

[2] S. Katz, T. Pantev and E. Sharpe. *D-branes, orb ifolds, and Ext groups*, - Nucl. Phys. B673, (2003), p. 263-300.

[3] C. Beasley, J.J. Heckman and C. Vafa. *GUTs and Exceptional Branes in F-theory - II: Experimental Predictions*, - arXiv:0806.0102v3 [hep-th].

Principal components and wavelet analysis of complex chaotic meteorological signals: New numerical algorithm

A. V. Romanova

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `quantrom@mail.ru`

An advanced technique based on the joint use of principal component method and the wavelet analysis has been developed to analysis and treating meteorological spatially-temporal signals and patterns. The combined principal component and wavelet analysis allows combining the possibility to reveal the spatial features of the former and to reveal the temporal ones by the latter. Our advanced algorithm includes the wavelet decomposition for analyzing various meteo-signals series according to the methodic [1]. The non-decimated wavelet transform that has temporal resolution at coarser scales and allows to isolate time series of the major components of financial sets a direct way is used. An advanced generalized non-conservative finite-differences scheme method has been used to solve the corresponding atmosphere general dynamics equations. It is based on the earlier developed generalized non-conservative finite differences scheme for the task of propagating a laser pulse in a non-linear medium [2].

As application we have studied a number of meteorological signal series, which are characterized by directly manifested chaotic properties. For example, a new algorithm has been applied to analysis of the temporal series of the annual temperatures in Odessa region, the atmospheric gases (ozone, carbon doioxide, nitrogen oxide etc) concentration spatially-temporal distribution, Our numerical analysis has allowed to reveal the deterministic elements in the distribution of the cited characteristics. We have confirmed earlier discovered link between the presence of the so-called blocking anticyclone processes in the North Atlantic and its absence over Ukraine. We also quantitatively reveal a direct link between the spatiotemporal variability of European total ozone content at synoptic time and spatial scales with the North-Atlantic Oscillations [3].

References

[1] A. V. Glushkov *Methods of a Chaos Theory.*,- Odessa, OSENU, (2013), 400p.

[2] A. V. Ignatenko, A. V. Romanova et al *Generalized non-conservative difference scheme in tasks of non-linear mediums.*,- Bulleten of OSENU. 14: (2012), P. 229-233

[3] V. N. Khokhlov, A. V. Romanova *NAO-induced spatial variations of total ozone column over Europe at near-synoptic time scale.*,-Atm.Environment (Elsevier). 45: (2011), P.3360-3365.

The pairs of counter linear mappings and their topological classification

T. V. Rybalkina

(Institute of Mathematics, Kyiv, Ukraine)

E-mail address: `rybalkina_t@ukr.net`

We consider pairs of linear mappings $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ of the form

$$V \underset{\mathcal{B}}{\overset{\mathcal{A}}{\rightleftarrows}} W \tag{1}$$

in which V and W are finite dimensional unitary or Euclidean spaces over $\mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$, respectively. We say that (1) transforms to

$$V' \underset{\mathcal{B}'}{\overset{\mathcal{A}'}{\rightleftarrows}} W'$$

by bijections $\varphi_1 : V \to V'$ and $\varphi_2 : W \to W'$ if $\mathcal{A}'\varphi_1 = \varphi_2\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}'\varphi_2 = \varphi_1\mathcal{B}$.

We say that $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ are *linearly equivalent* if φ_1 and φ_2 are linear bijections and *topologically equivalent* if φ_1 and φ_2 are homeomorphisms.

A pair of linear mappings $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is *regular* if $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}$ are bijections, and *singular* otherwise. Each pair of linear mappings $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ possesses a regularizing decomposition in direct sum of regular and singular pairs of linear mappings. In [1, 2] pairs of counter linear maps are classified up to linearly equivalence. In [4] we prove the following theorem.

Theorem 1. (a) *The pairs of counter linear mappings $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ are topologically equivalent if and only if their regular parts are topologically equivalent and their singular parts are linearly equivalent.*

(b) *The regular pairs of counter linear mappings $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ are topologically equivalent if and only if linear operators $\mathcal{B}\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}'\mathcal{A}'$ are topologically conjugate.*

Classification of linear operators up to topological conjugacy was given by N. Kuiper and J. Robbin in [3].

References

[1] N. M. Dobrovol′skaya, V. A. Ponomarev *A pair of counter-operators.*, - Uspehi Mat. Nauk. 20: 6, (1965), P. 80-86. (in Russian)

[2] R. A. Horn, D. I. Merino *Contragredient equivalence: a canonical form and some applications.*, - Linear Algebra Appl. 214, (1995), P. 43-92.

[3] N. H. Kuiper, J. W. Robbin *Topological classification of linear endomorphisms.*, - Invent. Math. 19: 2, (1973), P. 83-106.

[4] T. V. Rybalkina *Topological classification of pairs of counter linear maps.*, - Mat. Stud. 39, (2013), P. 21-28. (in Ukrainian)

Quantization of states of the relativistic Klein-Gordon-Fock equation and calculation of spectra of the hadronic systems: New numerical algorithm

A. N. Shakhman

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantsha@mail.ru

The work goes on our studying energy and spectral characteristics of the hadronic systems [1]. Here we present a new consistent approach for quantization of the stationary (quasistationary) states of the relativistic Klein-Gordon-Fock equation with the pi-N standard and pi-N generalized nuclear interaction potentials in application to hadronic atomic systems. The fundamental characteristics we calculate are: energy spectra, radiative corrections, hyperfine structure parameters for hadronic (pionic) systems [3]. Our new approach is ab initio, relativistic method allowing to carry out a consistent calculation of the spectra for pionic systems with an account of relativistic, nuclear, radiative effects within the gauge-invariant QED perturbation theory in version [3]. New analytical and numerical estimates regarding a quantitative link between a consistence of the quantization procedure, a quality of the nucleus structure modeling and accuracy of calculating energy and spectral properties of systems have been received.

The wave functions zeroth basis is found from the relativistic Klein-Gordon-Fock equation with the pi-N standard and pi-N generalized nuclear interaction potential. The general potential includes the self-consistent ab initio potential, the electric and polarization potentials of a nucleus plus above indicated nuclear interaction ones. As usually, in order to make modelling a nuclear charge distribution in a nucleus the Fermi model has been used. Within the method of differential equations [3], the corresponding nuclear potential is found as solution of the differential equations system. The energy shift is connected with a length of the pion-nuclear scattering (scattering amplitude for zeroth energy). It has been proven a generalized theorem establishing a link between a quality wave functions zeroth basis and value of the gauge non-invariant contribution to energy. As application of the approach, the data on energy characteristics (transition energies and probabilities) of the different transitions group in the pionic systems, including estimating the values of the strong pion-nuclear interaction energy levels shifts and widths, defining the corrections due to the e-screening, vacuum polarization, relativistic recoil effects etc are presented and compared with available other theoretical and experimental results.

References

[1] I. N. Serga, Yu. V. Dubrovskaya, A. N. Shakhman et al *Spectroscopy of hadronic atoms: Energy shifts.*,-Journal of Physics: C Ser. (IOP, London, UK). 397: (2012), P.012013 (6p).

[2] A. Deloff *Fundamentals in Hadronic Atom Theory.*,- Singapore, World Sci., (2003), 352p.

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Topological equivalence of functions

V. V. Sharko, Yu. Soroka

(Інститут математики НАН України, Київ)

E-mail address: `sharko@imath.kiev.ua`

Let X and Y - topological spaces and f and g - continuous mappings from X to Y.

Definition 1. *Continuous mappings f and g are called topologically equivalent if there are homeomorphisms $h : X \longrightarrow X$ and $k : Y \longrightarrow Y$ such that $k \cdot f = g \cdot h$.*

Obviously, this is an equivalence relation on the set continuous maps from X to Y. Note that the choice is homeomorphic morphisms h and k is not unique. Thus, if fix topological spaces X and Y, then the natural but there are two objectives:

1)to describe the set of classes of continuous maps from X to Y relative to this equivalence relation;

2) specify the necessary and sufficient conditions for the two continuous maps f and g from X to Y are topologically equivalent.

These problems are complex and the response is not known , even when $X = R^n, Y = R^1$.

Definition 2. *By regular curve-family $\Im$ on R^2 is meant a family which is locally homeomorphic to a family of parallel lines on R^2.*

Теорема 1. *Let $F : R^2 \to R^1$- continuous map. Assume that:*

1) $F^{-1}(a) = R^1$;

2) the level lines of F form a regular curve families.

Then the function F is topologically equivalent to a linear function $G : R^2 \to R^1$.

Consider a polynomial function F defined in R^2. Line level of F define a partition of the plane into curves. Each connected component γ of line level determines the number of $F(\gamma)$. Using this, we introduce the equivalence relation $R^2 / \backsim$ and a result we obtain a graph $\Gamma(F)$, which is called Kronrod-Reeb graph of F.

Let $\Gamma(F)$-Kronrod-Reeb graph of a polynomial function, defined in the R^2 and has only isolated critical points.

Definition 3. *We say that a polynomial function F is a function in general position if its level line is not more than one critical point.*

Теорема 2. *Let $F : R^2 \to R^1$ and $G : R^2 \to R^1$ are polynomial function in general position. Then the function F is topologically equivalent to G if and only if their Kronrod-Reeb graphs are isomorphic.*

About the Kobayashi – Nomizu generalized affine connection

Yu. I. Shevchenko

(I. Kant BFU, Kaliningrad, Russia)

E-mail address: `Eskrydlova@kantiana.ru`

Smooth manifiold M_n of dimension n and the following structure equations

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j \quad (i, \ldots = \overline{1, n}) \tag{1}$$

is considered. Their prolongations have the form

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge \omega^i_{jk}. \tag{2}$$

The principal bundle of tangent linear coframes $L_{n^2}(M_n)$ with the structure equations (1, 2) appears on the manifold M_n. Typical fiber of the bundle is the linear group $L_{n^2} = GL(n)$.

Let us determine the Kobayashi – Nomizu generalized affine connection on the bundle $L_{n^2}(M_n)$ by Cartan – Laptev – Lumiste's way in terms of the following forms:

$$\tilde{\omega}^i = \omega^i - \gamma^i_j \omega^j, \quad \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k, \tag{3}$$

where the functions γ^i_j, Γ^i_{jk} satisfy the differential equations

$$\Delta\gamma^i_j = \gamma^i_{jk}\omega^k, \quad \Delta\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} = \Gamma^i_{jkl}\omega^l, \tag{4}$$

where for instance $\Delta\Gamma^i_{jk} = d\Gamma^i_{jk} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_l - \Gamma^i_{lk}\omega^l_j - \Gamma^i_{jl}\omega^l_k$. We note that generalized affine connection object $\{\gamma^i_j, \Gamma^i_{jk}\}$ consists of the connection tensor γ^i_j and usual affine connection object Γ^i_{jk}.

Connection forms (3) satisfy the structure equations

$$d\tilde{\omega}^i = \tilde{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \tilde{S}^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k, \quad d\tilde{\omega}^i_j = \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + R^i_{jkl}\tilde{\omega}^k \wedge \tilde{\omega}^l, \tag{5}$$

$$\tilde{S}^i_{jk} = S^i_{jk} + \gamma^i_{[jk]} - \gamma^l_{[j}\Gamma^i_{|l|k]}, \quad R^i_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{|m|l]},$$

where $S^i_{jk} = \Gamma^i_{[jk]}$ is usual torsion tensor. After prolongation of the equations (4) the differential comparisons are found:

$$\Delta\tilde{S}^i_{jk} \cong 0, \quad \Delta R^i_{jkl} \cong 0 \quad (mod\, \omega^i).$$

Theorem. *On a smooth manifold M_n the space of generalized affine connection $L_{n^2+|n|,n}$ can be constructed. The space has the structure equations (1, 5), in which the components of tensors of generalized torsion $\tilde{S}^i_{jk}$ and the curvature of usual affine connection R^i_{jkl} are uncluded. If generalized connection object vanishes $\gamma^i_j = 0$, i.e. base-fiber forms $\tilde{\omega}^i$ become the base forms ω^i, then the space $L_{n^2+|n|,n}$ degenerates into the usual affine connection space $L_{n^2,n}$ (often denoted by $A_{n,n}$) with the structure equations (5), in which $\tilde{\omega}^i = \omega^i$, $\tilde{S}^i_{jk} = S^i_{jk}$.*

Quantum Computing Autoionization Resonances in Spectra of Heavy Atomic Systems: New numerical algorithm

A. A. Svinarenko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantsvi@mail.ru

The paper is devoted to development of a new procedure of quantization of quasi-stationary states of Dirac-Kohn-Sham equation [1] and a new approach to calculating energy and spectral characteristics of the resonances in spectra odf heavy atomic systems. The new approach to studying the autoionization resonances spectra is based on the relativistic many-body perturbation theory with Dirac-Kohn-Sham zeroth approximation combined with the generalized relativistic energy approach [2] and applied ti quantitative studying spectra of lanthanides elements, and search of the unusual futures in behaviour of the autoionization resonances in sufficiently weak dc electric field.

The wave function zeroth basis is found from the Dirac-Kohn-Sham equation with a potential, which includes ab initio (the optimized Dirac-Kohn-Sham potential, the electric potential of a nucleus). The correlation corrections of the relativistic perturbation theory high orders are taken into account within the Green functions method (with using the Feynman diagram's technique [3]). All correlation corrections of the second order and dominated classes of the higher orders diagrams (electrons screening, particle-hole interaction, mass operator iterations) are taken into account. It has been proven a generalized minmax theorem establishing a link between a relativistic orbital zeroth-approximation basis quality and value of the gauge non-invariant contribution to resonance width.

As example, we present some new numerical calculation results for the lanthanides elements excited states energies and widths and carry out the detailed comparison between the experimental (compilation) and data of different theoretical studies on the basis of multiconfiguration Hartree-Fock (MCHF) method within the framework of Breit-Pauli (BP) relativistic corrections, the Cowan's relativistic Hartree-Fock method and the model many-body perturbation theory and relativistic energy approach. The parameters of the lanthanides elementsautoionization resonances (energies and widths) are calculated for atoms in a free state and in the weak DC electric field. The simple diagonalization matrix estimates with accounting of the DC electric field allowed to find a unusual effect of the giant broadening for the autoionization resonances widths for the lanthanides elements in sufficiently weak DC electric field (till 150 V/cm).

References

[1] A. N. Svinarenko *An advanced approach to quantization of quasi-stationary states of Dirac-Kohn-Sham equation.*,-Proceedings of International Geometry Center. 6,N3: (2013), P.67-72.

[2] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, A. A. Svinarenko *Frontiers in Quantum Systems in Chem. And Physics.*,- Progress in Theoretical Chemistry and Physics. 18: (2008), P. 505-5703

[3] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

Advanced relativistic quantum defect method to many-body systems: New algorithm of quantization of states for the Dirac equation

T. B. Tkach

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantper@mail.ru

We present an advanced numerical approach to quantization of the stationary (quasi-stationary) states of the Dirac equation within an generalized one-channel relativistic quantum defect approximation. A new advanced method includes the optimized relativistic model potential and relativistic quantum defect approximation combined with the relativistic energy approach and QED many-body perturbation theory with zeroth order optimized 1-particle representation [1]. It has been presented the optimal, effective algorithm for solving the task on the eigen values and eigen functions for the bound and continuum states of the relativistic Dirac equation with a singular model potential and quantum defect (the Coulomb-like) potentials. An implementation of the relativistic model potential (quantum defect approximation) to the frames of the gauge-invariant relativistic energy formalism (S-matrix adiabatic formalism of Gell-Mann and Low) for studying energy and spectral parameters of multi-electron systems on the basis of the Dirac equation is in full details presented firstly. This methodic allows to get the consistent relativistic quantum defect approximation gauge-invariant basis's of Dirac equation eigen functions. Numerical calculation of the energy eigen-values for simple atomic systems has proven an effectiveness of the proposed method. Namely, the calculated spectrum of the energy eigen values for lithium, sodium and rubidium is compared with the most precise experimental data. There are calculated eigen values of an energy and decay (transition) probabilities for different transitions from ground state to the low-excited and Rydberg states of the cit3d systems. The comparison of calculated oscillator strengths with available theoretical and experimental data is carried out [2] and demonstrated an excellent agreement that is a direct confirmation of the consistency and effectiveness of our new approach.

Besides, a new approach allowed to develop a general, fully gauge-invariant version of the multi-channel quantum defect method. New ab initio optimized scheme, satisfying a principle of minimization for the gauge dependent radiative contributions to imaginary part of energy of the system for the certain class of the photon propagator calibration, has been developed for the most general case.

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic Quantum Theory.*,- Odessa, Astroprint, (2008), 700p.

[2] A. V. Loboda, T. B. Tkach *Generalized anergy approach in an electron-collisional spectroscopy of multicharged ions.*,- Journ. of Phys. C Ser. 397: 1, (2012), P. 012027 (6p.)

Quantization of states of the Schrödinger equation with exchange-correlation potential and new approach to calculating spectra of diatomic systems

L. A. Vitavetskaya

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: `nucvita@mail.ru`

In last years a great interest attracts the study of the bound states energies of different complex quantum systems such as diatomic systems etc. The correct treating spectra of these systems obviously requires a consistent account of the exchange-correlation effects in the consistent Hartree-Fock approximation with additional correlation potential [1]. The standard approach to accounting for exchange-correlation corrections is the perturbation theory formalism with the Hartree-Fock zeroth approximation and introducing special correlation potentials. Simultaneously, the perturbation theory formalism allows evaluation of the relative contributions of different expansion energy terms as the functions of Z. However, the serious problems in this approach are connected with correct definition of the exchange-correlation contribution etc especially in a case of the diatomic systems with large number of electrons [2].

The main purpose of our work is to carry out new consistent procedure for quantization of states of the nonrelativistic Schrödinger equation with directly introduced exchange-correlation potential of the DFT type and present basis of a new theory and its application to calculating spectra of diatomic quantum systems (molecules etc). As usually, the zeroth approximation is usually generated by the effective ab initio model functional, constructed on the basis of the gauge invariance principle. The zeroth order basis is generated by the solution of the Schrödinger equation with spherically symmetric potential that includes the nuclear, self-consistent field and exchange-correlation potentials. The important advancement of our approach is connected with using the gauge invariant procedures of generating orbitals basis's [3] and more correct treating the exchange-correlation effects.

As example of application of our approach we have carry out the numerical calculation of the energy eigen values spectra and eigen functions basis for some diatomic systems (dimers of alkali elements) with a direct accounting of the exchange-correlation corrections. It is important to note that there is physically reasonable agreement between our numerical and empirical data for all studied diatomic systems. From the other side, from the beginning our approach is non-perturbative and oriented on studying more complicated systems in comparison with alkali dimer systems too [2].

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic and Correlation Effects in Atomic Spectra.*,- Odessa, Astroprint, (2006), 450p.

[2] A. V. Glushkov, L. A. Vitavetskaya et al *Calculation spectroscopic characteristics dihydric van der Waals molecules and ions.*,- Izvestiya VUZ. Ser.Phys. 41: (1998), P. 36-40.

[3] A. V. Glushkov, L. A. Vitavetskaya et al *Quantum theory of cooperative muon-N processes.*,-// Recent Advances in Theor. Phys. and Chem. Systems, Ser. Progress in Theoretical Chem. and Phys. - Berlin, Springer. vol.15, (2006), P. 301-308.

Some geometric and topological properties of subspaces of probability measures

Zhuraev T.F.

(Tashkent State Pedagogical University named after Nizami, Uzbekistan)

E-mail address: tursunzhurayev@mail.ru

Let X be an infinite metric compact, $P(X)$ the space of all probability measures in the compact X [1]. For each $n \in N$ by $P_n(X)$ denote the set of all probability measures of finite $\leq n$ support, i.e. $P_n(X) = \{\mu \in P(X) : |supp\mu| \leq n\}$, where $supp\mu$ is the support of an element $\mu \in P(X)$. As well as, denote following subsets of the space $P(X)$: $P_\omega(X) = \bigcup P_n(X)$. For a $A \subset X$, $A \neq X$ by $S_p(A) = \{\mu \in P(X) : supp\mu \cap A \neq \emptyset\}$.

Theorem. The following facts hold:

1. For any infinite metric compact X and its proper subset A subspaces $P_\omega(A)$, $S_p(A)$ and $P(A)$ are convex in $P(X)$;

2. For any infinite metric compact X and its proper subset A subspaces $P_\omega(A)$, $S_p(A)$ and $P(A)$ are absolute retracts in the category of metric spaces;

3. For any infinite metric compact X and its proper subset A subspaces $P_\omega(A)$, $S_p(A)$ and $P(A)$ are half-spaces in $P(X)$;

4. For any infinite metric compact X and its proper subset A subspaces $P_\omega(A)$, $S_p(A)$ and $P(A)$ are infinite-dimensional manifolds;

5. For any infinite metric compact X and its proper subset A subspaces $\overline{P_\omega(A)}$, $\overline{S_p(A)}$ and $\overline{P(A)}$ are homeomorphic to the Hilbert cube;

6. For any infinite metric compact X and its proper subset A subspace $S_p(A)$ is a Hilbert manifold.

References

[1] V.V.Fedorchuk, V.V.Filippov, General topology. Basic constructions. 1988, 252 p, M.MSU.

[2] V.van de Vel, Convex Hilbert cubes in superextensions. Top. Appl. 1986, 22, No 3 pp. 255-266.

Памяти Галины Аркадьевны Толстихиной

19 января 2014 года после тяжелой болезни скончалась Галина Аркадьевна Толстихина — замечательный математик, прекрасный незаурядный человек, надежный товарищ. Галина Аркадьевна родилась 14 декабря 1956 года в деревне Алферово Весьегонского района Калининской (ныне Тверской) области.

Закончив в 1980 году Калининский (Тверской) государственный госуниверситет по специальности «Математика», она осталась работать в нем сначала в должности ассистента, затем доцента и профессора, заведующего кафедрой математики с методикой начального образования. С 1997 по 2008 год она была деканом педагогического факультета, с 2008 по 2012 год– проректором по научной работе Тверского государственного университета.

С 1985 по 1988 год Галина Аркадьевна обучалась в аспирантуре по специальности 01.01.04 — геометрия и топология (научный руководитель — профессор Акивис М.А.). В 1989 году она защитила кандидатскую диссертацию по теме «Три-ткани и локальные идемпотентные квазигруппы», а в 2007 – докторскую диссертацию по теме «Алгебра и геометрия три-тканей, образованных слоениями разных размерностей» . В этой работе ей удалось, в частности, решить проблему, которая до этого времени считалась неразрешимой — обобщить понятие фигур замыкания из классической теории тканей, образованных слоениями одинаковой размерности, для тканей, образованных слоениями разных размерностей. Всего ею опубликовано более ста работ по геометрии тканей и проблемам образования.

Галина Аркадьевна была разносторонним, глубоким и исключительно ответственным человеком. Она очень любила свою семью, свою работу, но главной ее страстью была геометрия. До последних дней она активно работала, исследовала свойства сердцевины левой ткани Бола. Полученные ею весьма интересные результаты будут скоро опубликованы. Галина Аркадьевна была активным участником конференций «Геометрия в Одессе», с 2010 года она входила в состав оргкомитета. Мы всегда будем помнить ее глубокие суждения, ее энергию, жизнерадостность, тонкий юмор.

Оргкомитет конференции «Геометрия в Одессе»

ЗМІСТ