Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Одеська національна академія харчових технологій
Інститут математики НАН України
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Московский государственный педагогический университет
Тверской государственный университет
Одеський національный університет ім. І. І. Мечникова
Одеський державний екологічний університет
Международный геометрический центр (Одесса)
Фонд "Наука"(Одесса)

Тези доповідей міжнародної конференції

ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2012

присвячується 110-річчю ОНАХТ

Одеса, 28 травня - 2 червня 2012 р.

Тезисы докладов международной конференции

ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2012

посвящается 110-летию ОНАПТ

Одесса, 28 мая - 2 июня 2012 г.

Abstracts of the International Conference

GEOMETRY IN ODESSA - 2012

in honor of the 110-th aniversary of ONAFT

Odessa, the 28th of May- the 2nd of June 2012

ОДЕСА - 2012

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тези доповідей міжнародної конференції

ГЕОМЕТРІЯ В ОДЕСІ - 2012

Тези містять результати досліджень учасників Міжнародної конференції в галузі геометрії, топології та застосувань. Видання спрямоване на наукових співробітників, викладачів, аспірантів, студентів.

ISBN 978-966-389-171-2

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Тезисы докладов международной конференции

ГЕОМЕТРИЯ В ОДЕССЕ - 2012

Тезисы содержат результаты исследований участников Международной конференции в области геометрии, топологии и приложений. Издание адресовано научным работникам, преподавателям, аспирантам, студентам.

ISBN 978-966-389-171-2

Международный научный комитет:

Организационно-административный комитет:

Организационный комитет:

ISBN 978-966-389-171-2

ББК 22.15 (0)я 43
УДК 514(477)(100)(063)
Т29

Abstracts of the International Conference
GEOMETRY IN ODESSA - 2012

Abstracts contain the results of researching of participants of the International Conference on geometry, topology and applications. The publication is addressed to researchers, lectures, post-graduate students.

ISBN 978-966-389-171-2

International Scientific Committee:
Sharko V. (Ukraine) - Chairman, Alekseevskii D. (UK), Banakh T. (Ukraine), Gandel Yu. (Ukraine), Glushkov A. (Ukraine), Diskant V. (Ukraine), Dubrovin B. (Italy), Evtushik L. (Russia), Zarichnyi M. (Ukraine), Ibragimov N. (Sweden), Kirichenko V. (Russia), Kirillov V. (Ukraine), Kiosak V. (Ukraine), Konovenko N. (Ukraine), Krasilshchik J. (Russia), Kuzakon V. (Ukraine), Manturov O. (Russia), Mashkov O. (Ukraine), Mikes J. (Czech Republic), Mikityuk I. (Ukraine), Milka A. (Ukraine), Panzhenskiy V. (Russia), Pokas S. (Ukraine), Prishlyak A. (Ukraine), Rahula M. (Estonia), Roger S. (France), Rubtsov V. (France), Straume E. (Norway), Strikha M. (Ukraine), Tolstikhina G. (Russia), Fedchenko Yu. (Ukraine), Fomenko A. (Russia), Fomenko V. (Russia), Khruslov E. (Ukraine), Shelekhov (Russia), Shurygin V. (Russia).

Organizing-Administrative Committee:
B. Egorov - chairman, rector ONAFT (Odessa), L. Kaprel'ants - deputy chairman,
S. Fedosov - head of the international department, Volkov V. - the dean of the faculty of AEMCS and A, A. Sergeeva - head of the chair of physics (ONAFT, Odessa), L. Nosenko - the secretary (ONAFT, Odessa)

Organizing Committe:
Kuzakon V. - Chairman of the Organizing Committee, President of the Charity Fund «Science», Konovenko N. - deputy chaiman, Fedchenko Yu. - deputy chairman, Barzik A., Bashkaryov P., Zadorozhnyi V., Kuzakon G., Moiseenok A. - WEB-administrator, Osadchuk E., Prokip V., Khudenko N., Chepurnaya E.

ISBN 978-966-389-171-2

ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ХАРЧОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

(у зв'язку з 110 - річчям)

З чого все починалося... Розвиток одного з найстаріших ВНЗ України - Одеської національної академії харчових технологій - тісно пов'язаний з історією Одеси. Після Петербурга і Москви це було третє за значущістю і рівнем розвитку місто в царській Росії. Через Одеський порт проходило біля половини усього зернового експорту країни. Одеса була найбільшим центром млинарства в Херсонській губернії. Виникла гостра необхідність у фахівцях мукомельної справи.

20 жовтня 1902 року за спецрозпорядженням Міністра фінансів графа Вітте С.Ю. відбулося офіційне відкриття Одеської школи мукомелів, засновником якої був Г.Е. Вейнштейн. У цьому ж році Його Імператорська Величність і Державна Рада затвердили Положення про школу. Перший випуск відбувся в 1905 році. В 1909 році Царським Указом школа була перетворена в училище.

У 1922 році на базі училища було засновано технікум технології зерна і муки. У 1928 році технікум реформували на політехнікум. Потік студентів зріс, і в 1929 році політехнікум було перетворено на інститут технології зерна і муки ім. Й.В.Сталіна, у складі якого було 5 факультетів.

У 1931 році інститут було реорганізовано в механіко-технологічний навчально-виробничий комбінат, а в 1935 році - в Одеський інститут технології зерна і муки ім. Й. В. Сталіна.

У 1939 році інститут було перейменовано - Одеський інститут інженерів мукомельної промисловості і елеваторного господарства ім. Й.В.Сталіна. До 1941 року завершився процес становлення інституту. Він виріс у великий навчальний заклад всесоюзного значення. Але Велика Вітчизняна війна порушила мирне життя інституту. Червневий випуск (140 інженерів) проходив уже в умовах повітряного бомбардування Одеси.

З серпня 1941 р. інститут знаходився в евакуації в м. Новочеркаську, Саратові, Ташкенті, де він залишався до 1944 р. і випустив 141 фахівця. До початку навчального 1944/45 року інститут повернувся у звільнену від німецько-фашистських загарбників Одесу й розпочав роботу у складі 63 викладачів і 496 студентів на двох факультетах - технологічному і механічному. У 1945 році було випущено 59 інженерів.

У 1953 році ВНЗ було перейменовано в Одеський технологічний інститут (ОТІ), а в 1961 році інституту було присвоєно ім'я М.В.Ломоносова на честь 250-річчя від дня народження великого вченого, який першим в Росії опублікував наукову працю з мукомельної справи. У 1969 році до складу ОТІ ім. М.В.Ломоносова з Одеського технологічного інституту харчової і холодильної промисловості було передано підготовку фахівців зі спеціальностей харчового профілю.

У 1970 році Рада Міністрів України перейменувала інститут в Одеський технологічний інститут харчової промисловості ім. М.В.Ломоносова. Середина 80-х - початок 90-х років в історії академії стали періодом реалізації програмних документів з перебудови вищої освіти країни. У 1993 році одним з перших у незалежній Україні інститут пройшов акредитацію за вищим IV рівнем.

У 1994 році інститут було перетворено в Одеську державну академію харчових технологій.

У 2002 році за успіхи і високі заслуги у сфері освіти, підготовки висококваліфікованих кадрів і на честь 100-річчя Указом Президента України академії присвоєно високе **звання національної**.

Одеська національна академія харчових технологій сьогодні

Більше 10 000 студентів здобувають вищу освіту за 25 спеціальностями та 115 спеціалізаціями та програмами підготовки за всіма освітньо-кваліфікаційними рівнями: від молодшого спеціаліста до бакалавра, спеціаліста та магістра.

До складу академії входять навчально-науковий центр довузівської підготовки, 8 сучасних факультетів денної та заочної форм навчання, 37 кафедр, інститут післядипломної освіти і підвищення кваліфікації спеціалістів харчової та зернопереробної промисловості, аспірантура і докторантура, науково-дослідний інститут зерна і харчових продуктів, відділ з роботи з іноземними студентами і громадянами, відділ міжнародних зв'язків, відділ організаційно-виховної роботи, Одеський технічний коледж, Одеський механіко-технологічний технікум, навчально-науковий центр інформаційних технологій, центр громадських зв'язків, центр організації практичної підготовки і сприяння працевлаштуванню, школа малого і середнього бізнесу, школа іноземних мов, школа комп'ютерних технологій, редакція академічної газети "Технолог", студентський клуб, спортклуб, санаторій-профілакторій, табір відпочинку та ін. Функціонують 2 спеціалізовані вчені ради з захисту докторських і кандидатських дисертацій за 5 науковими спеціальностями, аспірантура та докторантура. Успішно працюють 7 навчально-науково-виробничих комплексів. В академії діють Наглядова рада, Вчена рада, робочі і дорадчі органи. Асамблея ділових кіл України в 2003 році за видатні заслуги в підготовці висококваліфікованих кадрів відзначила колектив академії нагородою "Інтелект нації", а у 2004 році Асамблея ділових кіл Європи - нагородою "Європейська якість"; у числі 15 українських ВНЗ ОНАХТ була прийнята до Асоціації Європейських Університетів. Академія стала лауреатом національного конкурсу і отримала звання "Лідер харчової та переробної промисловості України - 2004", переможцем Всеукраїнського конкурсу якості продукції "100 кращих товарів України" в 2005 році у номінації "Освітні послуги". У 2006 році академія стала переможцем у щорічному рейтингу популярності людей і подій Одеси "Народне визнання" в номінації "Лідер у сфері освіти".

За підсумками 2006 року академія зайняла 27 місце серед 200 кращих вищих навчальних закладів України в рейтингу "ТОП-200 Україна", проведеному за незалежною методикою ЮНЕСКО, а за підсумками 2007 року - піднялася на 24 місце.

Академію прийняли до складу Європейської федерації харчової науки і технології, а також до асоціації ВНЗ країн Причорноморського басейну та Євразійської асоціації університетів. У вересні 2007 року ОНАХТ увійшла до складу Асоціації Європейських Університетів, що підписали університетську хартію (Magna Charta).

Двічі на рік в академії проводяться ярмарки вакансій за участю провідних зернопереробних і харчових підприємств, завдяки чому майже всі бажаючі випускники академії успішно працевлаштовуються.

За видатні наукові досягнення, вагомий внесок у розвиток вищої освіти і науки, підготовку висококваліфікованих фахівців харчової та переробної промисловості трудовий колектив Одеської національної академії харчових технологій був нагороджений Почесною Грамотою Кабінету міністрів України - вищою нагородою країни, вручення якої відбулося у день святкування 105-літнього ювілею академії у 2007 році.

ОНАХТ у 2008 р. стала співзасновником Української Асоціації харчової науки і техніки, яка є регіональним відділенням Всесвітнього Союзу харчової науки і технології (IU-FOST) та Європейської федерації харчової науки і технології (EFFOST). ОНАХТ є членом міжнародної мережі "ISEKI-Food-2" і "ISEKI- Mundus-3". ОНАХТ увійшла до складу міжнародного європейського консорціуму 7 Рамковій програмі ЄС FP7 "Біоактивні компаунди в традиційних продуктах харчування Чорноморського басейну", який представив проект "BaSeFood". ОНАХТ отримано грант для виконання проекту Inno-Food SEE.

За підсумками 2008 року ОНАХТ завоювала звання Лауреата Всеукраїнського конкурсу якості продукції (товарів, робіт, послуг) "100 кращих товарів України" у номінації "Освітні послуги".

Листом № 18-1-15/4375 від 20.03.09 р. Міністерство аграрної політики України повідомило про визнання ОНАПТ "провідним профільним вищим навчальним закладом України з підготовки фахівців для харчової та зернопереробної промисловості, а також провідним центром з дослідження проблем зберігання і переробки зерна, створення нових продуктів функціонального і оздоровчого харчування".

За рейтингом "ТОП-2009" у 2009 році ОНАХТ посіла 27 місце серед двохсот ВНЗ України.

ОНАПТ - потужний інноваційний учбово-науковий центр, визнаний міжнародними організаціями. У 2010 році академія стала членом міжнародної громадської організації - Платформа "Діалог Євразія", а у 2011 році - Фонду розвитку освіти в сфері готельного сервісу в Центральній і Східній Європі. У теперішній час академія співпрацює з 24 закордонними університетами і є дійсним членом 9 міжнародних організацій, а саме:

EUA – Асоціація Європейських університетів

EuCheMS – Європейська асоціація хімічних і молекулярних наук (відділення харчової хімії)

BSUN – Мережа університетів Чорноморського басейну

Евразійська асоціація університетів

EFFoSt – Європейська федерація харчової науки і технології

Велика хартія університетів (Magna Charta Universitatum)

ICDE – Міжнародна асоціація заочного і дистанційного навчання

Молодіжна платформа "Диалог Евразия"

Фонд розвитку освіти в сфері готельного сервісу в Центральній і Східній Європі

ОДЕССКАЯ НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ ПИЩЕВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

(в связи с 110-летием)

С чего все начиналось... Развитие одного из самых старых ВУЗов Украины - Одесской национальной академии пищевых технологий - тесно связано с историей Одессы. После Петербурга и Москвы это был третий по значимости и уровню развития город в царской России. Через Одесский порт проходило около половины всего зернового экспорта страны. Одесса была самым большим центром мукомолья в Херсонской губернии. Возникла острая необходимость в специалистах мукомольного дела.

20 октября 1902 года по специальному распоряжению Министра финансов графа Витте С.Ю. состоялось официальное открытие Одесской школы мукомолов, основателем которой был Г.Э. Вейнштейн. В этом же году Его Императорское Величество и Государственный Совет утвердили Положение о школе. Первый выпуск состоялся в 1905 году. В 1909 году Царским Указом школа была преобразована в училище.

В 1922 году на базе училища был основан техникум технологии зерна и муки.

В 1928 году техникум был преобразован в политехникум. Поток студентов возрос, и в 1929 году политехникум был преобразован в институт технологии зерна и муки им. И.В.Сталина, в составе которого было 5 факультетов.

В 1931 году институт был реорганизован в механико-технологический учебно-производственный комбинат, а в 1935 году - в Одесский институт технологии зерна и муки им. И. В. Сталина.

В 1939 году институт был переименован в Одесский институт инженеров мукомольной промышленности и элеваторного хозяйства им. И.В.Сталина.

К 1941 году завершился процесс становления института. Он вырос в большое учебное заведение всесоюзного значения. Но Великая Отечественная война нарушила мирную жизнь института. Июньский выпуск (140 инженеров) проходил уже в условиях воздушной бомбардировки Одессы.

С августа 1941 г. институт находился в эвакуации в г. Новочеркасске, Саратове, Ташкенте, где он оставался до 1944 г. и выпустил 141 специалиста. К началу учебного 1944/ 45 года институт вернулся в освобожденную от немецко-фашистских захватчиков Одессу и начал работу в составе 63 преподавателей и 496 студентов на двух факультетах - технологическом и механическом. В 1945 году институт выпустил 59 инженеров.

В 1953 году ВУЗ был переименован в Одесский технологический институт (ОТИ), а в 1961 году институту было присвоено имя М.В.Ломоносова в честь 250-летия со дня рождения великого ученого, который первым в России опубликовал научную работу по мукомольному делу.

В 1969 году в состав ОТИ им. М.В.Ломоносова из Одесского технологического института пищевой и холодильной промышленности была передана подготовка специалистов по специальностям пищевого профиля.

В 1970 году Совет Министров Украины переименовал институт в Одесский технологический институт пищевой промышленности им. М.В.Ломоносова. Середина 80-х - начало 90-х годов в истории академии стали периодом реализации программных документов по перестройки высшего образования страны.

В 1993 году институт одним из первых в независимой Украине прошел аккредитацию по высшему IV уровню.

В 1994 году институт был преобразован в Одесскую государственную академию пищевых технологий.

В 2002 году за успехи и высокие достижения в сфере образования, подготовки высококвалифицированных кадров и в честь 100-летия Приказом Президента Украины академии присвоено высокое звание национальной.

Одесская национальная академия пищевых технологий сегодня

Более 10 000 студентов приобретают высшее образование по 25 специальностями, 115 специализациям и программами подготовки по всем образовательно-квалификационными уровнями: от младшего специалиста к бакалавру, специалиста и магистра.

В состав академии входят учебно-научный центр довузовской подготовки, 8 современных факультетов дневной и заочной форм обучения, 37 кафедр, институт последипломного образования и повышения квалификации специалистов пищевой и зерноперерабатывающей промышленности, аспирантура и докторантура, научно-исследовательский институт зерна и пищевых продуктов, отдел из работы с иностранными студентами и гражданами, отдел международных связей, отдел организационно-воспитательной работы, Одесский технический колледж, Одесский механико-технологический техникум, учебно-научный центр информационных технологий, центр общественных связей, центр организации практической подготовки и содействия трудоустройству, школа малого и среднего бизнеса, школа иностранных языков, школа компьютерных технологий, редакция академической газеты "Технолог", студенческий клуб, спортклуб, санаторий-профилакторий, лагерь отдыха и др. Функционируют 2 специализированных ученых совета по защите докторских и кандидатских диссертаций по 5 научных специальностях, аспирантура и докторантура. Успешно работают 7 учебно-научно-производственных комплексов. В академии действуют Наблюдательный совет, Ученый совет, рабочие и совещательные органы.

Ассамблея деловых кругов Украины в 2003 году за выдающиеся заслуги в подготовке высококвалифицированных кадров отметила коллектив академии наградой "Интеллект нации", а в 2004 году Ассамблея деловых кругов Европы - наградой "Европейское качество"; в числе 15 украинских ВУЗ ОНАПТ была принята в Ассоциацию Европейских Университетов. Академия стала лауреатом национального конкурса и получила звание "Лидер пищевой и перерабатывающей промышленности Украины - 2004", победителем Всеукраинского конкурса качества продукции "100 лучших товаров Украины" в 2005 году в номинации "Образовательные услуги". В 2006 году академия стала победителем в ежегодном рейтинге популярности людей и событий Одессы "Народное признание" в номинации "Лидер в сфере образования".

По итогам 2006 года академия заняла 27 место среди 200 лучших высших учебных заведений Украины в рейтинге "ТОП-200 Украина", проведенному по независимой методике ЮНЕСКО, а по итогам 2007 года - поднялась на 24 место. Академию приняли в состав Европейской федерации пищевой науки и технологии, а также в ассоциацию ВУЗ стран Причерноморского бассейна и Евразийской ассоциации университетов. В сентябре 2007 года ОНАПТ вошла в состав Ассоциации Европейских Университетов, которые подписали университетскую хартию (Magna Charta).

Дважды в год в академии проходят ярмарки вакансий при участии лидирующих зерноперерабатывающих и пищевых предприятий, благодаря чему почти все желающие выпускники академии успешно трудоустраиваются.

За выдающиеся научные достижения, весомый вклад в развитие высшего образования и науки, подготовку высококвалифицированных специалистов пищевой и перерабатывающей промышленности трудовой коллектив Одесской национальной академии пищевых технологий был награжден Почетной Грамотой Кабинета министров Украины - высшей наградой страны, вручение которой состоялось в день празднования 105 летнего юбилея академии в 2007 году. ОНАПТ в 2008 г. стала соучредителем Украинской Ассоциации пищевой науки и техники, которая является региональным отделением Всемирного Союза пищевой науки и технологии (IUFOST) и Европейской федерации пищевой науки и технологии (EFFOST). ОНАПТ является членом международной сети "Iseki-food-2" и "ISEKI- Mundus-3". ОНАПТ вошла в состав международного европейского консорциума 7 Рамочной программе ЕС FP7 "Биоактивные компаунды в традиционных продуктах питания Черноморского бассейна", который представил проект "Basefood". ОНАПТ получила грант для выполнения проекта Inno-Food SEE.

По итогам 2008 года ОНАПТ завоевала звание Лауреата Всеукраинского конкурса качества продукции (товаров, работ, услуг) "100 лучших товаров Украины" в номинации "Образовательные услуги".

Письмом № 18-1-15/4375 от 20.03.09 г. Министерство аграрной политики Украины сообщило о признании ОНАПТ "ведущим профильным высшим учебным заведением Украины по подготовке специалистов для пищевой и зерноперерабатывающей промышленности, а также руководящим центром по исследованию проблем хранения и переработки зерна, созданию новых продуктов функционального и оздоровительного питания".

По рейтингу "ТОП-2009" в 2009 году ОНАПТ заняла 27 место среди двухсот ВУЗов Украины. ОНАПТ - мощный инновационный учебно-научный центр, признанный международными организациями. В 2010 году академия стала членом международной общественной организации - Платформа "Диалог Евразия", а в 2011 году - Фонда развития образования в сфере гостиничного сервиса в Центральной и Восточной Европе. В настоящее время Академия сотрудничает с 24 иностранными университетами и является действительным членом 9 международных организаций.

ЮВІЛЕЇ

ЮБИЛЕИ

ANNIVERSARIES

Вадим Федорович Кириченко

(В связи с 65-летием)

Вадим Федорович Кириченко родился 11 мая 1947 года в поселке Стрелка Среднеканского района Хабаровского края (ныне Магаданской области).

В 1972 году он закончил с отличием Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. В 1975 году он закончил аспирантуру при кафедре дифференциальной геометрии МГУ, и в 1976 году защитил кандидатскую диссертацию на тему "Новые результаты теории К-пространств", в которой получил ряд глубоких результатов, касающихся геометрии одного из самых интересных классов почти эрмитовых многообразий.

По окончании аспирантуры он поступил на работу ассистентом кафедры спецкурсов высшей математики Московского энергетического института. В 1980 году он стал доцентом, а в 1987 году - профессором этой же кафедры. С 1990 года и по настоящее время В.Ф.Кириченко работает профессором кафедры геометрии в Московском педагогическом государственном университете и с 1999 года возглавляет эту кафедру.

Круг научных интересов В.Ф.Кириченко лежит в области многомерной дифференциальной геометрии и ее приложений. В 1985 году он защитил докторскую диссертацию на тему "Дифференциальная геометрия обобщённых почти эрмитовых многообразий", в которой показал возможность с единой точки зрения изучать, такие на первый взгляд, различные дифференциально-геометрические структуры, как почти эрмитовы, почти контактные, почти кватернионные, f-структуры Яно и их гиперболические аналоги.

С помощью разработанного им аппарата исследования обобщённых почти эрмитовых структур он получил многочисленные результаты, опубликованные во многих авторитетных журналах как в России, так и за рубежом, а также в его монографии "Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях" (Москва, 2003 г.), и были озвучены на ряде международных конференций и конгрессов, в том числе на четвертом Математическом конгрессе в Цюрихе (1994 г.), где его совместный с Арсеньевой О. Е. доклад был удостоен гранта высшей категории, а также на втором Европейском математическом конгрессе в Будапеште (1996 г.). К настоящему время В.Ф. Кириченко опубликовано свыше 120 научных работ. 34 ученика В.Ф.Кириченко защитили под его руководством кандидатские диссертации, четверо работают над докторскими диссертациями. В.Ф. Кириченко является членом специализированного Ученого совета Д 212.154.18 по защите кандидатских и докторских диссертаций.

Мы поздравляем Вадима Федоровича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, вдохновения и новых творческих достижений.

Л.Е. Евтушик, В. М. Кузаконь, А. М. Шелехов.

Виктор Михайлович Кузаконь

(В связи с 65-летием)

E-mail address: `kuzakon_v@ykr.net`

Виктор Михайлович Кузаконь родился 31 августа 1947 года в г. Кандалакша Мурманской области в семье военнослужащего. В 1970 окончил механико-математический факультет Одесского государственного университета им. И. И. Мечникова по специальности "Математика". С 1970 по 1972 годы проходил воинскую службу в рядах советской армии, работал инженером и старшим инженером научно-исследовательского отдела Одесского высшего инженерно-морского училища.

С 1972 года по настоящее время работает в Одесском технологическом институте пищевой промышленности (ныне Одесская национальная академия пищевых технологий) на кафедре высшей математики.

С 1974 по 1976 годы В. М. Кузаконь учился в аспирантуре по специальности "Геометрия и топология" под научным руководством профессора М. О. Рахулы. Кандидатская диссертация на тему "Дифференциальные инварианты расслоений римановых многообразий со связностями и их симметрии" защищена в Московском государственном педагогическом университете им. В. И. Ленина.

В. М. Кузаконь - последователь научных школ профессоров В.В. Лычагина и М.О. Рахулы. Основное направление его научной деятельности - теория дифференциальных инвариантов.

Им разработаны методики нахождения дифференциальных инвариантов расслоений гладких многообразий и приведено полное описание алгебр дифференциальных операторов расслоений относительно различных классических групп.

Виктор Михайлович внес большой вклад в организацию геометрических конференций и школ в Одессе. В период с 2004 года он возглавляет организационный комитет международных конференций "Геометрия в Одессе".

В. М. Кузаконь является президентом благотворительного фонда научных исследований "Наука", членом совета Международного геометрического центра. С 2007 года Виктор Михайлович является ответственным редактором научного журнала "Труды международного геометрического центра". С 2010 года журнал является научным специализированным изданием Украины в области математических наук.

В настоящее время Виктор Михайлович заведует кафедрой высшей математики в Одесской национальной академии пищевых технологий.

Мы поздравляем Виктора Михайловича с юбилеем и желаем ему крепкого здоровья, вдохновения и новых творческих достижений.

Л.Е. Евтушик, В.Г. Задорожный, В. Х. Кириллов, В. Ф. Кириченко, Й.Микеш.

Йозеф МИКЕШ

(В связи с 60-летием)

E-mail address: `josef.mikes@upol.cz`

Йозеф Микеш родился 6 февраля 1952 года в г. Злин Чешской Республики. Его математические способности проявились еще в школе, которую он с отличием окончил в 1967 году.

В выпускном классе школы Й. Микеш участвовал в олимпиадах по математике, физике и химии, в которых занял призовые места. Город Злин славился своей химической промышленностью (здесь располагались обувные заводы «Бата – Цебо»), а химический техникум считался самым престижным среднеобразовательным городским учреждением. Поэтому выбор учебного заведения для продолжения образования естественным образом пал именно на этот техникум, который Й. Микеш в 1971 году успешно окончил, дополнительно сдав госэкзамен по математике.

В 1971 году Й. Микеш поступил на естественно-научный факультет Университета имени Ф. Палацкого в г. Оломоуц (административный и религиозный центр Моравии и после Праги самый значительный исторический город Чешской Республики) на специальность «Прикладная математика».

После первого курса Й. Микеш был направлен по программе межгосударственных обменов в Одесский государственный университет им. И. И. Мечникова на механико-математический факультет, который окончил с отличием в 1976 году. Будучи студентом, Й. Микеш увлекся актуальными вопросами современной геометрии и выполнил дипломную работу на тему *Геодезические отображения полусимметрических римановых пространств* под руководством проф. Н. С. Синюкова.

В этом же году поступил в аспирантуру кафедры геометрии и топологии, которую в 1979 году досрочно окончил с защитой кандидатской диссертации на тему *Геодезические и голоморфно-проективные отображения специальных римановых пространств*.

Свою трудовую деятельность Й. Микеш начал на кафедре вычислительной математики Одесского университета, на которой в итоге проработал свыше десяти лет по хоздоговорной тематике.

В 1982 году Й. Микеш был избран на должность доцента кафедры геометрии и топологии механико-математического факультета Одесского государственного университета и проработал на этой должности до 1994 года.

Й. Микеш неоднократно награждался Почетными грамотами Министерства высшего и среднего специального образования Украины за научные исследования и руководство научными работами студентов и отмечался благодарностями ректора Одесского университета.

В 1994 году Й. Микеш переехал на постоянное место жительства в Чешскую республику и был принят на должность доцента кафедры математики Брненского политехнического университета в г. Злин, а затем на должность доцента кафедры алгебры и геометрии естественно-научного факультета Университета им. Ф. Палацкого в г. Оломоуц (университет основан в XVI веке и является одним из старейших в Центральной Европе). За трудовую деятельность награжден двумя Серебряными медалями Оломоуцкого университета (в 2002 и 2012 гг.), а также медалью Силезийского университета г. Опава (2001 г.). Кроме того награжден медалью Чешского Красного Креста за донорство.

В 1996 году Й. Микеш защитил в Карловом университете г. Праги докторскую диссертацию на тему *Геодезические, F-планарные и голоморфно-проективные отображения римановых и аффинносвязных пространств*, а в 1998 году указом президента Чешской Республики Вацлава Гавела ему присвоено ученое звание профессора. С 1997 года профессор Й. Микеш возглавляет Отделение геометрии.

Под руководством Й. Микеша было защищено 9 кандидатских диссертаций (Владимир Березовский, Мохсен Шиха, Кубатбек Эсенов, Алмаз Сабыканов, Мишель Хаддад, Владимир Киосак, Лукаш Рахунек, Мария Ходорова, Гана Худа).

Научные исследования профессора Й. Микеша посвящены актуальным вопросам теории геодезических и голоморфно-проективных отображений и их обобщений. Самым ярким достижением в области научных исследований является обнаружение замкнутости пространств Эйнштейна относительно геодезических отображений. Из последних результатов следует отметить установленное свойство пространств проективной связности – их проективная эквивалентность пространствам аффинной связности с симметрическим тензором Риччи.

Его научные результаты опубликованы более чем в 150 статьях и 5 монографических работах, соавторами которых являются более чем 50 коллег.

Мы друзья и коллеги Йозефа Микеша, желаем ему здоровья, счастья и радости новых открытий.

А.В. Аминова, Казанский государственный университет (Россия)
В.Е. Березовский, Уманский садоводческий университет (Украина)
М.Л. Гаврильченко, Одесский национальный университет (Украина)
Н.И. Гусева, Московский педагогический университет (Россия)
Л.Е. Евтушик, Московский государственный университет (Россия)
В.М. Кузаконь, Одесская национальная академия пищевых технологий (Украина)
Дж. Молдобаев, Бишкекский университет (Киргизия)
В.И. Паньженский, Пензенский педагогический университет (Россия)
А.Г. Попов, Московский государственный университет (Россия)
В.С. Собчук, Черновицкий национальный университет (Украина)
С.Е. Степанов, Финансовый университет при Правительстве РФ (Россия)
А.М. Шелехов, Тверской государственный университет (Россия)
В.В. Шурыгин, Казанский государственный университет (Россия)
S. Bácsó, University of Debrecen (Венгрия)
I. Chajda, Palacky University, Olomouc (Чехия)
M. Doupovec, Technical University, Brno (Чехия)
R. Halaš, Palacky University, Olomouc (Чехия)
J. Janyška, Masaryk University, Brno (Чехия)
I. Kolář, Masaryk University, Brno (Чехия)
O. Kowalski, Charles University, Praha (Чехия)
F. Machala, Palacky University, Olomouc (Чехия)
P.T. Nagy, University of Debrecen (Венгрия)
J. Rachůnek, Palacky University, Olomouc (Чехия)
J. Slovák, Masaryk University, Brno (Чехия)
K. Strambach, Nürnberg-Erlangen University (Германия)
A. Vanžurová, Palacky University, Olomouc (Чехия)

Анатолий Дмитриевич Милка

(В связи с 75-летием)

E-mail address: milka@ilt.kharkov.ua

Чем для меня примечательны эти прошедшие и волнующие пять лет? В Одессе возник и утвердился "Международный геометрический центр". Под эгидой Центра действует представительная ежегодная конференция "Геометрия в Одессе",объединяющая ведущих математиков из многих стран; геометрия здесь почитается как универсальное знание в памятные времена от Пифагора и Платона до Гаусса, Вейерштрасса, Гильберта. Издается журнал "Proc. Int. Geom. Center" в статусе специализированных профессиональных журналов. Центр - это знаковое явление для Украины, оно обязательно будет должным образом поддержано на государственном уровне. Ведь авторитет и богатство державы, как наглядно свидетельствует история, наукой прирастает. Участие в работе Центра, общение с Коллегами, общение с Геометрией меня организует и вдохновляет.

Судьбу мою как профессионального математика увидел и определил замечательный человек, мой первый Учитель академик Владимир Александрович Марченко. Благодаря ему я стал, после трех основных курсов педагогического физмата в Славянске, студентом мехмата Харьковского университета. Определил и рекомендовал великому геометру академику Алексею Васильевичу Погорелову. Алексей Васильевич сразу же вовлек меня, как своего ученика, в научную работу по тематике школы геометрии "в целом" А.Д. Александрова - Н.В. Ефимова - А.В. Погорелова. Он знакомил меня и с его открытиями в механике - с геометрической теорией устойчивости оболочек, которую он тогда начал теоретически и экспериментально разрабатывать. Осенью на пятом курсе, ко дню моего рождения, Алексей Васильевич зачислил меня на пол-ставки инженером отдела геометрии в только что открытом академиком Б.И. Веркиным Физико-техническом институте низких температур. С той поры я был всегда рядом с моим дорогим и любимым Учителем - в работе, на отдыхе, в домашней обстановке и вместе с Геометрией.

Когда Алексей Васильевич начал создавать свой учебник геометрии для средней школы, я стал его ближайшим помощником, требовательным внутренним экспертом. В качестве "единицы измерения", оценивающей педагогическое совершенство подобного произведения, мною были избраны "Начала" Евклида. Экспертиза оказалась эффективной - с каждым новым изданием учебника претензии внешних экспертов являлись минимальными. Что интересно, в пединституте содержание "Начал" для будущих учителей даже не комментировалось. Для меня "Начала" оказались неожиданным и увлекательным открытием - таким высоким мне представился его научный уровень и его непосредственный практический взгляд на элементарную геометрию. И я занимался изучением "Начал" с семидесятых годов. Анализ древних текстов показывает, что уже в давние времена геометрия строилась на аксиоматической основе, сравнимой с современной, и знаменитые "Начала" были подготовлены в школе Пифагора. Их предшественники - шумеры, египтяне, вавилоняне -

накопили богатый теоретический материал. Нельзя не восхищаться изящной геометрической квадратурой круга, которой они занимались за два тысячелетия до Новой Эры; в Золотой век Греции их квадратуру точно воспроизвёл Аристофан иносказанием в комедии "Птицы". На должном уровне ими осваивалась и научная геометрия "в целом". Открытая ими Теорема единственности для выпуклых полиэдров, введенная пифагорейцами в аксиоматику и названная мною Теоремой Евклида, превосходит и включает нынешнюю Теорему Лежандра и Коши.

А.В. Погорелов установил, что оболочка вращения под внешним или внутренним давлением теряет устойчивость с увеличением ограничиваемого ею объема. В совместной работе с В.А. Горькавым нами были найдены специальные деформации - линейные изгибания - правильных выпуклых полиэдров, подтверждающие это открытие. Получены соответствующие численные характеристики: к примеру, объем тетраэдра может увеличиться на 44 процента. Вероятно, такие деформации являются одной из причин образования в природе сложных горных систем и вулканических кальдер, когда раскаленная магма под большим давлением изливается через трещину, опоясывающую вершину. В механике это называется жесткой потерей устойчивости.

Мною обнаружено семейство полиэдров, обладающих необычными, противоречивыми с точек зрения и геометрии, и классической механики деформационными свойствами. С одной стороны, модели полиэдров допускают свободные непрерывные большие обратимые изгибания без видимого искажения материала. С другой стороны, сами полиэдры математически жесткие и не допускают непрерывных изгибаний по Коши. Эти полиэдры названы модельными флексорами в отличии от теоретических флексоров Р. Коннелли. С точки зрения геометрической теории оболочек А.В. Погорелова, изгибания моделей асимптотически точно аппроксимируются линейными изгибаниями полиэдров. С точки зрения аналитической теории динамических систем В.И. Арнольда, они представляют собой нежесткую, мягкую или затянутую, потерю устойчивости, что соответствует потере устойчивости " в малом" по Л. Эйлеру. Это новое явление в механике деформаций твердых тел можно интерпретировать как оригинальную геометрическую машину катастроф, дополняющую известные физические модели Э.К.Зимана и Т.Постона. Открытие модельных флексоров есть дальнейшее развитие геометрической теории устойчивости оболочек А.В. Погорелова. В прикладном плане этому явлению имеется много аналогий, в том числе не столь давних, при разрушении строительных конструкций, авариях самолетов и судов, в геофизике землетрясений. Заметим, что явление затянутой потери устойчивости, как сенсация, было впервые обнаружено именно в аналитической теории школой В.И. Арнольда. Простейшие модельные флексоры - правильные звездчатые пирамиды А.Д. Александрова и С.М. Владимировой. Деформации этих пирамид квалифицируются как уникальные динамические системы с элементарными геометрическими особенностями - складками и сборками. Прикладные исследования модельных флексоров выполняются мною в харьковской Компании "Джи Эс Ти", которой стимулируются новые, исходящие из геометрии промышленные технологии. Компанией получено ряд патентов, отечественных и зарубежных, на изобретения, способы и устройства, с моим авторством. Вспоминаю первую, с гармоничной режиссурой, конференцию "Геометрия в Одессе-2004". И сердечно благодарю вдохновенных её организаторов Богдана Викторовича Егорова, Валентина Васильевича Лычагина, Виктора Михайловича Кузаконя, Алексея Гурьевича Кушнера. Счастливое предзнаменование Одесского Геометрического Центра.

Хруслов Евгений Яковлевич

(В связи с 75-летием)

Хруслов Евгений Яковлевич

Ученый-математик, академик Национальной академии наук Украины (2003), доктор физико-математических наук (1972).

Родился 7 января 1937 года в г. Харькове. После окончания в 1959 г. Харьковского политехнического института работал инженером-электриком в отраслевом научно-исследовательском учреждении. Однако интерес к математике привел его в 1961 г. в аспирантуру Физико-технического института низких температур. Научным руководителем Евгения Яковлевича был В. А. Марченко. В 1965 г. Е. Я. Хруслов защитил кандидатскую, а в 1972 г. - докторскую диссертацию на тему "Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей".

С 1986 г. он заведует отделом математического моделирования физических процессов, а с 1996 года руководит Математическим отделением Физико-технического института низких температур им. Б. І. Веркина. Научные интересы Е. Я. Хруслова охватывают широкий круг проблем математической физики. Он является одним из основателей теории усреднения дифференциальных операторов с частными производными. Разрабатывать эту теорию Евгений Яковлевич начал еще в аспирантуре. Он осуществил исчерпывающее исследование краевых задач Дирихле в областях с мелкозернистой границей для самосопряженных эллиптических операторов произвольного порядка, нашел усредненные уравнения для главных членов асимптотического разложения решений этих задач и получил оценки скорости сходимости к ним. Найденное Евгением Яковлевичем строгое решение задачи о резонансном прохождения волн через систему тонких каналов применяют в радиофизике. Итогом этих исследований стала широко известная монография В. А. Марченко и Е. Я. Хруслов "Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей" (1974).

В дальнейшем ученый продолжил эти разработки и стал признанным специалистом в теории усреднения. Развитые им новые вариационные методы исследования уравнений математической физики в сильно перфорированных участках позволили построить усреднённые модели физических процессов, происходящих в микронеоднородных средах. В зависимости от структуры области, краевых условий на ее сложной границы и колебания коэффициентов исходного уравнения, в результате усреднения, возникают различные нестандартные модели, в частности многокомпонентные модели и модели с памятью, адекватно описывающих эти процессы. Многолетние исследования увенчались построением теории усреднения краевых задач математической физики, которая изложена в монографиях В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова "Усредненные модели микронеоднородных сред" (издательство "Наукова думка", 2005) и "Homogenization of Partial Differential Equations" (издательство Birkhauser, 2006).

Ряд работ Евгения Яковлевича связаны с исследованием асимптотического поведения решений краевых задач на римановых многообразиях. Здесь самым интересным является изучение усреднённого описания гармонических полей, дифференциальных форм и уравнений диффузии на римановых многообразиях сложной микроструктуры. Исследуя асимптотическое поведение решений однородной системы уравнений Максвелла на римановых многообразиях специальной структуры неограниченно растущего топологического рода, Е.Я. Хруслов показал, что в результате усреднения такой системы возникает эффективная плотность электрического заряда и тока.

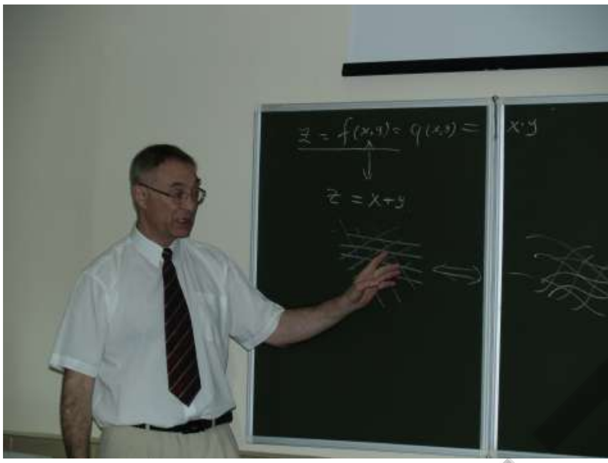
Другим важным направлением деятельности Евгения Яковлевича есть теория нелинейных эволюционных вполне интегрируемых уравнений. Он доказал теорему о распаде начальных данных типа ступеньки для уравнения Кортевега-де Фриза в бесконечную серию уединенных волн асимптотических солитонов. Таким образом впервые было получено точную формулу для ведущего члена асимптотики решения, включая значения всех констант, входящих в нее. Эта задача давно интересовала как математиков, так и физиков. Предложенный метод ученый и его ученики распространили на другие нелинейные уравнения, в частности, двумерное относительно пространственных переменных уравнения Кадомцева-Петвиашвили. Это дало возможность лучше понять роль непрерывного спектра в генерации асимптотических солитонов и криволинейных асимптотических солитонов.

Несколько работ Е. Я. Хруслова посвящены теории обратных задач электромагнитного зондирования. Построенные им операторы преобразования для задач с потенциалом, который линейно зависит от спектрального параметра, помогли решить задачу об определении электромагнитных параметров среды по результатам измерения компонент поля на поверхности среды. Разработанные методы доказали свою эффективность во время обработки данных реальных геофизических экспериментов.

Много лет Евгений Яковлевич читает лекции по различным дисциплинам в Харьковском национальном университете им. В. Н. Каразина и руководит работой аспирантов. Член редколлегии следующих научных журналов "Физика низких температур" и "Журнал математической физики, анализа, геометрии". Высокое профессиональное мастерство ученого, его принципиальность и демократичность снискали ему заслуженное уважение и авторитет.

Александр Михайлович Шелехов

(В связи с 70-летием)



Александр Михайлович Шелехов

Профессор, доктор физико-математических наук, родился 30 октября 1942. Работает в Тверском университете с 1968 года. В настоящее время - профессор кафедры функционального анализа и геометрии. Сфера научной деятельности: дифференциальная геометрия многомерных три-тканей и ее приложения, классическая дифференциальная геометрия.

А.М. Шелехов - известный математик, ему удалось решить ряд крупных научных проблем. Еще в своей кандидатской диссертации "К теории комплексов прямых многомерных неевклидовых пространств" (1968 г.) он строит общую дифференциально-геометрическую теорию для весьма сложного объекта - n-параметрического семейства прямых в расширенном неевклидовом пространстве произвольной сигнатуры. Полученные им результаты в этом разделе линейчатой дифференциальной геометрии до сих пор являются непревзойдёнными.

В 1970 году А. Шелехов организует в Тверском университете специализацию и семинар по теории тканей. Под его редакцией с 1981 года начинает выходить ежегодный сборник трудов "Ткани и квазигруппы" (с 1991 года - на английском языке). Вместе с М. А. Акивисом они издают ряд учебных пособий и монографию "Geometry and Algebra of multidimensional Three-webs" (1992), в которой были собраны все имеющиеся к тому времени результаты по теории многомерных три-тканей и даны некоторые физические приложения этой теории. В 2010 году вышла монография "Многомерные три-ткани и их приложения" этих же авторов на русском языке.

Активно занимаясь теорией тканей, А. Шелехов сумел решить одну из труднейших проблем, долгое время не поддававшуюся решению. Он доказал, что G-структура, определяемая многомерной шестиугольной три-тканью W, является замкнутой G-структурой четвертого порядка. Этот результат послужил основой его докторской диссертации "Замкнутые G-структуры, определяемые многомерными три-тканями" (защищена в 1991 году).

В рамках этой деятельности под его руководством было подготовлено несколько кандидатских диссертаций, а также докторская диссертация Г.А. Толстихиной (2007 г.) Всего, начиная с 1968 года, А. Шелеховым опубликовано по этой тематике более 100 научных статей, в том числе, в центральных академических изданиях. В 2005 г. А. Шелехову удалось решить известную проблему Бляшке (поставлена в середине прошлого века): перечислить всевозможные триангуляции сферы и плоскости тремя пучками окружностей. Эта задача, поставленная в 1955 году, долгое время не поддавалась решению локальными методами из-за очень сложных вычислений. А. Шелехову удалось существенно упростить вычисления, доказав, что граница области определения всякой три-ткани, триангулирующей плоскость, есть линия этой ткани.

В 2011 г. А. Шелехов решил известную проблему Гронвелла в теории тканей (поставлена в 1912 году). Среди его прикладных работ наиболее интересна статью "Математическая модель ипотечного кооператива" (ж. Экономика и математические методы, 2007), где строго обоснованы условия, при которых накопительный кооператив не является "пирамидой". Всего им опубликовано около 150 научных работ, 10 учебников и монографий, около 20-ти учебно-методических пособий, более 60-ти публицистических статей. Он один из авторов монографии "Научная основа стратегии устойчивого развития Российской Федерации" (Москва, 2002), которая стала победителем конкурса "Национальная экологическая премия" за 2004 год. Опубликованный им сборник статей "Между прошлым и будущим" (2002 г.) рекомендован в качестве учебного пособия для вузов по данной тематике. Его статья "О роли России в решении глобальных проблем человечества" вошла в книгу "Россия на пути к устойчивому развитию" (Москва, 2003), подготовленную крупнейшими специалистами в области экологии и устойчивого развития.

В 1997 г. А. Шелехов и профессор Н.Б. Тихомиров написали учебник по математике для юристов. Его третье издание ("Математика и информатика для юристов", 2005 г.) стало победителем Всероссийского конкурса учебной литературы в номинации "точные науки". В 2010 году это же издание стало победителем I Всероссийского конкурса "Лучшее учебное издание по математике" в номинации "Математика для гуманитариев".

А.М. Шелехов всегда много времени уделял общественной работе. С 1995 по 1999 год он депутат Тверской городской Думы, с 1999 по 2003 год - депутат Государственной Думы Российской Федерации, член Комитета по образованию и науке, заместитель председателя Комиссии по проблемам устойчивого развития.

Корпоративные награды и премии:
Почетный профессор Тверского государственного университета, 1997г.
Нагрудный знак "За заслуги в развитии Тверской области" (губернатор Тверской области В. И. Платов, 1998г.)
Почетный работник высшего профессионального образования (Министр образования Российской Федерации В.М. Филиппов, 2002г.)
Нагрудный юбилейный знак "Государственная Дума. 100 лет" (Председатель Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации Б.В. Грызлов, 2006г.)
Почетная Грамота Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации (Председатель Государственной Думы Федерального Собрания Российской Федерации Б.В. Грызлов, 2007г.)
Международная премия Анассилаоса им. Ренато Калапсо за достижения в математике (Италия, Калабрия, 2010г.)
Орден Покрова Пресвятой Богородицы за вклад в развитие математики и международного геометрического центра (фонд "Наука", Украина, 2011г.)

Список основных работ профессор А.М. Шелехова

1. Geometry and Algebra of Multidimensional Three-webs. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1992, 375 pp. (с Акивисом М.А.).
2. Научная основа стратегия устойчивого развития Российской Федера-ции. Издание Государственной Думы РФ, 2002, 231с. (с Селезневым Г.Н., Христенко В.Б., Залихановым М.Ч., Львовым Д.С., Матросовым В.М., Гранбергом А.Г., Левашовым В.К., Урсулом А.Д.).
3. Стратегия развития образования. Изд. Гос.Думы, 2002 (совместно с А.В. Шишловым, О.Н. Смолиным и др.).
4. Между прошлым и будущим. Сборник статей. Изд. МГИУ, М., 2003, 182 стр.
5. Математика и информатика (для юристов). Изд-во МГИУ, 2005, 365 стр. (совместно с Е.А.Рогановым и Н.Б.Тихомировым).
6. Задачи по дифференциальной геометрии. Учебное пособие. М., Изд-во МЦНМО, 2005, 112 стр. (совместно с Г.С. Шаровым и М.А. Шестаковой).

7. Многомерные три-ткани и их приложения. Тверь, ТвГУ, 2010, 307 стр. (совместно с М.А. Акивисом).

8. Дифференциально-геометрические объекты высших порядков многомерной три-ткани. Проблемы геометрии, Т.19., Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, 1987, 101–154.

9. On subwebs of 3-webs and subalgebras of local Wk -algebras. Acta Math., Hungar., 1988, 52, N3–4, 265–271 (с М.А.Акивисом).

10. Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания. Проблемы геом. Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР, 1989, т.21, 109–154.

11. Об аналитических решениях уравнения x(yx)=(xy)x. Матем.заметки. 1991, т.50, №4, с.132–140.

12. On the theory of G-webs and G-loops. Lecture Notes in Math., v.1481. Proc.of Conference "Global Diff.Geom. and Global Analysis", Berlin, 1991, 265–270 (с В.Б.Лазаревой).

13. Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах. Доклады РАН, 2002, том 383, N 1, с. 32-33. (с Г.А.Толстихиной).

14. О три-тканях, определяемых линейным дифференциальным уравнением первого порядка/Известия вузов. Математика, N 11(474), 2001, 54-57. (с А.А.Уткиным).

15. Три-ткани, определяемые группами преобразований. Доклады РАН, 2002, том 385, N 4, с. 1 - 3 (с Г.А.Толстихиной).

16. Многоточечные инварианты групп преобразований и определяемые ими три-ткани. Изв. вузов. Матем., N 11(498), 2003, стр. 82-87 (с Г.А.Толстихиной).

17. Три-ткани, определяемые уравнением Риккати//Изв. Вузов. Матем.– 2004.–№11(510).-с.87-90. (совместно с А.А.Уткиным).

18. О квазигруппах Бола преобразований// Докл. РАН.-2005.-т.401.–№2.-с.166-168 (совместно с Г.А.Толстихиной).

19. О три-ткани Бола, образованной слоениями разных размерностей//Изв. Вузов. матем.-2005.-№5(516).-с.56-62 (совместно с Г.А.Толстихиной).

20. Криволинейные три-ткани, допускающие однопараметрическое семейство автоморфизмов// Изв. Вузов. матем.-2005.-№5(516).-с.68-70.

21. Классификация криволинейных три-тканей//Итоги науки и техники ВИНИИ. Современная математика и ее приложения. О триангуляциях - Т.32 (2005).-С.117-150. (совместно с А.А.Уткиным).

22. О три-тканях, образованных пучками окружностей//Итоги науки и техники ВИНИИ. Современная математика и ее приложения. - Т.32 (2005).-С.7-28.

23. Об устойчивости ипотечного кооператива. Экономика и математические методы, 2007, том 43, № 3, с. 30-36.

24. Современный терроризм в свете экологической безопасности. В книге: Становление Евразийской безопасности, изд. РАН, ин-т социально-политических исследований, М., 2005, стр. 223-235 (совместно с М.Ч. Залихановым и К.С. Лосевым).

25. Естественные экосистемы - важнейший природный ресурс человечества. (совместно с М.Ч. Залихановым и К.С. Лосевым). Вестник РАН, 2006, том 76, № 7, с. 612-614.

26. О триангуляциях плоскости пучками коник. Матем. сб., 2007, том 198, № 11, стр. 107-134 (совместно с В.Б. Лазаревой).

27. К проблеме классификации регулярных 4-тканей, образованных пучками сфер. Изв. Вузов. Матем., № 12, 2007, с. 70-76 (совместно с В.Б. Лазаревой).

28. Об условиях линеаризуемости гладких отображений грассмановых многообразий. В кн. Теория функций и ее приложения. Материалы Всесоюзной научной конференции. Тверь, 2009, стр. 89-94.

29. Некоторые топологические вопросы теории тканей. Proc. Intern. Geom. Center 2009 2(3) 75-92 с.

30. О достаточном условии боловости многомерной три-ткани. Збірник Праць Ін-ту математики НАН України. Ін-т математики НАН України, Київ, 2009, Т. 6, № 2, с. 256-263.

31. Состоится ли в России инновационное общество? Вестник высшей школы, 2009, №11, с.

11-18 (совместно с М.Ч. Залихановым).
32. К теории криволинейных три-тканей. Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 124, Москва, 2010, стр. 63-114 (совместно с В.Б. Лазаревой и А.А. Уткиным).
33. Cartan-Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. of Math. Sciences, v. 177, n. 4, p. 522-540, 2011 (совместно с М.А. Акивисом).
34. Специфика реформирования образования в России. В сб. "Образование, наука и экономика в вузах." Плоцк, Польша, с. 2010 (совместно с А.В. Белоцерковским).
35. Решение проблемы Гронвелла об эквивалентности грассмановых тканей. Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского, 2011, стр.311-320.

Центральна симетризація опуклих тіл

Л. Є. Базилевич

(Національний університет "Львівська політехніка", Україна)

E-mail address: `izar@litech.lviv.ua`

Позначимо через $\mathrm{cb}(\mathbb{R}^n)$ (відповідно $\mathrm{sym}_0(\mathbb{R}^n)$) множину всіх (відповідно всіх центрально симетричних) опуклих компактних тіл в $\mathbb{R}^n$, наділену метрикою Гаусдорфа.

Розглядаємо відображення центральної симетризації $\theta\colon A \mapsto \frac{1}{2}(A-A)\colon \mathrm{cb}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{sym}_0(\mathbb{R}^n)$. Зауважимо, що прообразами куль при цьому відображенні є тіла сталої ширини. Див. [1] стосовно топології гіперпростору тіл сталої ширини.

Теорема 1. Нехай $n \geq 1$. Тоді відображення θ є м'яким (тобто має властивість продовження параметризовних селекцій; див., наприклад, [2]).

Через Q позначаємо гільбертів куб, $Q = [0,1]^\omega$.

Теорема 2. Нехай $n \geq 2$. Тоді відображення θ є розшаруванням з шаром Q-многовид над кожним компактом, що лежить у множині неполіедральних центрально симетричних опуклих компактних тіл.

У доведенні теореми 2 використовується характеризаційна теорема для розшарувань з шаром Q-многовид [3].

References

[1] L. E. Bazylevych, M. M. Zarichnyi, *On convex bodies of constant width.*, Topology Appl. 153 (2006), no. 11, P.1699–1704.

[2] Е. В. Щепин, *Функторы и несчетные степени компактов.*, Успехи мат. наук. Т. 36, вып. 3 (1981), С. 3-62.

[3] H. Torunczyk, J. West, Fibrations and Bundles with Hilbert Cube Manifold Fibers, Memoirs of the AMS 406, 1989, iv + 75 pp.

Про продовження А-деформацій поверхонь з стаціонарними довжинами ліній

Л. Л. Безкоровайна

(ОНУ ім. І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: mazur_elena@mail.ru

Т. Ю. Подоусова

(Одеська державна академія будівництва та архітектури, Одеса, Україна)

Н. В. Вашпанова

(Одеська державна академія холоду, Одеса, Україна)

В роботі [1] доведено, що на регулярній поверхні S в E_3-просторі існують два дійсних однопараметричних сімейства ліній, що зберігають довжину при нетривіальній (яка не є нескінченно малим (н.м.) згинанням) А-деформації першого порядку.

Відомо [2], що необхідними і достатніми умовами А-деформацій n-ого порядку поверхні $S \in C^3$ в E_3-просторі є рівності:

$$a^{\alpha\beta}\varepsilon^k_{\alpha\beta} + c^{i\alpha}c^{j\beta}\sum_{m=1}^{k-1}\varepsilon^m_{ij}\varepsilon^{k-m}_{\alpha\beta} = 0, k = \overline{2,n}$$

де $\varepsilon^k_{\alpha\beta}$ - варіації k-ого порядку коефіцієнтів a_{ij} першої квадратичної форми на S, $a^{\alpha\beta} = c^{\alpha i}c^{\beta j}a_{ij}$, $c^{11} = c^{22} = 0, c^{12} = -c^{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}, a = a_{11}a_{22} - a^2_{12}$.

У випадку $\varepsilon^k_{\alpha\beta} = 0, (k = \overline{1,n})$ зазначена деформація буде н.м. згинанням n-ого порядку і кожна крива на S зберігатиме (в головному) довжину, оскільки при конкретному значенні k тотожно виконуються рівності:

$$\varepsilon^k_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0, (k = \overline{1,n}) \tag{1}$$

які можна розглядати як диференціальні рівняння ліній, що зберігають довжину при н.м. деформації n-ого порядку.

Будемо вимагати, щоб кожне диференціальне рівняння (1) при нетривіальній А-деформації скінченого порядку n представляло один і той же геометричний образ, тобто аналітично це означає виконанння наступних співвідношень:

$$\varepsilon^k_{\alpha\beta} = \lambda^k\varepsilon^1_{\alpha\beta},$$

де λ^k - коефіцієнти пропорційності.
Доведена наступна

Теорема 1. *Нехай нетривіальна А-деформація першого порядку поверхні $S \in C^3$ в E_3-просторі породжує сітку ліній ω стаціонарної довжини. Тоді ця А-деформація не допускає продовження в нетривіальну А-деформацію скінченного порядку n ($n \geq 2$), яка породжує ту ж саму сітку ω, що зберігає свою довжину.*

References

[1] Л. Л. Безкоровайна *Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки*,- Навчальний посібник. - Одеса: Астропринт, 1999. - 168 с.

[2] Н. В. Дерманец *Об основных уравнениях А-деформаций n-ого порядка поверхностей* .,- Тезисы докладов молодых ученых,Одесса, 1983, ч. 11, С. 4-6.

До питання про геодезичні деформації ріманових просторів

М. Л. Гаврильченко

(Одеський національний університет ім. І.І.Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: `Fedchenko_ Julia@ukr.net`

З основними ідеями геодезичних деформацій ріманового простору V_n, ізометрично зануреного в ріманів простір V_m, $m > n$, можна познайомитись у роботах [1] і [2].

У цих же роботах наведено основні рівняння, до яких зводиться задача. У випадку $m = n+1$ це може бути система типу Коші відносно семи невідомих. Дослідження такої системи наштовхується на значні технічні труднощі і в загальному випадку не проведено. У випадку, коли V_n-цілком геодезична гіперповерхня, система зводиться до чотирьох невідомих b_{ij}, λ_i, ψ_i, ω і має вигляд [3]:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_{i,j} & = & b_{ij}, \\ b_{ij,k} & = & -\lambda_s R^s_{kij} + \psi_j g_{ik} + \psi_k g_{ij}, \\ n\psi_{j,k} & = & b_{(sj)} R^s_k - b_{(sp)} R^{p\ \ \ s}_{.jk.} + \omega g_{jk}, \\ (n-1)\psi_{,l} & = & 2(n+1)\psi_s R^s_l - b_{(sp)}(R^{sp}{}_{,l} - 2R^{sp}_{l,.}), \end{array}\right. \tag{1}$$

де R^h_{ijk}- тензор Рімана, R_{ij}-тензор Річчі, $b_{(sp)} = b_{sp} + b_{ps}$, піднімання індексів здійснюється тензором g^{ij}, взаємним з метричним тензором g_{ij}, кома означає коваріантне диференціювання на базі g_{ij}.

Для всіх рівнянь системи (1) знайдені умови інтегровності. Для (1_1) вони виконуються тотожньо, для (1_2) мають вигляд

$$-b_{(sj)} R^s_k + b_{(is)} R^{s\ \ \ i}_{jk.} = -n\psi_{j,k} + \omega g_{jk}, \tag{2}$$

звідки випливає (1_3).

Якщо (2) згорнути з g^{jk}, то одержимо

$$(n-1)\omega = \lambda_s R_{,.}{}^{s} + 2b_{sp} R^{sp}, R = g^{ij} R_{ij}. \tag{3}$$

Таким чином, інваріант ω не є незалежним.

Якщо V_n -цілком геодезична поверхня 1-го класу ($V_{n+1} \equiv S_{n+1}$), то $\omega = 0$, $\psi_{i,j} = 0$, а отже система (1) завжди має нетривіальний розв'язок.

Теорема 1. *Цілком геодезична поверхня першого класу завжди допускає геодезичну деформацію.*

References

[1] M.L. Gavrilchenko. *Geodesic deformations of Riemannion space* // Diff. Geom. And its Appl. World Sci. Singapore (1989) 47–53,

[2] М. Л. Гаврильченко, В.А.Киосак, Й.Микеш. *Геодезические деформации гиперповерхностей римановых пространств* //Известия высших учебных заведений (2004) №11(510) 23–29.

[3] М. Л. Гаврильченко, С.Ю.Гусейнова, Й.Микеш. *Цілком геодезичні гіперповерхні при геодезичній деформації* //Геометрія в Одесі-2011, тези доповідей (2011) С.17

Нелінійні операторні рівняння в комплексних інтерполяційних шкалах

А. О. Лопушанський

(Прикарпатський національний університет ім. Василя Стефаника,Івано-Франківськ, Україна)

E-mail address: alopushanskyj@gmail.com

Нехай задана пара банахових просторів $(V_0, \|\cdot\|_0)$ та $(V_1, \|\cdot\|_1)$ над $\mathbb{C}$ з неперервним та щільним вкладенням $E_{10}\colon V_1 \looparrowright V_0$. Зафіксуємо кут $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ і співставимо йому в площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор з виколотою точкою $\{0\}$ і його замикання, відповідно $\Lambda_0 = \bigcup\{l_\omega\colon \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\}$ і $\Lambda = \Lambda_0 \bigcup\{0\}$, де $l_\omega = \left\{re^{i\omega}\colon r > 0\right\}$ — промінь з кутом $\omega \in [0, 2\pi]$. Нехай

$$\mathcal{A} = \left\{A \in \mathscr{L}(V_1; V_0)\colon \sup_{\lambda\in\Lambda} \left\|(\lambda E_{10} - A)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty\right\}$$

— клас операторів $A\colon V_1 \longmapsto V_0$, для яких обернений $(\lambda E_{10} - A)^{-1}$ є визначеним та рівномірно обмеженим для всіх чисел $\lambda \in \Lambda$ за нормою простору $\mathscr{L}(V_0; V_1)$ всіх неперервних лінійних операторів із V_0 в V_1. Оператори класу $\mathcal{A}$ називають секторіальними над простором V_0. Кожен з операторів $A \in \mathcal{A}$ можна трактувати як необмежений лінійний оператор над банаховим простором V_0 із щільною областю визначення $V_1 = \mathscr{D}(A)$. Кожен з операторів $A \in \mathcal{A}$ генерує аналітичну півгрупу в просторі V_0 і має від'ємний тип.

Зафіксуємо оператор $J \in \mathcal{A}$. Оператор $(-J)$ є позитивний ([1]) в сенсі означення $\big($[2], 1.14.1$\big)$. Через $V_\vartheta := \mathscr{D}\left[(-J)^\vartheta\right]$ позначимо область визначення оберненого до $(-J)^{-\vartheta}$ оператора $(-J)^\vartheta$ із нормою графіка $\|x\|_{V_\vartheta} := \left\|(-J)^\vartheta x\right\|_0$. Тоді $V_\vartheta \simeq [V_0, V_1]_\vartheta$ — проміжний простір для інтерполяційної пари $\{V_0; V_1\}$, породжений методом комплексної інтерполяції $\big($[2], теорема 1.15.3$\big)$. Згідно з ([3], с. 170-171), півгрупа $0 < t \longmapsto e^{tJ}$ відображає простір V_ϑ в простір $V_{1+\vartheta}$ та рівномірно обмежена і сильно неперервна над V_ϑ.

Нехай тепер A — довільний оператор класу $\mathcal{A}$. Зауважимо (див. [1]), що оскільки виконується наступний ізоморфізм банахових просторів $\mathscr{D}\left[(-A)^\vartheta\right] \simeq V_\vartheta$, де $\mathscr{D}\left[(-A)^\vartheta\right]$ — область визначення $(-A)^\vartheta$, то в наведених міркуваннях можна замінити фіксований оператор J на довільний оператор $A \in \mathcal{A}$.

Нехай $0 < \eta < \vartheta \leq 1$, $W_{1,\eta} := C\big([0,T]; V_{1+\eta}\big) \bigcap C^1\big([0,T]; V_\eta\big)$ – простір неперервних вектор-функцій $v\colon [0,T] \ni t \longmapsto v(t) \in V_{1+\eta}$, які також є сильно неперервно диференційованими зі значеннями похідної v'_t в просторі V_η, $\|z\|_{W_{1,\eta}} = \max\left\{\|z\|_{C\left([0,T];\, V_{1+\eta}\right)}, \|z'\|_{C^1\left([0,T];\, V_\eta\right)}\right\}$, $g_0 \in C\big([0,T] \times V_{1+\eta} \times V_\eta;\, V_\vartheta\big)$, $g \in W_{1,\eta}$.

Знайдено достатні умови розв'язності в $W_{1,\eta}$ нелінійного інтегродиференціального рівняння

$$v(t) = \int_0^t e^{(t-\tau)A} g_0(\tau, v(\tau), v'(\tau))\, d\tau + g(t).$$

References

[1] Лопушанский А.О. *Абстрактная параболическая задача Коши в комплекмных интерполяционных шкалах* .,- Дифференц. уравнения, (2010), 46, №12, С. 1799 - 1803.

[2] Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы* ., -М., (1980).

[3] Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б. *Однопараметрические полугруппы* ., = М.: Мир, (1992), 351 с.

Напівобернена задача для стільтьєсівської струни

О. Мартинюк

(Південноукраїнський національний педагогічний університет імені К. Д. Ушинського, Одеса, Україна)

E-mail address: `martynyuk_olga@mail.ru`

Уперше напівобернена задача (або задача Гохштадта – Лібермана), тобто задача породжена рівнянням Штурма – Ліувілля з крайовими умовами Робена (змішаними умовами або умовами Штурма в інших термінах; до них входять константи $h \in \mathbb{R}$, $H \in \mathbb{R}$) була розглянута в 1978 році Г. Гохштадтом, Б. Ліберманом (див. [1]). Ними було доведено, що один спектр, звуження потенціалу на одну (ліву) половину інтервалу, константи h і H однозначно визначають звуження потенціалу на другу (праву) половину інтервалу. Узагальнення цього результату можна знайти в роботах F. Gesztesy і B. Simon (1999 р.), M. Horvath (2005 р.), G. Wei та H.-K. Xu (2009 р.). Зауважимо, що в усіх вище названих працях не було запропоновано метод відновлення потенціалу, і необхідні та достатні умови існування розв'язку. Методи відновлення потенціалу напівоберненої задачі і достатні умови існування її розв'язку з умовами Діріхле на кінцях інтервалу були запропоновані в роботах [2], [3]. В останній роботі запропоновано також необхідні умови існування розв'язку. Дискретний аналог напівоберненої задачі для стільтьєсівської струни з умовами Діріхле на кінцях розглянуто в [4].

Напівобернена задача для стільтьєсівської струни з умовами Діріхле на лівому і умовою Робена (до останньої входить дійсна константа $H \neq 0$) на правому кінцях полягає в наступному. Відомі величини мас, що розташовані на лівій половині стільтьєсівської струни, разом із інтервалами між ними, спектр задачі Діріхле – Робена, що породжений рівняннями малих поперечних коливань цієї струни, загальна довжина правої частини стільтьєсівської струни і дійсне число H. Кількість мас n становить половину загальної кількості мас струни. Треба знайти величини мас на правій частині інтервалу і довжини інтервалів між ними.

Ідея розв'язку задачі полягає в тому, що за допомогою інтерполяції, виходячи із заданих величин, необхідно відновити характеристичні многочлени $\widetilde{S}_{2n}(\lambda)$, $\widetilde{S}_{2n-1}(\lambda)$ задач на правій частині струни, де λ відіграє роль спектрального параметра. Якщо побудована раціональна функція $\dfrac{\widetilde{S}_{2n}(\lambda)}{\widetilde{S}_{2n-1}(\lambda)}$ буде належати класу S-функцій, то ми можемо розкласти її єдиним чином у ланцюговий дріб, коефіцієнти якого будуть шуканими величинами. Доведено, що задача має єдиний розв'язок.

Якщо в описаній задачі покласти $H = 0$, то отримаємо задачу для струни Стільтьєса з умовами Діріхле і Неймана на лівому та правому кінцях відповідно.

Список літератури

[1] Hochstadt H. An inverse Sturm – Lioville problem with mixed given data / H. Hochstadt, B. Lieberman // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1978. – Vol. 34. – P. 676 – 680.

[2] Sakhnovich L. Half-inverse problem on the finite interval / L. Sakhnovich // Inverse Problems. – 2001. – Vol. 17. – P. 527 – 532.

[3] Martinyuk O. M. On the Hochstadt – Lieberman theorem / O. M. Martinyuk, V. N. Pivovarchik // Inverse Problems. – 2010. – Vol. 26. – 035011. – 6 pp.

[4] Мартинюк О. М. Теорема Гохштадта – Лібермана для стільтьєсівської струни / О. М. Мартинюк // Математичні студії. – 2010. – № 34. – С. 80 – 89.

Теорема Антуана для кривих скінченної довжини

І. Я. Олексів

(Національний університет "Львівська політехніка", Львів,Україна)

E-mail address: `oleksivi@polynet.lviv.ua`

Якщо A – проста замкнена крива на площині E^2, то ізотопію $h_t : A \to E^2$, $t \in [0;1]$, розуміємо як неперервну сім'ю вкладень кривої A в площину.

Теорема. *Нехай проста замкнена крива A, яка має скінченну довжину, обмежує в площині диск D і Δ – двовимірний симплекс у внутрішності D. Тоді існує ізотопія $h_t : \partial\Delta \to A$, $t \in [0;1]$, яка переводить границю $\partial\Delta$ симплекса Δ в криву A і при цьому довжини кривих $h_t(\partial\Delta)$ не перевищують довжини A.*

Це – одна з форм теореми Антуана ([1]). Зазвичай в цій теоремі немає обмежень на довжини кривих. Доведення сформульованої теореми виконується на основі наближення кривої A з середини диску D послідовністю простих замкнених ламаних $\{L_n\}$, $L_1 = \partial\Delta$, довжини яких не більші за довжину A ([2]). Далі для кожного $n = 1, 2, \ldots$, будуємо ізотопію $h_t^n : L_n \to L_{n+1}, t \in [0;1]$, яка переводить L_n в L_{n+1} в межах диску D і так, щоб усі криві $h_t^n(L_n), t \in [0;1]$, були коротшими за криву A, а добуток ізотопій $h_t = h_t^1 \cdot h_t^2 \cdot \ldots$ переводив ламану $\partial\Delta$ в криву A. Кожну ізотопію h_t^n отримуємо на основі алгоритму побудови найкоротшої ламаної, яка в поліедральному дискові сполучає дві задані точки на границі диску. Як наслідок побудов, доходимо висновку, що всі ламані $h_t(\partial\Delta), 0 \le t < 1$, є коротші за криву A.

References

[1] Л. В. Келдыш *Топологические вложения в евклидово пространство* . - Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 81. М.:Наука, 1966.

[2] Jiří Jelínek *Sur un théorème concernant les courbes de Jordan* . - Чехословацкий матем. журнал. 10(85), (1960), С. 596 - 613.

Інфінітезимальні деформації поверхонь в E_3 з фіксованою варіацією рімановоїзв'язності

І. В. Потапенко

(Одеський національний університет імені І.І. Мечникова, Одеса, Україна)

E-mail address: igopotapenko@yandex.ru

Основні рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь в Е3, що гарантують існування вектора зміщення мають вигляд ([1]):

$$\begin{aligned} \delta b_{ik}b_{jl} - \delta b_{ij}b_{kl} + \delta b_{jl}b_{ik} - \delta b_{kl}b_{ij} = T_{lijk}, \\ \delta b_{ij,k} - \delta b_{ik,j} = b_{mj}\delta\Gamma^m_{ik} - b_{mk}\delta\Gamma^m_{ij}, \end{aligned} \tag{1}$$

де тензор $T_{lijk} = g_{ml}\delta R^m_{ijk} + \delta g_{ml}R^m_{ijk}$, для поверхонь ненульової гауссової кривини з точністю до Cg_{ij}, $C - const$, g_{ij} - метричний тензор поверхні, визначається тензорними полем $\delta\Gamma^h_{ij}$, яке повинно задовольняти умовам ([2]):

$$\delta R^{\alpha}_{\alpha kl} = 0 \tag{2}$$

δg_{ij}, δb_{ij}, $\delta\Gamma^h_{ij}$, δR^h_{ijk} -варіації першого, другого основних тензорів поверхні, рімановоїзв'язності та тензора Рімана відповідно, причому $\delta R^h_{ijk} = \delta\Gamma^h_{ik,j} - \delta\Gamma^h_{ij,k}$.

Теорема 1. *Для існування інфінітезимальної деформації поверхні в* $_3$*, гомеоморфній бінарній області* (x^1, x^2) *зміни параметрів, з заданою варіацією рімановоїзв'язності* $\delta\Gamma^h_{ij}$*, що задовольняє умовам (2), достатньо, щоб система (1) мала розв'язок відносно невідомого тензорного поля* δb_{ij} *в цій області.*

References

[1] І. В. Потапенко *Нові рівняння інфінітезимальних деформацій поверхонь в Е3.*,- Український математичний журнал/, Т.62, №2, (2010), С.199-202.

[2] І. В. Потапенко *Про відновлення варіації метричного тензора поверхні за заданою варіацією символів Крістоффеля другого роду при інфінітезимальних деформаціях поверхонь в евклідовому просторі Е3.*,- Український математичний журнал, Т.63, №4, (2011), С.523-530.

Теорія нескінченновимірних матричних алгебр і напівгруп в працях проф. А.К. Сушкевича.

О. М. Рябухо

(СДПУ, Слов'янськ, Україна)

E-mail address: `rom.olena@gmail.com`

Видатний український математик, професор Харківського університету Антон Казимирович Сушкевич є фундатором теорії напівгруп. Проте спектр наукових інтересів професора Сушкевича був значно ширшим: теорія напівгруп і напівгруп перетворень, квазігрупи і n-групи, теорія нескінченновимірних алгебр, обчислювальна математика, зокрема — інтервальна арифметика, історія математики, методика викладання математики.

У повідомленні пропонується аналіз циклу праць А.К. Сушкевича [1-5], які присвячені дослідженню алгебр і напівгруп нескінченновимірних матриць над фіксованим полем. Автор розглядає різні обмеження, які слід накласти на вигляд нескінченних матриць так, щоб можна було визначити дію множення на них. Таких обмежень вибирається кілька, а саме:

— розглядати лише (верхні або нижні) трикутні матриці;

— розглядати матриці, в яких кожна колонка і кожен рядок містять лише скінченне число ненульових елементів;

— розглядати матриці, ненульові елементи яких лежать у деякому (вертикальному або горизонтальному пасі скінченної ширини, але нескінченному;

— розглядати матриці, ненульові елементи яких містяться в деякому прямокутнику, тощо.

Інші типи обмежень вводяться для випадку, коли йдеться про матриці над полем $\mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$, і можна застосовувати теорію ортогональності в гільбертових просторах. В кожному з розглядуваних випадків виникають цікаві алгебри і напівгрупи.

Досліджуючи проблему характеризації дільників нуля в алгебрі верхніх трикутних матриць, А.К. Сушкевич звертає увагу на те, що ліві дільники нуля описуються дуже просто — це матриці, в яких є нулі на головній діагоналі, але для правих дільників нуля необхідно , щоб на діагоналі матриці стяла скінченна кількість нулів, якщо ж кількість нулів на діагоналі нескінченна, то така матриця може й не бути дільником нуля. В цій алгебрі характеризуються також двосторонні ідеали, описуються прості ідеали. Показано, що вона апроксимується нільпотентними алгебрами. Структура правих або лівих ідеалів досліджена для алгебри, в матрицях якої лише скінченне число рядків і колонок може містити ненульові елементи. Показано, що ця алгебра є напівпростою. Цікаві результати отримано для напівгупи так званих напівортогональних матриць тобто матриць, колонки або рядки) яких утворюють систему векторів, що доповнюється до ортонормованої системи у відповідному гільбертовому просторі.

Література

[1] Сушкевич А.К. *Обобщенные группы особенных матриц.*, - Записки Научно-исследовательского института математики и механики и Харьковского математического общества. Серия 4. (1939), т.16, С. 3 – 11.

[2] Сушкевич А.К. *О построении некоторых типов групп бесконечных матриц.*, Там же, (1948), т.19, С. 27 – 33.

[3] Сушкевич А.К. *О типе алгебр бесконечных матриц.* Там же, (1949), т. 21, С. 131-144.

[4] Сушкевич А.К. *О бесконечной алгебре треугольных матриц.*, Там же, (1950), т. 22, С. 77-93.

[5] Сушкевич А.К. *Теория обобщенных групп.*,- Харьков - Киев, ГНТИУ, (1937), 152 с.

Простори розмитих метрик

О. Г. Савченко

(Херсонський аграрний університет, Україна)

E-mail address: `Savchenko1960@rambler.ru`

Нижче ми використовуємо поняття розмитої метрики у формі, запропонованій у статті [1]. Нагадаємо, що t-нормою називають неперервну функцію $*\colon [0,1]\times[0,1]\to[0,1]$, що задовольняє умови: (1) $*$ асоціативна; (2) $a*1=a$ для всіх $a\in[0,1]$, (3) $a*b\le c*d$, якщо $a\le c$ і $b\le d$ для кожних $a,b,c,d\in[0,1]$.

Прикладами t-норм є $a*b=ab$ і and $a*b=\min(a,b)$.

Розмитим метричним простором називають упорядковану трійку $(X,M,*)$ таку, що X — непорожня множина, $*$ — неперервна t-норма і M — розмита множина на $X\times X\times(0,+\infty)$, що задовольняє умови для всіх $x,y,z\in X$, $s,t>0$: (i) $M(x,y,t)>0$; (ii) $M(x,y,t)=1$ тоді і лише тоді, коли $x=y$; (iii) $M(x,y,t)=M(y,x,t)$; (iv) $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,t+s)$; (v) функція $M(x,y,-)\colon(0,+\infty)\to(0,1]$ неперервна. Функцію M називають *розмитою метрикою* на X (стосовно $*$).

Через $\mathcal{F}(X)$ позначаємо множину всіх розмитих метрик на метризовному просторі X, сумісних з топологією простору X. Надалі вважаємо, що $*=\min$.

Множину $\mathcal{F}(X)$ наділяємо компактно-відкритою топологією (у функціональному просторі $C(X\times X\times(0,\infty),[0,1])$.

Теорема. Нехай X — нескінченний метризовний компакт. Тоді простір $\mathcal{F}(X)$ гомеоморфний сепарабельному гільбертовому просторові ℓ^2.

Доведення базується на характеризаційній теоремі Торуньчика для ℓ^2 (див. [2]). При цьому для доведення AR-властивості використовується існування на просторі $\mathcal{F}(X)$ аналога опуклої структури, запропонованого в [3].

Аналогічна теорема доведена також для розмитих ультраметричних просторів. Останні одержуються з розмитих метричних просторів заміною умови (iv) на умову (iv') $M(x,y,t)*M(y,z,s)\le M(x,z,\max(t,s))$.

References

[1] A. George, P. Veeramani, *On some results in fuzzy metric spaces.*, - Fuzzy Sets and Systems, 64 (1994), P. 395-399.

[2] H. Toruńczyk, *Concerning locally homotopy negligible sets and characterization of ℓ_2-manifolds.*, Fund. Math. 101(1978), P. 93-110.

[3] C. D. Horvath, *Extension and selection theorems in topological spaces with a generalized convexity structure.*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) 2 (1993), no. 2, P. 253-269.

Про нескінченно малі конформні деформації мінімальних поверхонь

Ю.С. Федченко

(Одеська національна академія харчових технологій, Одеса, Україна)

E-mail address: Fedchenko_ Julia@ukr.net

Розглянемо поверхню S класу C^3 в евклідовому просторі E_3 з векторно-параметричним рівнянням $\overline{r} = \overline{r}(x^1, x^2)$ та її деформацію S_ε: $\overline{r}_\varepsilon = \overline{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \overline{U}(x^1, x^2)$. Тут $\overline{U}(x^1, x^2)$ - вектор зміщення, ε - малий параметр.

Відомо [1],[2], що нескінченно малі конформні деформації характеризуються рівняннями $\delta g_{ij} = 2\varphi g_{ij}$, де φ - функція конформності, δg_{ij}- варіація коефіцієнтів першої квадратичної форми. Нехай похідна вектора зміщення матиме вигляд:

$$\overline{U}_i = c_{i\alpha}\left(\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} - \varphi c^{\alpha\beta}\right)\overline{r}_\beta + c_{i\alpha}T^\alpha \overline{n}, \qquad (1)$$

$\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} = \overset{0}{T}{}^{\beta\alpha}$, $c^{\alpha\beta}$-дискримінантний тензор, $c_{\alpha\beta}$-коваріантні компоненти дискримінантного тензора.

Знайдено нову форму основних рівнянь нескінченно малих конформних деформацій, яку представлено через тензорні поля похідної вектора зміщення, виділено тривіальний випадок, досліджено мінімальні поверхні.

Теорема 1. *Для того, щоб нескінченно мала деформація поверхні S $(K \neq 0)$ класу C^3 була конформною, необхідно і достатньо, щоб на поверхні існували функції t, φ, які задовольняють рівняння*

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) - \nabla_s(\varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta) + 2Ht = 0.$$

Тоді тензорні поля похідної вектора зміщення мають вигляд

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, T^s = t_\alpha d^{s\alpha} - \varphi_\alpha c^{\alpha\beta} d^s_\beta, t_i = \partial_i t, \varphi_i = \partial_i \varphi.$$

Теорема 2. *Нескінченно мала конформна деформація поверхні S $(K \neq 0)$ класу C^3 буде тривіальною тоді і лише тоді, коли на поверхні існує характеристична функція Вейнгартена t:*

$$\nabla_s(t_\alpha d^{s\alpha}) + 2Ht = 0.$$

Тоді тензорні поля мають представлення

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha\beta} = tg^{\alpha\beta}, T^s = t_\alpha d^{s\alpha}.$$

Теорема 3. *Мінімальні поверхні S $(H = 0, K \neq 0)$ класу C^3 допускають нетривіальні нескінченно малі конформні деформації при нульовій функції t.*

References

[1] Е.Д Фесенко. Бесконечно малые конформные деформации замкнутых поверхностей положительной гауссовой кривизны // Изв. вузов Матем. **3** (1969) 72–77.

[2] С.Г. Лейко, Ю.С. Федченко. Вектори зміщень для поворотно-конформних деформацій поверхонь обертання // Вісник ОДУ, серія "Фізико-математичні науки" **8** вип. 2 (2003) 50-54.

Место эвристической деятельности в процессе формирования геометрических понятий

О. В. Амброзяк

(Черкасский национальный университет им. Богдана Хмельницкого, Черкассы, Украина)

E-mail address: Olga27_1989@ukr.net

Рассмотрению вопросов формирования математических понятий, в том числе и геометрических, посвящены труды З.И. Слепкань, Г.П. Бевз, Н.А. Тарасенковой, В.В. Никитина, Л.А. Черных и других авторов. Принимая во внимание большое количество исследований по этому вопросу, следует отметить, что проблема формирования геометрических понятий посредством организации эвристической деятельности раскрыта недостаточно.

Целенаправленное формирование геометрических понятий в средней школе приходится на подростковый возраст. Важной особенностью которого, как отмечает Е.Е. Жумаев ([1]), являются предпосылки для формирования активного, самостоятельного, творческого мышления. В связи с этим для учеников 7 класса целесообразно организовывать именно эвристическую деятельность по формированию геометрических понятий.

Общие эвристические приемы основных общих умственных действий (анализ, синтез, сравнение, конкретизация, обобщение, абстрагирование и другие), специфические приемы (подведение под понятие и получение следствий), общие эвристические ориентиры (правила-ориентиры, эвристические схемы, стратегии), специфические эвристические приемы (нарисуй картинку, исследуй по частям, модифицируй, найди взаимосвязь между частями) позволяют осуществить полный анализ понятия и дать возможность каждому ученику самостоятельно принимать участие в процессе его открытия и исследования.

Е. И. Скафа ([2]) предлагает условно разбить процесс формирования геометрических понятий на четыре основных этапа (введение, усвоение, закрепление и применение), на каждом из которых рационально использовать определенные эвристические приемы.

Во время реализации этапов формирования геометрических понятий преимущество следует отдавать задачам на исследование, отыскание закономерностей, а также задачам, которые требуют для своего решения не столько знания теории, а нешаблонного, оригинального, эвристического мышления.

Методика формирования понятий должна носить эвристический характер, так как в форме пассивного восприятия учеником учебного материала невозможно сформировать у него крепкие знания, умения, а также развивать способность к творческой деятельности.

Включенность учеников в процесс эвристического конструирования и исследования понятий позволяет развивать личность, готовую самостоятельно добывать знания, находить оптимальные решения проблемных ситуаций, аргументировано отстаивать собственную позицию.

Таким образом, организация эвристической деятельности в процессе формирования геометрических понятий является действенным способом для развития творческой личности.

References

[1] Жумаев Е. Е. *Развитие творческого мышления учащихся в процессе решения геометрических задач*: дис. ... канд.пед. наук: 13.00.02 / Е. Е. Жумаев. - К.: НПУ им. Н.П. Драгоманова, 1997. - 163 с.

[2] Скафа Е. И. *Теоретико-методические основы формирования приемов эвристической деятельности при изучении математики в условиях внедрения современных технологий обучения*: дис. ... докт.пед. наук: 13.00.02 / Елена Ивановна Скафа. - К., 2004. - 479 с.

Вольтеровы узлы со строго-регулярными характеристическими матрицами функциями

З. Д. Арова

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: arova_zoya@mail.ru

Рассматриваются Вольтеровы J-узлы Лившица Бродского $\sum = [A, C; X, C^n]$. Здесь X - сепарабельное гильбертовое пространство, A, C, J - линейные ограниченные операторы

$$A : X \to X, \quad C : X \to C^n, \quad J : C^n \to C^n, \quad A - A^* = iC^*JC,$$

оператор A является Вольтеровым, то есть вполне непрерывным, с единственной точкой спектра $z = 0$ и оператор J является сигнатурным, т.е. самосопряжённым и унитарным. Известно, что характеристическая функция $W_\Sigma = I + izC(I - zA)^{-1}C^*J$ такого узла является целой J-внутренней в верхней полуплоскости C_+. Такой узел рассматривается в случае, когда его характеристическая функция W_Σ является сторого регулярной J-внутренней матрицей-функцией, т.е. такой, для которой соответствующее пространство де-Бранжа $H(W_\Sigma)$ есть замкнутое подпространство в L_2^n.

Пусть W_Σ является функцией экспоненциального типа с экспоненциальным ростом $a(W_\Sigma) = max\{a_+(W_\Sigma), a_-(W_\Sigma)\}$, где

$$a_+(W_\Sigma) = \overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln \|W_\Sigma(iy)\|}{y}, \quad a_-(W_\Sigma) = \overline{\lim_{y \to +\infty}} \frac{\ln \|W_\Sigma(-iy)\|}{y}$$

Тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть $\sum = [A, C; X, C^n]$- простой Вольтеров LB J-узел. Тогда для того, чтобы его характеристическая функция W_Σ являелась строго регулярной J-внутренней, $a_-(W_\Sigma) \neq 0$, $a_+(W_\Sigma) \neq 0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали диссипативные Вольтеровы LB J-узлы ($J = I$) $\sum_- = [A_-, C_-; X_-, C^n]$ и $\sum_+ = [A_+, C_+; X_+, C^n]$ такие, что*

$$A = R^{-1} \begin{pmatrix} A_+ & 0 \\ 0 & -A_- \end{pmatrix} R, \quad C = [C_+, C_-]R,$$

где R, R^{-1} -линейные ограниченные операторы, действующие между соответствующими сепарабельными гильбертовыми пространствами. Более того, в этом случае $(I - zA_+)^{-1}$ и $(I - zA_-)^{-1}$ являются целыми функциями экспоненциального типа и экспоненциального роста $a_-(W_\Sigma)$ и $a_+(W_\Sigma)$, соответственно.

О восьмимерных средних тканях Бола с единственной ненулевой компонентой тензора кривизны

М.В. Антипова

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: khnmar@rambler.ru

В [1] были классифицированы многомерные средние ткани Бола с единственной отличной от нуля компонентой тензора кривизны $b^1_{223} = const$, обобщающие один из классов шестимерных тканей Бола, найденных В.И. Федоровой в [2]. В докладе описываются основные классы восьмимерных тканей Бола с таким же условием на тензор кривизны. Такие ткани разбиты на 2 типа, причем с тканями первого типа связано некоторое характеристическое уравнение. Мы рассматриваем гиперболические и параболические ткани первого типа (корни характеристического уравнения вещественные и различные или совпадают) и ткани второго типа. Для каждого из указанных классов найдена соответствующая система структурных уравнений, а также уравнения координатной квазигруппы в некоторых локальных координатах. Например, получены структурные уравнения ткани параболического типа:

$$
\begin{aligned}
&d\underset{1}{\omega}^1 = \underset{1}{\omega}^2 \wedge \omega^1_2 + 2a^1_{12}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2 + 2a^1_{23}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3 + 2a^1_{24}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^4,\\
&d\underset{1}{\omega}^2 = 0, \qquad d\underset{1}{\omega}^3 = 0,\\
&d\underset{1}{\omega}^4 = 2\lambda^2 a^1_{24}\underset{1}{\omega}^1 \wedge \underset{1}{\omega}^2 + 2a^4_{23}\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^3 - 2(a^1_{12} + 2\lambda a^1_{24})\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{1}{\omega}^4,\\
&d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^2 \wedge \omega^1_2 - 2a^1_{12}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 - 2a^1_{23}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - 2a^1_{24}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^4,\\
&d\underset{2}{\omega}^2 = 0, \qquad d\underset{2}{\omega}^3 = 0,\\
&d\underset{2}{\omega}^4 = -2\lambda^2 a^1_{24}\underset{2}{\omega}^1 \wedge \underset{2}{\omega}^2 - 2a^4_{23}\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 + 2(a^1_{12} + 2\lambda a^1_{24})\underset{2}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^4,\\
&d\omega^1_2 = b(\underset{1}{\omega}^2 \wedge \underset{2}{\omega}^3 - \underset{1}{\omega}^3 \wedge \underset{2}{\omega}^2), \qquad da^1_{23} = \frac{b}{2}(\underset{1}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2).
\end{aligned}
$$

Уравнения координатной квазигруппы ткани параболического типа имеют вид:

$$
\begin{aligned}
z^1 &= x^1 + e^{x^2}(y^1 + x^3y^2 - x^2y^3)),\\
z^2 &= x^2 + y^2,\\
z^3 &= x^3 + y^3,\\
z^4 &= x^4 + e^{x^2}[y^4 - Cx^2y^1 - C(x^3y^2 - x^2y^3)(x^2 - 1)].
\end{aligned}
$$

Доказывается, что каждый класс тканей определяется соответствующей разрешимой четырехмерной алгеброй Ли.

Список литературы

[1] Антипова М.В. *О тканях Бола с почти нулевым тензором кривизны.* Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского, є26, 28-34 (2011)

[2] Федорова В.И. *Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a_{ij}.* Ткани и квазигруппы. Калинин.: Калининский гос. ун-т, 1981. С. 110-123

О геометрии векторных полей Киллинга

Ж. О. Аслонов

(НУУз, Ташкент, Узбекистан)

E-mail address: `jasurbek05@mail.ru`

Пусть M- гладкое связное риманово многообразие размерности n, X-гладкое векторное поле, $X^t(x)$-интегральная кривая,проходящая через точку x при $t = 0$.

Определение. Векторное поле X на M называется полем Киллинга, если инфинитезимальные преобразования $x \to X^t(x)$ являются изометриями.

Известное векторное поле на трёхмерной сфере S^3, касательное к расслоению Хопфа, является векторным полем Киллинга.

Из результатов работы Molino [1] и А. Нарманова [2] вытекает следующая теорема.

Теорема 1. Пусть D-семейство гладких векторных полей Киллинга,заданных на M. Предположим,что размерности орбит семейства D меньшее чем n. Тогда разбиение многообразия на орбиты является сингулярным римановым слоением.

Известно, что если длина векторного поля Киллинга постоянна на всем многообразии, то интегральные кривые являются геодезическими линиями. В общем случае интегральные кривые векторного поля Киллинга не обязаны быть геодезическими линиями.

Лемма. Интегральная кривая каждого гладкого векторного поля Киллинга на двумерном круговом цилиндре является геодезической линией.

Рассмотрим векторные поля Киллинга X и Y на единичной сфере $S^3 \subset R^4$,где:

$$X = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial w} - w\frac{\partial}{\partial z}, Y = z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} + w\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial w}. \tag{1}$$

Теорема 2. Векторные поля X, Y порождают сингулярное риманово слоение, регулярные слои которого является двумерными торами. Множество сингулярных слоев состоит из двух окружностей.

Следующая теорема даёт полную классификацию геометрий орбит векторных полей Киллинга в трёхмерном евклидовом пространстве.

Теорема 3. Пусть D – семейство векторных полей Киллинга в R^3. Тогда орбиты этого семейство порождают слоение F, которое имеет один из следующих 7 типов:

1) слоение F состоит из параллельных прямых;

2) слоение F состоит из концентрических окружностей, и прямой, которая является множеством центров.

3) слоение F состоит из винтовых линий, лежащих на концентрических круговых цилиндрах;

4) слоение F состоит из параллельных плоскостей;

5) слоение F состоит из концентрических сфер и точки (центр сфер);

6) слоение F состоит из концентрических круговых цилиндров и прямой (ось цилиндров);

7) слоение F имеет только один слой R^3.

References

[1] Molino P. Riemannian foliations//Progress in Mathematics Vol. 73, - Birkhuser Boston Inc. 1988.

[2] Narmanov A. On the transversal structure of controllability of sets symmetric control systems.//Differential Equations vol.32, 6, 1996. Translated from Differentsialnye Uravneniya,v. 32, 6, 1996. 780-783 pp.

О частном случае почти геодезических отображений первого типа

В. Е. Березовский, Й. Микеш

(Уманский национальный университет садоводства, Украина)

E-mail address: `berez.volod@rambler.ru`

(Palacky University, Olomouc, Czech Republic)

E-mail address: `josef.mikes@upol.cz`

Рассматриваются канонические почти геодезические отображения первого типа пространств аффинной связности $A_n \to \bar{A}_n$, характеризующиеся следующими уравнениями (см. [1]):

$$3P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha} + \delta^h_{(k}a_{ij)}, \tag{1}$$

где a_{ij} – некоторый симметрический тензор, запятой обозначается ковариантная производная в пространстве аффинной связности A_n.

Уравнения (1) сведены к замкнутой системе типа Коши в ковариантных производных относительно функций $P^h_{ij}(x)$, $a_{ij}(x)$. Установлено, что количество существенных параметров, от которых зависит общее решение такой системы.

В случае, когда тензор $a_{ij}(x)$ тождественно обращается в нуль, уравнения (1) принимают вид

$$3P^h_{ij,k} = -P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\alpha}. \tag{2}$$

Условия интегрируемости уравнений (2) имеют вид

$$-P^\alpha_{ij}R^h_{\alpha km} + P^h_{\alpha(i}R^\alpha_{j)km} = \frac{1}{9}\,(P^\beta_{\alpha m}P^\alpha_{(ij}P^h_{k)\beta} - P^\beta_{\alpha k}P^\alpha_{(ij}P^h_{m)\beta}).$$

Если пространство A_n плоское и отнесено к аффинным координатам, то решением уравнений (2) будет

$$P^h_{hh} = \frac{1}{x^h - c^h}, \quad h = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

а остальные компоненты тензора деформации будут равны нулю.

Приведен пример почти геодезического отображения первого типа, определяемого уравнениями (2), плоского пространства A_n на плоское пространство $\bar{A}_n$.

Пусть $x^1, x^2, \ldots, x^n$ и $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ аффинные координаты A_n и $\bar{A}_n$ соответсвенно. Точечное отображение

$$\bar{x}^h = \frac{1}{2}\,c^h_\alpha\,(x^\alpha - c^\alpha)^2 + x^h_o,$$

где c^h_i, c^h, x^h_o – некоторые постоянные, причем $x^h \neq c^h$, $\det|c^h_i| \neq 0$, определяет почти геодезическое отображение первого типа A_n на $\bar{A}_n$.

Тензор деформации таких отображений имеет структуру (3).

Выполнено при поддержке гранта Грантового Агентства Чешской Республики № P201/11/0356 .

References

[1] Н. С. Синюков *Геодезические оторажения римановых пространств.* – Наука, М. (2008), 256с.

[2] V. Berezovski, J. Mikeš *On special almost geodesic mappings of type π_1 of spaces with affine connection.* – Acta Univ. Palacki. Olomouc, Fac. Rerum Nat., Math. (2004), 21-26.

О групповых три-тканях с тривиальной сердцевиной

Г. Д. Гегамян

(Тверской госуниверситет, Тверь, Россия)

E-mail address: geg_geghamyan@yahoo.com

Пусть $W(r,r,r)$ – три-ткань, образованная на $2r$- мерном дифференцируемом многообразии $\mathcal{M}$ тремя слоениями

$$\lambda_1: \ x = const, \ \lambda_2: \ y = const, \ \lambda_3: \ z = f(x,y) = const,$$

где $x = (x^1, ..., x^r)$, $x \in X$, $y = (y^1, ..., y^r)$, $y \in Y$, $z = (z^1, ..., z^r)$, $z \in Z$, f – гладкая функция, $|\dfrac{\partial f}{\partial x}| \neq 0$ и $|\dfrac{\partial f}{\partial y}| \neq 0$ в каждой точке многообразия $\mathcal{M}$. Уравнение $z = f(x,y)$ определяет *локальную координатную квазигруппу* три-ткани $W(r,r,r)$. Переменные x, y и z допускают преобразования вида

$$\tilde{x} = \alpha(x), \quad \tilde{y} = \beta(y), \quad \tilde{z} = \gamma(z),$$

где α, β, γ – локальные диффеоморфизмы. Тройка (α, β, γ) называется *изотопическим преобразованием* [1].

Левая три-ткань Бола (ткань B_l) характеризуется замыканием всех достаточно малых левых конфигураций Бола (см. [1]). С другой стороны, локальная координатная квазигруппа ткани B_l изотопна левой лупе Бола. Напомним [1], что лупа (квазигруппа с единицей) является левой лупой Бола, если в ней выполняется левое тождество Бола: $(u \circ (v \circ u)) \circ w = u \circ (v \circ (u \circ w))$, где $(\circ)$ – операция в лупе.

Согласно [2], условию замыкания на три-ткани $W(r,r,r)$ конфигураций (B_l) соответствует тождество

$$f(a, f^{-1}(b, f(a,y))) = f(a * b, y), \quad a, b \in X, \quad y \in Y.$$

Операция $(*): \ X \times X \to X$, $c = a * b$, является квазигруппой и называется *сердцевиной* ткани B_l. Последняя изотопна левой лупе Бола, но не изотопна, вообще говоря, координатной квазигруппе три-ткани, см. [2]. Сердцевину три-ткани B_l, изотопную абелевой группе, будем называть *тривиальной*.

Пусть $W(r,r,r)$ – групповая три-ткань (ткань R), порождаемая r-мерной группой Ли $z = f(x,y)$. Так как групповая три-ткань является левой тканью Бола (см. [1]), то она порождает на базе X первого слоения λ_1 сердцевину, которая, в частности, может быть тривиальной. Доказана следующая

Теорема. *Групповая три-ткань R, порождаемая трехмерной группой Ли*

$$z^1 = x^1 + y^1, \ z^2 = x^2 + y^2, \ z^3 = x^3 + y^3 + x^2y^1 - x^1y^2,$$

является единственной шестимерной непараллелизуемой групповой тканью с тривиальной сердцевиной.

References

[1] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения* // монография/ Тверь, ТвГУ, 2010, 308 с.

[2] Толстихина Г.А. *Дифференциально-геометрические структуры на три-тканях, образованных слоениями разных размерностей* // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Совр. матем. и ее приложения. Темат. обзоры. Т. 124, Москва, 2010, с. 287-327.

Восстановление линейчатых поверхностей в многомерном евклидовом пространстве по заданному грассманову образу

В. А. Горькавый

(ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАН Украины, Харьков, Украина)

E-mail address: gorkaviy@ilt.kharkov.ua

Т. В. Матвиенко

(ХНУ им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина)

Доклад посвящен задаче о восстановлении подмногообразия F^n в евклидовом пространстве E^{n+m} по наперед заданному грассманову образу $\Gamma \subset G(n, n+m)$. Ранее эта задача решалась Ю.А. Аминовым, Д. Хоффманом и Р. Оссерманом, Дж. Вайнером, В.А. Горькавым при некоторых специальных значениях размерностей n, m и/или для некоторых специальных классов подмногообразий, хотя в общей постановке вопрос остается открытым, см. [1], [2], [3].

В докладе рассматривается грассманов образ ориентированных двумерных *линейчатых* поверхностей в E^{m+2}. Многообразие Грассмана $G(2, m+2)$ предполагается вложенным стандартным образом в единичную сферу $S^{N-1} \subset E^N$, $N = \frac{n(n-1)}{2}$, с помощью плюккеровых координат. Доказана

Теорема. *Пусть F^2 – регулярная ориентированная линейчатая поверхность в E^{m+2}. Если грассманов образ $\Gamma \subset G(2, m+2)$ поверхности F^2 не вырожден, то тогда Γ представляет собой линейчатую поверхность в сфере $S^{N-1} \subset E^N$. При этом, если прямолинейные образующие на F^2 являются полными, то тогда Γ заметается большими полуокружностями на $S^{N-1} \subset E^N$.*

Как следствие, невырожденный грассманов образ Γ полной (вдоль образующих) линейчатой поверхности в E^{m+2} однозначно задается в $G(2, m+2) \subset S^{N-1} \subset E^N$ двумя кривыми α и β, заметаемыми соответственно концами и серединами образующих полуокружностей поверхности Γ.

В докладе, как основной результат, будут представлены *условия на α и β, необходимые и достаточные для того, чтобы порождаемая кривыми α и β линейчатая поверхность Γ в $S^{N-1} \subset E^N$ лежала бы в $G(2, m+2)$ и представляла собой грассманов образ какой-либо линейчатой поверхности в E^{m+2}*.

Заметим также, что линейчатая поверхность в E^{m+2} восстанавливается по своему грассманову образу неоднозначно.

References

[1] Ю. А. Аминов *Геометрия подмногообразий.* - Киев: Наукова думка, (2002), 468 с.

[2] А. А. Борисенко, Ю. А. Николаевский *Многообразия Грассмана и грассманов образ подмногообразий.* - Успехи математических наук. 46: 2, (1991), С. 41-83.

[3] А. А. Борисенко *Внутренняя и внешняя геометрия многомерных подмногообразий.* - Москва: Экзамен, (2003), 672 с.

Синтетическое обобщение вырожденного преобразования Бэклунда

В. А. Горькавый, Е. Н. Невмержицкая

(ФТИНТ им.Б.И.Веркина, Харьков, Украина)

E-mail address: gorkaviy@ilt.kharkov.ua, nevmerzhitskaya@ilt.kharkov.ua

Доклад посвящен обобщению вырожденного преобразования Бэклунда на случай двумерных поверхностей в n-мерном евклидовом пространстве E^n.

Классическая теория преобразований Бианки-Бэклунда для двумерных псевдосферических поверхностей в пространствах постоянной кривизны E^3 (S^3, H^3) успешно обобщалась на случай n-мерных подмногообразий в $(2n-1)$-мерных пространствах постоянной кривизны в работах Ю.А. Аминова, К. Тененблат - Ч.-Л. Тернг, Л.А. Масальцева [1]. Открытым остается вопрос о возможности обобщения теории преобразований Бианки-Бэклунда на случай подмногообразий в пространствах постоянной кривизны с произвольным соотношением размерностей. В частности, интерес вызывает описание поверхностей в E^n (S^n, H^n), у которых преобразование Бианки-Бэклунда является вырожденным, как это имеет место, например, для поверхности Бельтрами (псевдосферы) в E^3. В работах [2]-[3] были описаны двумерные псевдосферические поверхности в n-мерном евклидовом пространстве с вырожденным преобразованием *Бианки*: оказалось, что каждая такая поверхность обязана быть так называемой обобщенной поверхностью Бельтрами. При этом построение преобразования опиралось на классическую конструкцию Л. Бианки с использованием орициклической системы координат на псевдосферической поверхности.

В докладе предполагается дать полное описание двумерных поверхностей в E^n, допускающих более общее, по сравнению с вырожденным преобразованием Бианки, вырожденное преобразование *Бэклунда*. При этом предлагается следующее синтетическое определение вырожденного преобразования Бэклунда для двумерных поверхностей в E^n, опирающееся на классическую конструкцию псевдосферической конгруэнции.

А именно, отображение φ поверхности F^2 в кривую γ в E^n назовем *вырожденным преобразованием Бэклунда*, если оно удовлетворяет трем требованиям:

1) для любой точки P на поверхности F и соответствующей ей точки $\tilde{P}$ на кривой γ, прямая $P\tilde{P}$ касается поверхности F;

2) длина отрезка прямой в E^n между точками P и $\tilde{P}$ постоянна, $|P\tilde{P}| \equiv l_0 > 0$;

3) угол ω между касательной плоскостью T_PF и плоскостью, натянутой на прямую $P\tilde{P}$ и касательную прямую $\dot{\gamma}(\tilde{P})$, постоянен, $\omega \equiv \omega_0 \neq 0$.

В общем случае доказан следующий аналог теоремы Бэклунда.

Теорема. *Предположим, что поверхность F^2 в E^n допускает вырожденное преобразование Бэклунда. Тогда F^2 имеет постоянную отрицательную гауссову кривизну $K \equiv -\frac{\sin^2 \omega_0^2}{l_0^2}$.*

В частном случае, когда $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$, имеет место

Теорема. *Поверхность F^2 в E^n допускает вырожденное преобразование Бианки ($\omega_0 = \frac{\pi}{2}$) тогда и только тогда, когда она является обобщенной поверхностью Бельтрами.*

References

[1] Ю.А. Аминов *Геометрия подмногообразий* . - К.: Наукова думка, 2002.

[2] В.А. Горькавый, Е.Н. Невмержицкая *О двумерных псевдосферических поверхностях с вырожденным преобразованием Бианки* . - Доповіді НАН України, (2010), № 6, С.13 - 18.

[3] Gorkavyy V., Nevmerzhitska O. *Pseudo-spherical submanifolds with degenerate Bianchi transformation.* - Results in Mathematics, 2011, V.60, №1, P.103 - 116.

Пространства аффинной связности регулярной гиперполосы расширенного неевклидового пространства

М. Ф. Гребенюк

(Национальный авиационный университет, г. Киев, Украина)

E-mail address: ahha@i.com.ua

Рассмотрены диффференциальные уравнения, которые задают регулярную гиперполосу относительно подвижного автополярного нормированного репера в проективном пространстве с заданной невырожденной гиперквадрикой [1].

Гиперполосою называем r-параметрическое многообразие таких плоских элементов (A, τ), для которых точка A описывает поверхность V_r, а гиперплоскость $\tau(A)$ касается поверхности V_r в соответствующих точках $A \in V_r$. Поверхность V_r называется базисною поверхностью гиперполосы, а гиперплоскости $\tau(A)$ – главными касательными гиперплоскостями гиперполосы. Гиперполоса называется регулярною, если характеристика и касательная плоскость базисной поверхности V_r гиперполосы в каждой точке $A \in V_r$ не имеют общих прямых.

С помощью компонент фундаментального геометрического объекта третьего порядка образующего элемента гиперполосы построен канонический пучек проективных прямых. Полученный инвариантный пучок позволяет построить инвариантный пучок нормалей первого рода, внутренним образом присоединенных к гиперполосе в дифференциальной окрестности третьего порядка ее образующего элемента.

Введен тензор, определяющий в дифференциальной окрестности третьего порядка образующего элемента оснащающие плоскости. Построенные плоскости позволяют получить пару двойственных аффинных связностей, ассоциированных с рассматриваемой гиперполосой. Двойственность определяется относительно преобразования по инволютивному закону. Получены тензоры кривизны-кручения ассоциированных пространств аффинных связностей.

В частности, вводятся в рассмотрение также и двойственные аффинные связности без кручения на регулярной гиперполосе. В отличие от других работ эти связности построены с помощью оснащения Э. Картана, причем оснащающие плоскости присоединены к гиперполосе внутренним инвариантным образом в диффернциальной окрестности второго порядка образующего элемента.

Полученные результаты дополняют общую теорию многообразий многомерных пространств и могут быть использованы в дальнейших исследованиях по теории полос многомерных аффинных и проективных пространств.

Литература

[1] М. Ф. Косаренко. *Поля геометрических объектов регулярной гиперполосы*. – Сб. научн. тр. Калинингр. ун-т. Калининград (1982), вып. 13, с. 38-44.

Системы ОДУ с нулевым тензором кривизны

А. А. Дуюнова

(Московский педагогический государственный университет, Москва, Россия)

E-mail address: `Duyunova_anna@mail.ru`

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i\left(t, x^j\right) \qquad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

С этой системой связана три-ткань $W(1, n, 1)$, заданная на многообразии переменных x^i, t, состоящая из семейств: $\lambda_1 : x^i = const$, $\lambda_2 : t = const$, $\lambda_3 : F^i(t, x^j) = c^i = const$, причем последнее семейство состоит из интегральных кривых системы уравнений (1).

Отметим, что три-ткани рассматриваются с точностью до локальных диффеоморфизмов на базах слоений, образующих ткань: $t = t(\tilde{t})$, $x^i = x^i(\tilde{x}^j)$ и $c^i = c^i(\tilde{c}^j)$, где c^i — константы интегрирования.

В работе [1] были получены структурные уравнения три-ткани $W(1, n, 1)$:

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega^u_v + \mu^u \omega^n \wedge \omega^{n+1}, \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \omega^n_u + \omega^n \wedge \omega^n_n, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega^n_n, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} d\omega^u_v &= \omega^w_v \wedge \omega^u_w + \mu^u \omega^n_v \wedge \omega^{n+1} + k^u_v \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \omega^w \wedge \omega^u_{vw}, \\ d\omega^n_u &= \omega^v_u \wedge \omega^n_v + \omega^n_u \wedge \omega^n_n + t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} - \omega^v \wedge \omega^n_{uv}, \\ d\omega^n_n &= \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega^n_u + t_u \omega^u \wedge \omega^{n+1} + t_n \omega^n \wedge \omega^{n+1}, \\ d\mu^u + \mu^v \omega^u_v - 2\mu^u \omega^n_n &= k^u_v \omega^v + k^u_n \omega^n + k^u_{n+1} \omega^{n+1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $u, v, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1$, а формы ω^n_{uv} и ω^u_{vw} симметричны по нижним индексам. Причем формы и компоненты тензоров $\{\mu^u\}$ и $\{t_u, t_n, k^u_v, k^u_n, k^u_{n+1}\}$, входящие в эти уравнения, выражаются через частные производные от функций, определяющих систему (1).

Теорема 1. *Уравнения* (2) *и* (3) *определяют на многообразии M аффинную связность без кручения тогда и только тогда, когда формы ω^n_u, ω^n_{uv} и ω^u_{vw} являются главными, то есть выражаются через базисные формы ω^u, ω^n и ω^{n+1}.*

Такие связности называются *совместимыми.* К системе дифференциальных уравнений (1) присоединяется совместимая аффинная связность, названная *канонической связностью* этой системы. Тензор кривизны этой связности назван *тензором кривизны системы ОДУ.*

Теорема 2. *Система ОДУ* (1) *с нулевым тензором кривизны имеет вид:*

$$\begin{aligned} \frac{dx^u}{dt} &= c^u_v(x^n) q(x^n) g(t) x^v + b^u(x^n, t), \\ \frac{dx^n}{dt} &= q(x^n) g(t), \end{aligned}$$

причем функции $b^u(x^n, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial b^u(x^n, t)}{\partial x^n} = b^v(x^n, t) c^u_v(x^n) + g(t) r^u(x^n),$$

где $r^u(x^n)$ — некоторые произвольные гладкие функции.

References

[1] А. А. Дуюнова *Три-ткани, определяемые системами обыкновенных дифференциальных уравнений.*, – Фундаментальная и прикладная математика, (2010), Т. 16, В. 2, С. 13-31.

О сохранении порядка уплощения индуцированным диффеоморфизмом

К. М. Зубрилин

(ОНУ им. И. И. Мечникова, Одесса, Украина)

E-mail address: zubrilin@rambler.ru

Изучение индуцированных отображений касательных расслоений восходит к работам К. Яно и Ш. Ишихара ([1]). В работах [2], [3] С. Г. Лейко рассматривал диффеоморфизмы, индуцированные геодезическими диффеоморфизмами, в рамках теории уплощенных (p-геодезических) отображений. При этом касательные расслоения рассматривались как аффинно-связные пространства относительно связности полного лифта и II-лифта. Случай связности горизонтального лифта рассмотрен в работе [4].

С другой стороны, как естественное обобщение случая геодезических отображений, возникает задача поиска условий, при которых r-геодезический диффеоморфизм базисных многообразий индуцирует r-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений. Случай $r = 1$ рассмотрен К. Яно и Ш. Ишихара; необходимым и достаточным условием является аффинность базисного диффеоморфизма, что равносильно обнулению его тензора аффинной деформации.

Теорема 1. *r-геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно-связных пространств (M, ∇) и $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ индуцирует диффеоморфизм $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$ касательных расслоений второго порядка, порядок уплощения которого m не меньше r, то есть $m \geqslant r$.*

Теорема 2. *Для того, чтобы r-геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно-связных пространств (M, ∇) и $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ индуцировал r-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений второго порядка $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$, достаточно чтобы выполнялось равенство* $S\left(P_r\right) = 0$.

Теорема 3. *Для того, чтобы 2-геодезический диффеоморфизм $\mu\colon M \to \bar{M}$ аффинно-связных пространств (M, ∇) и $\left(\bar{M}, \bar{\nabla}\right)$ индуцировал 2-геодезический диффеоморфизм касательных расслоений второго порядка $\mu_*\colon \mathbf{T}^2 M \to \mathbf{T}^2 \bar{M}$, необходимо и достаточно, что бы тензор P_2 2-ой аффинной деформации диффеоморфизма μ удовлетворял условию $S\left(P_2\right) = 0$.*

References

[1] Yano K. Tangent and cotangent bundles. Differential geometry / K. Yano, S. Ishihara. – New York: Marcel Dekker, 1973 – 434p.

[2] Лейко С. Г. Линейные p-геодезические диффеоморфизмы касательных расслоений высших порядков и высших степеней / С. Г. Лейко // Тр. Геометрич. семин. – Казань, 1982. – Вып. 14. – С. 34-46.

[3] Лейко С. Г. P-геодезические преобразования и их группы в касательных расслоениях, индуцированные геодезическими преобразованиями базисного многообразия / С. Г. Лейко // Математика. – 1992. - № 2. – С. 62-71. – (Известия вузов).

[4] Зубрілін К. М. P-геодезичні дифеоморфізми дотичних розшарувань із зв'язністю горизонтального ліфта, індуковані геодезичними (проективними) дифеоморфізмами баз / К.М.Зубрілін // Прикладні проблеми механіки і математики. – 2008. – Вип. 6. – С. 48-60.

λE-структуры

М. И. Кабанова

(МПГУ, Москва, Россия)

E-mail address: luinel@list.ru

Дается определение λE-структуры как G-структуры, порожденной группой G скалярных матриц.

Доказывается

Теорема 1. Задание λE-структуры на многообразии M равносильно заданию $n+1$ распределений коразмерности 1 на этом многообразии. При этом корепер ω^i на многообразии M можно выбрать так, что указанные распределения будут аннулироваться, соответственно, формами $\omega^i = 0$, $i = i, \ldots, n$, $\omega^1 + \ldots + \omega^n = 0$.

Теорема 2. Первая серия структурных уравнений λE-структуры на гладком многообразии M может быть записана следующим образом:

$$d\omega^i = \omega^i \wedge \theta + a^i_k \omega^i \wedge \omega^k + \sum_{k \neq i} \omega^k \wedge \omega^i_k, \tag{1}$$

В случае, когда все $n+1$ распределений интегрируемы, построенная конструкция представляет собой $(n+1)$-ткань в смысле В. В. Гольдберга [1].

Более детально рассматривается случай, когда $n = 3$, и 3 распределения интегрируемы.

References

[1] Goldberg V.V. *Theory of Multicodimensional (n+1)-Webs.*,- Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1988), 466p.

Конформные инварианты почти контактных метрических структур

В. Ф. Кириченко

(МГПУ, Москва, Россия)

E-mail address: highgeom@yandex.ru

Конформная геометрия играет важную роль в современных дифференциально-геометрических исследованиях. Напомним, что если $(M^n, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — риманово многообразие, то *конформным преобразованием* его римановой структуры g называется замена $g \to \tilde{g} = e^{-2\sigma} g$, где σ — гладкая функция на M, называемая *определяющей функцией* преобразования. Если $\sigma = \mathrm{const}$, конформное преобразование называется *тривиальным*, или *гомотетией*.

Хорошо известно, что любое конформное преобразование имеет инвариант — четырехвалентный тензор

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n-2}\{\langle r(Y), Z\rangle X + \langle Y, Z\rangle r(X) - \langle r(X), Z\rangle Y + \\ + \langle X, Z\rangle r(Y)\} + \frac{\varkappa}{(n-1)(n-2)}\{\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X\},$$

называемый *тензором Вейля конформной кривизны*. В случае, если риманово многообразие несет дополнительную структуру, на нем могут быть и другие конформные инварианты. Например, А.Грей и Хервелла доказали, что почти эрмитово многообразие $(M^{2n}, J, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ имеет еще один конформный инвариант — трехвалентный тензор

$$\mu(X,Y) = \nabla_X(J)Y + \frac{1}{n-2}\{\langle \xi, Y\rangle X + \langle \xi, JY\rangle JX - \langle X, Y\rangle \xi - \langle X, JY\rangle J\xi\}.$$

Пусть теперь $(M^{2n+1}, \xi, \eta, \Phi, g)$ — почти контактное метрическое (короче, AC-) многообразие. На нем внутренним образом определены 6 структурных тензоров B, C, D, E, F, G, которые, вместе со своими дифференциальными продолжениями, полностью определяют локальное строение AC-многообразия. Например, для многообразия Кенмоцу $B = C = F = D = G = 0$, $E = -\Phi^2$. Хорошо известно также, что имеет место каноническое разложение

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{L}$$

$C^\infty(M)$-модуля $\mathfrak{X}(M)$ в ортогональную прямую сумму подмодулей $\mathfrak{M} = \ker\Phi$ и $\mathfrak{L} = (\mathfrak{M})^\perp$ посредством проекторов $\mathfrak{m} = \eta \otimes \xi$ и $\mathfrak{l} = -\Phi^2$, соответственно.

Определение 1. *Конформным преобразованием AC-структуры* (ξ, η, Φ, g) называется замена $(\xi, \eta, \Phi, g) \to (\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\Phi}, \tilde{g})$, где $\tilde{\xi} = e^{\sigma}\xi$, $\tilde{\eta} = e^{-\sigma}\eta$, $\tilde{\Phi} = \Phi$, $\tilde{g} = e^{-2\sigma} g$.

Нами доказано, что

$$\begin{aligned}
&\tilde{B}(X,Y) = B(X,Y) - \frac{1}{2}\{\langle X, \Phi^2 Y\rangle \Phi^2 \operatorname{grad}\sigma - \langle X, \Phi Y\rangle \Phi(\operatorname{grad}\sigma) - \\
&\qquad - d\sigma(\Phi^2 X)(\Phi^2 Y) - d\sigma(\Phi X)(\Phi Y)\};\\
&\tilde{C}(X,Y) = C(X,Y);\\
&\tilde{D}(X) = e^{\sigma} D(X);\\
&\tilde{E} = e^{\sigma}(E(X) + d\sigma(\xi)(\Phi^2 X));\\
&\tilde{F}(X) = e^{\sigma} F(X);\\
&\tilde{G} = e^{2\sigma}(G - \Phi^2(\operatorname{grad}\sigma)).
\end{aligned}$$

Из этих соотношений вытекает

Теорема 1. *Тензор C является абсолютным конформным инвариантом. Тензоры D и F являются относительными конформными инвариантами.*

Нами выяснен геометрический смысл конформной инвариантности тензоров B, E и G. Именно, справедливы следующие результаты:

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

- *тензор B — абсолютный конформный инвариант;*
- *тензор G — относительный конформный инвариант;*
- *$grad\,\sigma \in \mathfrak{M}$.*

Теорема 3. *Тензор E является относительным конформным инвариантом тогда и только тогда, когда $grad\ \sigma \in \mathfrak{L}$.*

Кроме того, нами получены следующие результаты:

1. AC-структура косимплектического типа является косимплектической тогда и только тогда, когда при каноническом конформном преобразовании она переходит в структуру Кенмоцу.

2. AC-структура косимплектического типа является структурой Кенмоцу тогда и только тогда, когда при каноническом конформном преобразовании она переходит в косимплектическую структуру.

3. AC-структура косимплектического типа при конформном преобразовании переходит в AC-структуру косимплектического типа тогда и только тогда, когда выполняется, по крайней мере, одно из трех равносильных условий Теоремы 2.

4. Нормальная AC-структура при конформном преобразовании переходит в нормальную AC-структуру тогда и только тогда, когда $\operatorname{grad}\sigma \in \mathfrak{M}$.

Римановы метрики с заданными произведениями главных кривизн Риччи

В. Н. Кокарев

(Самарский госуниверситет, Самара, Россия)

E-mail address: ko1949@yandex.ru

Пусть M – n-мерное риманово многообразие с метрикой g и тензором Риччи r. Главные кривизны Риччи $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ это эстремумы отношения $\dfrac{r_{ij}\xi^i\xi^j}{g_{ij}\xi^i\xi^j}$. При этом $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = r_{ij}g^{ij}$ – скалярная кривизна многообразия M. Вопрос о существовании римановых метрик с заданной скалярной кривизной рассматривался Дж. Л. Кажданом и Ф. У. Уорнером, например, в [1] и в цикле статей из той же книги.

Можно также поставить вопрос о существовании римановых метрик с заданным произведением главных кривизн Риччи. Однако, как показано также в [1], задача в такой постановке, вообще говоря, неразрешима даже для двумерных многообразий, для которых кривизна Риччи совпадает с гауссовой кривизной K. Дж. Л. Каждан и Ф. У. Уорнер доказали для двумерного компактного многообразия M существование такого диффеоморфизма $\varphi\colon M \to M$, для которого существует метрика g с гауссовой кривизной $K \circ \varphi$, если знак K согласован с топологией M.

С помощью этой идеи доказана

Теорема 1. *Пусть на сфере S^n задана положительная регулярная функция F. Тогда на S^n существует метрика g, конформная стандартной, и диффеоморфизм $\varphi\colon S^n \to S^n$, такие, что главные кривизны Риччи метрики g положительны и удовлетворяют уравнению $\lambda_1 \cdots \lambda_n = F \circ \varphi$.*

References

[1] Дж. Л. Каждан, Ф. У. Уорнер *Скалярная кривизна и конформная деформация римановой структуры.*,- Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, (1980), С. 81-108.

Проективные инварианты плоских кривых

Н. Г. Коновенко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: konovenko@ukr.net

В работе Альфена ([1]) был найден первый проективный дифференциальный инвариант J для плоских кривых. Этот инвариант имеет порядок 7 и пропорционален, так называемой, проективной кривизне кривой.

Мы показываем, что алгебра всех проективных дифференциальных инвариантов плоских кривых порождена проективной кривизной J и всеми ее производными Штуди ([2]) $\frac{d^kJ}{d\sigma^k}$.
Этот результат применяется к проективной классификации кривых следующим образом.
Скажем, что плоская кривая проективно регулярная, если инвариант J может быть выбран в качестве локальной координаты на этой кривой.
Для регулярных кривых производная Штуди $\frac{dJ}{d\sigma}$ является функцией от инварианта J. То есть,

$$\frac{dJ}{d\sigma} - \Phi(J) = 0$$

для некоторой функции Φ.

Полученные соотношения можно рассматривать, как дифференциальные уравнения восьмого порядка на плоские кривые. Размерность его пространства локальных решений равна 8, а само пространство является орбитой кривой относительно группы проективных преобразований плоскости.

Таким образом класс проективной эквивалентности регулярных кривых однозначно описывается функцией Φ.
Полученный результат применяется к проективной классификации следующих кривых:
W-кривые Ли-Клейна ([3]), кубики и экстремали функционала проективной длины ([5]).
В первом случае мы показываем, что W-кривые являются кривыми постоянной проективной кривизны, которая и задает проективный класс W-кривой.
Для кубик мы повторяем известный результат Вейерштрасса, о том, что их проективный класс описывается одним параметром.
Для функционала Штуди, или так называемого функционала проективной длины, мы показываем, что проективный класс экстремалей описывается двумя параметрами.

Заметим, что W-кривые - описываются дифференциальными уравнениями 8 порядка, кубики - дифференциальными уравнениями 9 порядка, а экстремали Штуди, которые являются эктстремалями функционала 5 порядка, - дифференциальными уравнениями 10 порядка.

References

[1] G. H. Halphen *Sur les invariants différentiels.*,- Paris: Gauthier-Villars, (1878).

[2] F. Klein, W. Blaschke *Vorlesungen über höhere Geometrie.*,- Berlin, J. Springer, (1926).

[3] F. Klein, S. Lie *Uber diejenigen ebenen Curven, weiche aurch ein geschlossenes System von einfach unedlich veilen vertauschbaren linearen Transformationen in sich ubergehen.*,- Math. Annalen, Vol. 4, (1871), P. 50-85.

[4] N. G. Konovenko, V. V. Lychagin *On projective classification of plane curves.*,- // Global and Stochastic Analysis, Vol. 1, No. 2, (2011), P. 241-264.

[5] E. J. Wilczynski *Interpretation of the symplest integral invariant of projective geometry.*,- Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 2, No. 4, (1916), P. 248-252.

О геометрии торсообразующих векторных полей на почти эрмитовых многообразиях

В.М. Кузаконь, А.С. Барзик

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: `kuzakon_v@ukr.net`

Пусть M — риманово многообразие с римановой структурой $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$, ∇ — риманова связность. Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется *торсообразующим*, если существуют гладкая функция $\rho \in C^{\infty}(M)$ и дифференциальная 1-форма $a \in \mathfrak{X}(M)^*$, такие, что

$$\nabla \xi = \rho \cdot id + a \otimes \xi.$$

Торсообразующее векторное поле ξ называется *спецконциркулярным*, если $a = 0$, т.е. $\nabla \xi = \rho \cdot id$. Пусть (g, J) — почти эрмитова структура на M, $J^2 = -id$, $\langle JX, JY \rangle = \langle X, Y \rangle$.

Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется *голоморфным*, если структурный эндоморфизм J инвариантен относительно действия локальной однопараметрическпй группы диффеоморфизмов, порожденной полем ξ.

Теорема 1. *Торсообразующее векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_{\xi}(J)X = a(JX)\xi - a(X)J\xi; \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Напомним, что интегрируемая почти зрмитова структура с замкнутой фундаментальной формой $\Omega(X, Y) = \langle X, JY \rangle$ называется *келеровой структурой.*

Теорема 2. *Пусть (M, g, J) — келерово многообразие. Торсообразующее векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ голоморфно тогда и только тогда, когда ξ — спецконциркулярное векторное поле.*

Специальные оснащения, индуцирующие плоские связности на поверхности в проективном пространстве

А. В. Кулешов

(БФУ им. И. Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: `arturkuleshov@yandex.ru`

В проективном пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность S_m ($2 \leq m < n$) как семейство касательных плоскостей $T_m(A)$, где A – текущая точка поверхности. Такое семейство является особым случаем общего семейства центрированных плоскостей, и к нему применимы результаты работы [1]. А именно, композиционное оснащение λ поверхности полями нормалей 2-го рода $N_{m-1}(A) = [B_i]$ и плоскостей Картана $C_{n-m-1}(A) = [B_a]$ индуцирует в главном расслоении $G(S_m)$, ассоциированном с этой поверхностью, трехпараметрическую связку фундаментально-групповых связностей: $\Gamma(\xi, \eta, \zeta) = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma_{ij}(\xi), \Gamma^i_{aj}(\eta), \Gamma_{ai}(\xi, \eta, \zeta)\}$, $i, \ldots \overline{1, m}$; $a, \ldots \overline{m+1, n}$.

Смещение базисных точек оснащающих плоскостей определяется тензорами подвижности t_{ij}, t^i_{aj}, t_{aj} оснащающих плоскостей и фундаментальным тензором 1-го порядка Λ^a_{ij} поверхности S_m:

$$dB_i = (\ldots)^j_i B_j + (t_{ij}A + \Lambda^a_{ij}B_a)\omega^j, \quad dB_a = (\ldots)^b_a B_b + (t_{ai}A + t^j_{ai}B_j)\omega^i,$$

где ω^i – базисные формы поверхности. Альтернированные пфаффовы производные компонент тензоров подвижности имеют вид:

$$t_{i[jk]} = \Gamma^m_{i[j}t_{mk]} - \Lambda^a_{i[j}t_{ak]}, \quad t^i_{a[jk]} = t^m_{a[j}\Gamma^i_{mk]} + \Gamma^b_{a[j}t^i_{bk]} - \delta^i_{[j}t_{ak]}, \quad t_{a[ij]} = t_{k[i}t^k_{aj]} + \Gamma^b_{a[i}t_{bj]}. \tag{1}$$

Компоненты тензора кривизны $R(\xi, \eta, \zeta)$ индуцированной связки связностей выражаются по следующим формулам (ср. [1]):

$$R^i_{jkm} = \Lambda^a_{j[k}t^i_{am]} - \delta^i_{[k}t_{jm]} - \delta^i_j t_{[km]}, \quad R^a_{bij} = -\Lambda^a_{k[i}t^k_{bj]} - \delta^a_b t_{[ij]},$$
$$R_{ijk}(\xi) = R^m_{ijk}\lambda_m + \xi\Lambda^a_{i[j}t_{ak]}, \quad R^i_{ajk}(\eta) = -R^i_{jkm}\lambda^m_a + R^b_{ajk}\lambda^i_b + \eta\delta^i_{[j}t_{ak]}, \tag{2}$$

$$R_{aij}(\xi, \eta, \zeta) = R^b_{aij}\lambda_b - R_{kij}(\xi)\lambda^k_a + (\zeta - \xi\eta)t^k_{a[i}t_{kj]} + \eta\lambda_k\delta^k_{[i}t_{aj]}.$$

Из (1) и (2) следует: $t^i_{aj} = 0$, $t_{ij} = 0 \Rightarrow R(\xi, \eta, \zeta) = 0$.

Теорема 1. *Для того, чтобы любая связность связки* $\Gamma(\xi, \eta, \zeta)$ *была плоской, достаточно, чтобы плоскость Картана* C_{n-m-1} *смещалась в нормали 1-го рода* $N_{n-m} = C_{n-m-1} \oplus A$, *а нормаль* N_{m-1} *– в гиперплоскости Бортолотти* $P_{n-1} = C_{n-m-1} \oplus N_{m-1}$.

Из (1_2) следует, что в силу $m > 1$ обращение в нуль тензора t^i_{aj} влечет обращение в нуль t_{ai}. Поэтому в условиях теоремы 1 плоскость Картана оказывается неподвижной, что с учетом смещения нормали N_{m-1} в гиперплоскости P_{n-1} дает неподвижность данной гиперплоскости (ср. [2]).

References

[1] Кулешов А.В. *Кривизна индуцированных фундаментально-групповых связностей семейства центрированных плоскостей в проективном пространстве*, – Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. Серия: физ. - мат. науки. – Пенза, (2011). № 26. С. 111–120.

[2] Полякова К.В. *Параллельные перенесения на поверхности проективного пространства*, – Фундаментальная и прикладная математика, (2008). Том 14, № 2. С. 129–177.

Метрики $2FI$-плоских 3-параболически келеровых пространств.

И. Н. Курбатова, М. Хаддад

(ОНУ, Одесса, Украина)

E-mail address: `k _ irina@te.net.ua`

В [1] мы исследовали $2F$-планарные отображения ($2F\Pi O$)
$f : K_n \to \overline{K}_n$ 3-параболически келеровых пространств $K_n(g_{ij}, F_i^h)$ и $\overline{K}_n(\overline{g}_{ij}, \overline{F}_i^h)$ с метриками g_{ij} и $\overline{g}_{ij}$ и аффинорными структурами F_i^h, $\overline{F}_i^h$, соответственно. При этом были выделены специальные типы $2F\Pi O$, названные каноническими I и II типа. Основные уравнения канонических $2F\Pi O$ I типа в общей по отображению системе координат (x^i) имеют вид:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^h(x) = \Gamma_{ij}^h(x) + \psi_{(i}(x)F_{j)}^h(x) + \phi_{(i}(x)F_{i)}^\alpha(x)F_\alpha^h(x),$$

$$F_i^h(x) = \overline{F}_i^h(x), \quad F_\alpha^h F_\beta^\alpha F_i^\beta = 0,$$

$$g_{i\alpha}F_j^\alpha + g_{j\alpha}F_i^\alpha = 0, \quad \overline{g}_{i\alpha}\overline{F}_j^\alpha + \overline{g}_{j\alpha}\overline{F}_i^\alpha = 0,$$

$$F_{i,j}^h = 0, \quad Rg\|F_i^h\| = 2m = \frac{2n}{3}, n = 3m,$$

где Γ, $\overline{\Gamma}$ - объекты связности пространств K_n, $\overline{K}_n$ соответственно; ψ, ϕ - некоторые ковекторы, "," - знак ковариантной производной в пространстве K_n.

Как обычно, мы называем $2FI$-плоскими пространства K_n, допускающие каноническое I типа $2F\Pi O$ на плоское $\overline{K}_n = E_n$. Доказаны теоремы:

Теорема 1. *3-параболически келерово пространство K_n ($n \geq 9$) является $2FI$-плоским тогда и только тогда, когда его тензор Римана имеет вид*

$$R_{hijk} = CF_{h[k}^2 F_{j]i}^2,$$

где C - некоторая константа, $F_{hk}^2 = g_{h\alpha}F_\beta^\alpha F_k^\beta$.

Теорема 2. *$2FI$-плоское 3-параболически келерово пространство K_n ($n \geq 9$) по необходимости является симметрическим и Риччи-плоским.*

Для симметрических римановых пространств П.А.Широков получил формулу, позволяющую восстановить метрический тензор в окрестности некоторой точки $M(x_0) \in V_n$.

Используя эту формулу и учитывая Теорему 1 , получим компоненты метрического тензора 2FI-плоского 3-параболически келерова пространства K_n
($n = 3m \geq 9$) в виде

$$g_{ij} = \overset{\circ}{g}_{ij} - \frac{C}{24}(y_\alpha \overset{\circ}{F}{}_\beta^\alpha \overset{\circ}{F}{}_i^\beta y_\gamma \overset{\circ}{F}{}_\delta^\gamma \overset{\circ}{F}{}_j^\delta - \tilde{y}\overset{\circ}{g}_{i\alpha}\overset{\circ}{F}{}_\beta^\alpha \overset{\circ}{F}{}_j^\beta)$$

$$\text{где } y_i = y^\alpha \overset{\circ}{g}_{\alpha i}, \quad \tilde{y} = y_\alpha y_\beta \overset{\circ}{F}{}_\delta^\alpha \overset{\circ}{F}{}_\gamma^\beta \overset{\circ}{g}{}^{\delta\gamma},$$

$\overset{\circ}{g}_{ij}$, $\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}$,$\overset{\circ}{F}{}_i^h$ - значения компонент метрического, обратного ему и структурного тензоров в точке x_0, (y^h) - римановы координаты с началом в точке x_0.

References

[1] И. Н. Курбатова, М.Хаддад. $2F$-планарные отображения римановых пространств со специальной аффинорной структурой// Тезисы докладов международной конференции "Геометрия в Одессе - 2010", 2010, с. 29.

О построении суперсимметричных космологических моделей

А. В. Аминова, М. Х. Люлинский

(ОНАПТ, Казань, Россия)

E-mail address: Asya.Aminova@ksu.ru

miklul@rambler.ru

Суперсимметрия была открыта независимо физиками в СССР (ФИАН), Западной Европе и США. Суперсимметрия объединяет частицы со смежными спинами, например, 1 и 1/2 , включая в одно семейство бозоны и фермионы. Замечательно, что суперсимметрия связала инвариантность относительно преобразований Пуанкаре, т. е. пространственно – временных преобразований с внутренними симметриями. Благодаря этому возникла новая теория тяготения – супергравитация и теория суперструн, которая является сейчас главным кандидатом на роль единой теории, объединяющей все фундаментальные взаимодействия. Данная работа посвящена построению суперсимметричных космологических моделей в рамках последовательного суперсимметричного подхода, развитого в работах А. В. Аминовой и С. В. Мочалова (см., например, ([1])). Последовательный суперсимметричный подход в теории гравитации означает, что супергеометрия определяется суперсимметричными свойствами. Этот подход требует развития инвариантно – групповых методов супергравитации. В этом направлении не только не было получено конкретных результатов, но и также не были сформулированы сами принципы, которые должны лежать в основе связи между суперсимметрией и супергеометрией. Первые шаги в этом направлении были сделаны в уже упоминавшихся работах А. В. Аминовой и С. В. Мочалова. Данная работа развивает это направление. Мы рассматриваем суперсимметрию как автоморфизм супергеометрической структуры, в частности, как инфинитезимальные суперпреобразования оставляющие неизменной метрику суперпространства. Метрика определяется как инвариант супергруппы преобразований в духе Кляйновской программы, идея которой заключается в рассмотрении симметрии, или группы преобразований как основы определения геометрии пространства. В данной работе инвариантно – групповой метод супердифференцальной геометрии применяется к физически значимому случаю сферически симметричного мира. Предпринята попытка дополнить существующую ранее классическую космологическую модель пространств дополнительными степенями свободы. В дальнейшем это должно привести к учёту спиновых поправок в космологических вычислениях. Мы наделяем пространство суперсимметричными свойствами, вводя переменные Грассмановой алгебры, называемые также суперчислами. Два суперчисла антикоммутируют, и квадрат каждого из них равен нулю. Мы рассматриваем кольцованное пространство Грассмановых алгебр над сферически симметричным пространством. Это – суперпространство. Вычислены связность, тензор Римана и тензор Риччи сферического суперпространства.

References

[1] А. В. Аминова, М. Х. Люлинский, С. В. Мочалов *Сферически симметричное суперпространство* .,- Новейшие проблемы теории поля. Казань, (1998), С. 223-230.

[2] Д. А. Лейтес *Введение в теорию супермногообразий.*,- // УМН,1980, т.35, вып.1(211) (1980).

[3] Ф. А. Березин *Метод вторичного квантования.*,- М.: Наука, (1965).

[4] Daniel S. Freed *Five lectures on supersymmetry.*,- ASM, (1999).

Жесткость замкнутых выпуклых полиэдров

А. Д. Милка

(АОЗТ "GST", ФТИНТ им. Б.И. Веркина НАНУ, Харьков, Украина)

E-mail address: `milka@ilt.kharkov.ua`

Вдохновение нужно в поэзии,
как и в геометрии
А.С. Пушкин

Излагается оптимально обобщенная Теорема единственности для замкнутых выпуклых полиэдров в классических пространствах. Доказательства основываются на элементарной Лемме о деформациях полигонов. Для евклидова случая эта Теорема, и неявно - Лемма, формулируются в Определениях 10 и 9 книги XI "Начал" издания Гэйберга. Это издание "Начал" признано историками как ближайшее к оригиналу. Известные Теорема о конгруэнтности замкнутых выпуклых полиэдров с конгруэнтными гранями и Лемма об изгибаниях выпуклых полигонов, доказанные в евклидовом случае Лежандром и Коши, есть частный вариант цитированных Определений, поскольку геометры пользовались другим, упрощенным, если не искаженным списком "Начал". Общая Теорема в "Началах" следует из Определения 9. А Определение 9 доказывалось греками по наглядной схеме, изложенной А.Д. Александровым в "Выпуклых многогранниках" – с постулированием для сферы Теоремы Жордана.

Лемма. Даны одинаково составленные неконгруэнтные замкнутые выпуклые полигоны в евклидовой, сферической или гиперболической плоскости. Пусть у полигонов одни соответствующие элементы, стороны или углы, являются равными, другие соответствующие элементы, углы или стороны, являются неравными. Отметим неравные элементы знаками "плюс", если эти элементы на одном полигоне большие, чем сопоставленные им элементы на другом полигоне, и знаками "минус", если эти элементы меньшие. Тогда – в евклидовом случае в варианте равными принимаются углы и площади полигонов – при обходе каждого из полигонов будет не менее четырех перемен знаков.

Теорема. Одинаково составленные замкнутые выпуклые полиэдры в евклидовом пространстве, у которых соответствующие плоские углы равны, а соответствующие грани имеют равные площади, полиэдры в сферическом или гиперболическом пространствах, у которых соответствующие плоские углы равны, и пространственно-подобные полиэдры в пространстве де Ситтера, у которых соответствующие плоские углы равны, конгруэнтны.

Естественны вопросы, подобные тем, которые занимали геометров в XIX и XX столетиях.

Возможны ли нетривиальные деформации замкнутых полиэдров, дискретные или непрерывные, с сохранением плоских углов и площадей граней?

Каковы инварианты этих деформаций, сохраняется ли объем полиэдров?

Есть ли аналоги цитируемой Теоремы для общих или регулярных выпуклых поверхностей и предложений о деформациях для регулярных невыпуклых поверхностей?

References

[1] Д.Д. Мордухай-Болтовской. *Начала Евклида, кн. XI-XV.* - М.-Л.: Гостехиздат, 1950, 332 с.

[2] А.Д. Милка. *Неопознанная египетская геометрия.* - Proc. Int. Geom. Center, (2008), Т.1, № 1-2, С.97 - 115.

[3] А.Д. Милка. *Истоки и содержание аксиоматики "Начал".* - Proc. Int. Geom. Center, (2009), Т.2, № 3, С.41 - 54.

Теорема достижения для гамильтоновых систем, связанных с системами Дирака

М. А. Нудельман

(Одесский национальный морской униварситет, Одеса, Україна)

E-mail address: mark@te.net.ua

На основе леммы о матричной факторизации (см. [1]), доказана теорема достижения.

Теорема 1. *Для всякого фиксированного не равного нулю вещественного значения спектрального параметра λ и всякой J-унитарной матрицы W с единичным определителем существует гамильтониан $H(t)$ такой, что матрица W есть матрица монодромии гамильтоновой системы вида*

$$dx(t)/dt = i\lambda JH(t)x(t)$$

на некотором промежутке времени $[0, T]$, причём сигнатурная матрица J и гамильтониан $H(t)$ отвечают некоторой системе Дирака.

References

[1] M. Nudelman *On the matrix factorization which is connected with the Dirac systems.*,- Abstracts of snternational conference "Geometry in Odessa-2007", (2007), P.149-150.

О геометрии сингулярных слоений, порожденных поверхностями уровня

Г. Х. Каипназарова, А. Я. Нарманов

(Нукусский Педагогический институт,Каракалпакистан
Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан)

E-mail address: narmanov@yandex.ru

Пусть M – гладкое риманово многообразие размерности n, $f : M \to R^1$ – дифференцируемая функция. Предположим, что длина градиента функции f постоянна на компонентах связности каждой поверхности уровня. Известно, что в этом случае поверхности уровня порождают сингулярное риманово слоение на M. Слоение F на римановом многообразии M называется римановым, если каждая геодезическая, ортогональная в некоторой своей точке к слою слоения F, остаётся ортогональной во всех своих точках к слоям F. Римановы слоения без особенностей впервые были введены и изучены Рейнхартом [1]. Этот класс слоений естественным образом возникает при изучении расслоений и поверхностей уровня.

В работах [2],[3],[4] изучена геометрия поверхностей уровня при выполнении вышеприведенного предположения.

Следующая теорема дает информации о топологии многообразии M.

Теорема 1. Пусть M – гладкое полное односвязное риманово многообразие, функция f не имеет критических точек. Тогда поверхности уровня являются взаимно диффеоморфными некомпактными подмногообразиями.

Следующие теоремы показывают связь между геометрией M и свойствами функции f.

Теорема 2. Каждая градиентная линия функции f является геодезической линией риманова многообразия M.

Напомним, что траектория системы дифференциальных уравнений

$$\dot{p} = gradf(p) \qquad (1)$$

называется градиентной линией функции f.

Теорема 3. Пусть M – гладкое полное связное многообразие размерности n, функция f не имеет критических точек. Тогда многообразие M диффеоморфно прямому произведению $L \times R^1$,где L – произвольная поверхность уровня функции f. В частности, все поверхности уровня взаимно диффеоморфны.

Теорема 4. Пусть $M = R^n$ и каждая компонента связности множества критических точек функции fявляется регулярной поверхностью. Тогда каждая поверхность уровня функции f является поверхностью постоянной гауссовой кривизны.

References

[1] Reinhart B. Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math. 69 (1959), 119-132.

[2] Каипназарова Г., Нарманов А.Я. Топология слоений, порожденных поверхностями уровня. //Узбекский математический журнал. -Ташкент, 2008. - №2. - С. 53-60.

[3] Нарманов А., Каипназарова Г. Метрические функции на римановых многообразиях. //Узбекский матем. журнал. - Ташкент, 2010. - №1. - С. 11-20.

[4] Нарманов А., Бойтураев А. О геометрии римановых слоений. Вестник НУУз, - Ташкент, 2010. -№3. - С.143-147.

Поиски новой физики на LHC путем применения концепции производной категории

Т.В. Обиход

(Институт ядерных исследований НАНУ, Киев, Украина)

E-mail address: obikhod@kinr.kiev.ua

Поиски новой физики на LHC мотивировали построение Теории Великого Объединения (ТВО) в рамках F-теории [1]. Минимальная суперсимметричная стандартная модель (МССМ) [2] является низкоэнергетическим приближением струнной теории. Для построения МССМ модели из суперструнной теории используем концепцию производной категории [3]:

• D-брана ассоциируется с локально свободным пучком ;

• открытая струна от одной D-браны (пучок E) к другой D-бране (пучок F) представляется элементом группы $\mathrm{Ext}^q(E, F)$;

• категория D-бран является производной категорией когерентных пучков $D(X)$;

• если X и Y являются зеркальными трифолдами Калаби-Яу, то категория $D(X)$ эквивалентна триангулированной категории $\mathrm{Tr}\mathcal{F}(Y)$;

• D-браны на орбифолде $\mathbb{C}/G$ и открытые струны между ними описываются производной категорией квиверов МкКея.

Мы используем производную категорию выделенных треугольников над абелевой категорией квиверов МкКея [3]. Объектами этой категории являются выделенные треугольники, морфизмами - морфизмы выделенных треугольников. В контексте Минимальной суперсимметричной стандартной модели построены гистограммы распределения масс суперчастиц $\tilde{q}_R$ и $\tilde{g}$. Путем применения компьютерных программ SOFTSUSY, SDECAY и PYTHIA посчитаны массы, ширины распадов и сечения рождения суперчастиц. Эти данные дают конкретные предсказания для поиска суперпартнеров на LHC.

References

[1] C. Beasley, J.J. Heckman and C. Vafa. GUTs and exceptional branes in F-theory-I// arXiv:0802.3391 [hep-th].

[2] H.E. Haber. Introductory low-energy supersymmetry // arXiv: hep-ph/9306207.

[3] P.S. Aspinwall. D-branes on Calabi-Yau manifolds // arXiv: hep-th/0403166.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ СОВПАДЕНИЯ СВЯЗНОСТЕЙ 1-ГО И 2-ГО ТИПОВ НА СЕМЕЙСТВЕ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ, ОБОБЩАЮЩЕМ ПОВЕРХНОСТЬ

О. М. Омельян

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта,
Калининград, Россия)

E-mail address: olga_omelyan2002@mail.ru

Будем рассматривать m-мерное семейство B^p_m центрированных m-плоскостей $L_m(L_m \bigcap T_m = L_p,\ 0 < p < m)$. Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, \dots = \overline{1,n};\ i, \dots = \overline{1,p};\ \alpha, \dots = \overline{p+1,m};\ a, \dots = \overline{m+1, 2m-p};\ u, \dots = \overline{2m-p+1,n}.$$

Уравнения семейства B^p_m имеют вид [1]. С этим семейством ассоциировано главное расслоение $G(B^p_m)$, в котором задана групповая связность с объектом Γ, причем дифференциальные уравнения на компоненты этого объекта найдены в [1].

В работе [1] произведено композиционное оснащение семейства B^p_m, определяемое точками B_i, B_α, B_a, B_u и показано, что оно индуцирует связности 1-го и 2-го типов. Целью данной работы является получение аналитических условий совпадения связностей обоих типов.

Введем следующие обозначения:

$$t_{ij} = \lambda_{ij} - \Lambda^a_{ij}(\lambda_a - \lambda^k_a\lambda_k) - \Lambda^\alpha_{ij}(\lambda_\alpha - \lambda^k_\alpha\lambda_k) - \Lambda^u_{ij}(\lambda_u - \lambda^a_u\lambda_a - \lambda^\alpha_u\lambda_\alpha - \lambda^k_u\lambda_k + \lambda_k\lambda^a_u\lambda^k_a + \lambda_k\lambda^\alpha_u\lambda^k_\alpha) - \lambda_i\lambda_j,$$

$$t_{i\alpha} = \lambda_{i\alpha} - \Lambda^a_{i\alpha}(\lambda_a - \lambda^j_a\lambda_j) - \Lambda^\beta_{i\alpha}(\lambda_\beta - \lambda^j_\beta\lambda_j) - \Lambda^u_{i\alpha}(\lambda_u - \lambda^a_u\lambda_a - \lambda^\beta_u\lambda_\beta - \lambda^j_u\lambda_j +$$
$$+\lambda_j\lambda^\beta_u\lambda^j_\beta + \lambda_j\lambda^a_u\lambda^j_a) + 2\lambda_i\lambda_j\lambda^j_a, \dots$$

где дифференциальные сравнения на компоненты объекта t имеют вид:

$$\Delta t_{ij} \equiv 0,\ \Delta t_{i\alpha} - t_{ij}\omega^j_\alpha \equiv 0, \dots$$

Из этих сравнений и им аналогичных следует, что объект t является тензором, который назовем тензором неспециальных смещений, содержащим ряд подтензоров.

Сопоставим формулы охватов для компонент объектов связностей 1-го и 2-го типов $\overset{1}{\Gamma}_{ij} = \overset{2}{\Gamma}_{ij}$, откуда получим, что равенство $\overset{1}{\Gamma}_{ij} = \overset{2}{\Gamma}_{ij}$ выполняется тогда и только тогда, когда $t_{ij} = 0$. Аналогично получаем, что $\overset{1}{\Gamma}_{i\alpha} = \overset{2}{\Gamma}_{i\alpha}$ тогда и только тогда, когда $t_{i\alpha} = 0$.

Итак, $\overset{1}{\Gamma} = \overset{2}{\Gamma}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия $t_{ij} = 0, t_{i\alpha} = 0, \dots$ Полученные аналитические условия совпадения связностей можно геометрически охарактеризовать, если обратиться к выражениям для дифференциалов точек B_i, а именно

$$dB_i = (\dots)^j_i B_j + (\dots)^a_i B_a + (\dots)^\alpha_i B_\alpha + (\dots)^u_i B_u + (t_{ij}\omega^j + t_{i\alpha}\omega^\alpha)A.$$

Теорема 1. *Совпадение групповых связностей 1-го и 2-го типов семейства B^p_m эквивалентно неподвижности оснащающих плоскостей $P_{p-1}, P_{m-p-1}, P^*_{m-p-1}, P_{n-2m+p-1}$, где плоскость $P_{p-1} \subset L_p$ и не проходит через центр A этой плоскости, плоскость $P_{m-p-1} \subset L_m$ не пересекается с плоскостью L_p, плоскость $P^*_{m-p-1} \subset T_m$ не пересекается с L_p и плоскость $P_{n-2m+p-1} : P_{n-2m+p-1} \bigcap (T_m + L_m) = \varnothing$.*

Список литературы

[1] Омельян О.М. *О связности 1-го типа, индуцированной на семействе центрированных плоскостей, обобщающем поверхность*, Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, №40. С. 94 – 103 (2009)

Финслерово обобщение структуры Римана-Картана

В. И. Паньженский

(ПГПУ имени В.Г. Белинского, Пенза, Россия)

E-mail address: `geometry@spu-penza.ru`.

Как хорошо известно (см, например, обзорную статью [1]) структура Римана-Картана задается двумя дифференциально- геометрическими объектами: (псевдо) римановой метрикой и связностью с кручением, согласованной с этой метрикой.

Различные варианты построения теории поля с необходимостью приводят к учету кручения, например, в теории компенсаций (гравитационное поле ОТО как калибровочное, электромагнитное поле как компенсирующее, ковариантная производная спинора как компенсирующая и т.п.). С другой стороны имеются теории поля основанные на финслеровой геометрии. При этом привлекаются как специальные финслеровы метрики (Рандерса, Кропиной, Мацумото - (α, β)-метрики), так и специальные метрики финслерова типа.

Имея в виду оба эти подхода, мы предлагаем финслерово обобщение структуры Римана-Картана, в которой риманова метрика заменяется на финслерову (или метрику финслерова типа), а усеченная связность Картана заменяется аналогичной связностью с кручением. Приводится пример такой структуры. Метрика в этом примере получается из римановой с помощью некоторой финслеровой деформации, а связность возникает как деформация связности Картана с помощью финслерова тензора специального вида [2].

References

[1] Гордеева И.А., Паньженский В.И., Степанов С.Е. *Многообразия Римана-Картана.*,- Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. - Москва, (2009), Том 123, С. 110-141.

[2] Паньженский В.И. *Финслерово обобщение структуры Римана-Картана.*,- // Известия ПГПУ имени В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. Раздел математика. - Пенза, (2011),N26 С. 136-140.

ПРИБЛИЖЕНИЕ 2-ГО ПОРЯДКА ДЛЯ РИМАНОВА ПРОСТРАНСТВА НЕНУЛЕВОЙ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Покась С.М., Цехмейструк Л.Г.

(Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова, ИМЭМ, Одесса, Украина)

E-mail address: `pokas@onu.edu.ua`

For Riemannian space V_n nonzero constant curvature $K \neq 0$ space $\tilde{V}_n^2$, realizing second degree approximation for V_n is built. Some its properties are considered.

Рассмотрим риманово пространство V_n, отнесенное к произвольной системе координат $\{x^1, ..., x^n\}$ и ассоциированное в окрестности его произвольной точки пространство 2-го порядка $\tilde{V}_n^2$ ([1]):

$$\tilde{g}_{ij}(y) = \underset{0}{g_{ij}} + \frac{1}{3} \underset{0}{R_{i\alpha\beta j}} y^\alpha y^\beta \tag{1}$$

где $\underset{0}{g}_{ij} = g_{ij}(M_0)$, $\quad \underset{0}{R_{i\alpha\beta j}} = R_{i\alpha\beta j}(M_0)$.

Известно ([1]), что пространство реализует приближение 2-го порядка для исходного V_n в окрестности точки ${}_0$ и поэтому отражает свойства V_n с определенной степенью точности.

Имеет место:

Теорема 1. Элементы $\tilde{g}^{ij}(y)$ пространства $\tilde{V}_n^2$ имеют вид limi

$$\tilde{g}^{ij}(y) = \underset{0}{g}^{ij} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k t^{(k)ij}, \tag{2}$$

причем ряды (2) сходятся абсолютно и равномерно на множестве

$$\left| t_k^h \right| < \frac{3}{n},$$

здесь $t_k^h = \frac{1}{3} \underset{0}{R}{}^h_{.\alpha\beta k} y^\alpha y^\beta$,

$$t_k^{(p)h} = t_\alpha^{(p-1)h} t_k^\alpha \quad (p = 2,\ 3,\ ...)$$

Справедлива

Теорема 2. Для пространства $\tilde{V}_n^2$, ассоциированного с римановым пространством V_n ненулевой постоянной кривизны $K \neq 0$ элементы $\tilde{g}^{ij}(y)$ обратной матрицы для $\|\tilde{g}_{ij}(y)\|$ имеют вид

$$\tilde{g}^{ij}(y) = \frac{\underset{0}{g}^{ij} - \frac{K}{3} y^i y^j}{1 - \frac{K}{3} \underset{0}{g}_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta} \tag{3}$$

Для $\tilde{V}_n^2$, ассоциированного с римановым пространством V_n ненулевой постоянной кривизны найдена связность, построен тензор кривизны.

В качестве примера рассматривается сфера S_2 в евклидовом E_3. Получено приближение 2-го порядка для $\tilde{S}_2^2$, подсчитана полная кривизна $\tilde{K}_n$, найдены геодезические линии на $\tilde{S}_2^2$.

Література

1. С.М. Покась «Группы Ли движений в римановом пространстве второго приближения» Известия Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского, физико-математические науки, № 26, 2011, стр. 173-183.

Компоненты пространства общих функций на римановом диске

А. О. Пришляк, Н. В. Лукова-Чуйко

(КНУ, УДУФМТ, Киев, Украина)

E-mail address: prishlyak@yahoo.com, lukova@ukr.net

Обозначим через B – замкнутый круг (двухмерный диск) с заданной на нем римановой метрикой. Пусть $f : B \to \mathbf{R}$ – гладкая функция без критических точек на B.

Под особыми точками будем понимать критические точки ограничения функции на край (далее просто критические точки) и точки, в которых поле градиента касается края (касательные точки). Мы будем рассматривать только функции, у которых все особые точки имеют разные значения и не существует траектории соединяющей две особые точки. Такие функции будем называть общими.

Гомотопия общих функций – это путь в пространстве общих функций, т.е. непрерывное семейство общих функций. При этом каждой функции соответствует своя риманова метрика.

Пусть число критических точек равно k, а особых – n. На множестве особых точек введем нумерацию. Первой точкой будет точка минимума, при движении по краю против часовой стрелки номер точки возрастает. Каждой особой точке поставим в соответие номер критического значения по возростанию. Так точка минимума имеет номер 1, а максимума – номер n. Таким образом получим подстановке из n чисел.

Кроме того для каждой особой точки, из которой выходит траектория поля градиента, поставим в соответствие особую точку, предшествующую точке, в которой эта траектория покидает круг. Таким образом получим набор упорядоченых пар номеров.

Схемой фунции называется набор состоящий из подстановки из n чисел и упорядоченных пар номеров.

По подстановке можно определить тип особой точки. Если значение функции в соседних точках больше значения особой точки, то она есть локальным минимумом, если больше – максимумом. Остальные особые точки – точки касания.

Теорема *(критерий гомотопности функций).* Две общие функции $f, g : B \to \mathbf{R}$ будут гомотопны тогда и только тогда, когда схема одной совпадает со схемой другой функции.

References

[1] Кудрявцева Е.А. Связные компоненты пространств функций Морса с фиксированными критическими точками. Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика, в печати (2011). arXiv:1007.4398.

[2] Maksymenko S.I.. Path-components of Morse mappings spaces of surfaces. Comment. Math. Helv. 80 (2005), 655-690.

[3] Шарко В. В. Функции на поверхностях, I // *Некоторые проблемы современой математики.* Праці Інституту математики НАН України. — Киев: Ин-т. математики НАН Украины, 1998. — Т. 25. – С. 408–434.

[4] Polulyakh E., Yurchuk I. On the pseudo-harmonic functions defined on a disk // Праці Інституту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2009. — P. 151.

Мера Хаусдорфа многомерного каркаса Серпинского I типа в евклидовом пространстве

Ю. С. Резникова

(Институт математика НАН Украины, Киев, Украина)

E-mail address: yurss@mail.ru

Определение 1. ([1], [2]) *Непустое компактное множество E метрического пространства $\{M, \rho\}$ называется однородным самоподобным фрактальным множеством, если*

$$\begin{cases} E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i, \ \ n > 1, \\ E_i \overset{k_i}{\sim} E, \ \ 0 \ < \ k_i \ < \ 1, \ \ i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Рассмотрим фрактальную линию ${}_{ms}SCar^{(n)}$, названную автором многомерным каркасом Серпинского I типа.

Свойство 1. *С точки зрения геометрической структуры $n-$мерный каркас Серпинского I типа, $n \ \geq \ 2$, является ограниченным самоподобным фрактальным множеством, представляющим собой объединение $(n \ + \ 1)$ конгруэнтных и подобных целому неперекрывающихся частей с коэффициентом подобия* $1/2$:

$${}_{ms}SCar^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i, \ E_i \overset{1/2}{\sim}_{ms} SCar^{(n)}.$$

Очевидно, многомерный каркас Серпинского I типа есть однородное самоподобное фрактальное множество в смысле определения (1).

Свойство 2. *Топологическая размерность $n-$мерного каркаса Серпинского I типа, $n \geq 2$, равна единице.*

Свойство 3. *Размерность Хаусдорфа-Безиковича $n-$мерного каркаса Серпинского I типа, $n \geq 2$, равна*: $\alpha_0({}_{ms}SCar^{(n)}) = \log_2(n+1)$.

Свойство 4. *Мера Хаусдорфа $n-$мерного каркаса Серпинского I типа в $n-$мерном евклидовом пространстве, $n \geq 2$, равна*:

$$H_n(\alpha; 2)\Big({}_{ms}SCar^{(n)}\Big) = \begin{cases} +\infty, \ \ \alpha < \alpha_0, \\ \frac{1}{n!}\sqrt{\frac{n+1}{2^n}}, \ \ \alpha = \alpha_0 = \log_2(n+1), \\ 0, \ \ \alpha > \alpha_0. \end{cases}$$

References

[1] А. А. Кириллов *Повесть о двух фракталах.*, - М., МЦНМО, (2010), 179с.

[2] М. В. Працьовитий *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів.*, - К., НПУ ім. М.П.Драгоманова, (1998), 298с.

Хронологические и причинные гомеоморфизмы

А. Н. Романов

(ОмГУ, Омск, Россия)

E-mail address: aroms@yandex.ru

Работа посвящена рассмотрению пространств, наделенных лоренцевой метрикой. Проведено исследование связи так называемых причинных и хронологических гомеоморфизмов пространства-времени, т.е. гомеоморфизмов, сохраняющих причинное и хронологическое будущее любой точки.

Лоренцева метрика на пространстве формирует так называемые хронологическую и причинную структуру пространства-времени. Так, например, хронологическим будущим произвольной точки является множество точек, лоренцево расстояние до которых от начальной точки является числом строго положительным.

Гомеоморфизм двух многообразий $f : M \to M'$ будем называть *хронологическим,* если для любой точки $x \in M$ выполняется равенство:

$$f(I_x^+) = I_{f(x)}^+$$

Гомеоморфизм будем называть *причинным,* если для любой точки $x \in M$ выполняется равенство:

$$f(J_x^+) = J_{f(x)}^+$$

Имеет место следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть (M, g) и (M', g')– два пространства-времени, в которых множества причинного будущего J_p^+, $J_{p'}^+$ замкнуты для всех точек $p \in M, p' \in M$. Тогда, если $f : M \to M'$– хронологический гомеоморфизм, то f одновременно является и причинным гомеоморфизмом.*

Обозначим через $C(M, g)$ обозначен класс лоренцевых метрик на многообразии M, глобально конформных метрике $g : g' \in C(M, g) \Leftrightarrow g' = \Omega g$ для некоторой гладкой функции $\Omega : M \to (0, \infty)$. Говорят, что точка $q \in M$ *конечно недостижима* причинными кривыми, выходящими из точки p, если любую окрестность U_q точки q можно достичь причинными кривыми, выходящими из точки p, но в то же время для любого числа $N > 0$ существует окрестность U_q точки q такая, что риманова длина любой причинной кривой γ_{pU}, начинающейся в p и заканчивающейся внутри окрестности U_q, больше числа $N : L_0(\gamma_{pU}) > N$.

Лоренцево многообразие отнесём к классу A, если в нем не выполняется одновременное наличие и явления конечной недостижимости и явления захвата причинных кривых компактным множеством.

Используя приведенную терминологию, можно сделать следующее утверждение:

Теорема 2. *Пусть (M, g) и (M', g') – два причинных пространства-времени класса A, удовлетворяющих условию конечности лоренцевой функции расстояния для всех метрик, глобально конформных данным. Тогда, если $f : M \to M'$ – хронологический гомеоморфизм, то f является гладким конформным преобразованием.*

References

[1] Дж. Бим , П. Эрлих. Глобальная лоренцева геометрия – М.: Мир, (1985).

[2] А. Романов Отображения пространства-времени и условия причинности // Тезисы докладов конференции по Анализу и Геометрии. ИМ СО РАН. Новосибирск. (2004) 219.

Об аффинной интерпретации преобразований Бэклунда

А. К. Рыбников

(МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия)

E-mail address: `arybnikov@mail.ru`

Впервые преобразования Бэклунда возникли в работах Л. Бианки (1879 г.), С. Ли и А. Бэклунда (1880 г.) как соответствия между двумя поверхностями 3-мерного евклидова пространства, заданные системой дифференциальных уравнений специального типа, содержащей две неизвестные функции двух переменных (каждая из которых является решением наперед заданного дифференциального уравнения) и их частные производные. В 1894 г. Г. Дарбу первым заметил, что преобразования Бэклунда можно с самого начала рассматривать не как соответствия между поверхностями евклидова пространства, но как преобразования решений дифференциальных уравнений. Вместе с тем и сейчас выходят работы, в которых преобразования Бэклунда рассматриваются как преобразования поверхностей. Однако до сих пор нет работ, в которых преобразования Бэклунда интерпретируются как преобразования поверхностей в пространстве, отличном от евклидова пространства (в частности, в аффинном пространстве).

Наш доклад посвящен аффинной интерпретации отображений Бэклунда (преобразования Бэклунда являются частным случаем отображений Бэклунда) для дифференциальных уравнений 2-го порядка с неизвестной функцией двух аргументов. В настоящей работе мы ограничиваемся рассмотрением так называемых отображений Бэклунда класса 1 (см. [1]). Решения дифференциального уравнения представляются в виде поверхностей аффинного пространства, на которых индуцирована связность определяющая представление нулевой кривизны [2]. Как известно (см., например, [1, 3]), связности,определяющие представления нулевой кривизны для заданного дифференциального уравнения, порождают отображения Бэклунда для этого уравнения.

В работе установлено, что в случае, когда дифференциальное уравнение с частными производными 2-го порядка допускает отображение Бэклунда класса 1, для каждого решения уравнения найдется конгруэнция прямых в аффинном пространстве, образованная касательными к аффинному образу решения. Эта конгруэнция представляет собой аффинный аналог параболической конгруэнции в евклидовом пространстве. Отображение Бэклунда можно интерпретировать как преобразование поверхностей аффинного пространства, при котором аффинный образ решения дифференциального уравнения отображается в ту или иную из граничных поверхностей конгруэнции.

References

[1] А. К. Рыбников *Отображения Бэклунда с точки зрения теории связностей* .,- Ученые записки Казанского университета. Физ.-мат.науки. – 2009. – Т. 151, кн. 4. – С. 93-115.

[2] А. К. Рыбников *О специальных связностях, определяющих представления нулевой кривизны для эволюционных уравнений второго порядка* .,- Известия вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 32-41.

[3] А. К. Рыбников *Отображения Бэклунда и преобразования Ли-Бэклунда как дифференциально-геометрические структуры* .,- Фундаментальная и прикладная математика. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 135-150.

Многочлены для объемов пирамид в пространствах постоянной кривизны [1]

И. Х. Сабитов

(Москва, МГУ; Ярославль, ЯрГУ)

E-mail address: `isabitov@mail.ru`

Многогранник P называется *пирамидой*, если в нем есть вершина, соединенная ребром с каждой из остальных вершин. Назовем такую точку *вершиной* пирамиды. Это определение распространяется на пирамиды любой размерности. Показывается, что в R^3 существуют пирамиды любого топологического типа, в том числе и неориентируемые. Для ориентированных симплициальных многогранников в $R^n, n \geq 3$, известно понятие обобщенного объема многогранника как суммы объемов ориентированных тетраэдров с некоторой общей вершиной O и с основаниями на гипергранях многогранника, значение которого не зависит от выбора точки O. см. [1]. Мы распространяем это понятие на пирамиды в сферическом и гиперболическом пространствах. Примем за точку O вершину пирамиды. Тогда для обобщенного объема V имеем формулу

$$V = \varepsilon_1 |V_1| + ... + \varepsilon_k |V_k|, \tag{1}$$

где k – число гиперграней пирамиды, $\varepsilon_i |V_i| = V_i, 1 \leq i \leq k$, а V_i -ориентированный объем n-мерного тетраэдра с основанием на i-й гиперграни рассматриваемой пирамиды. У этих тетраэдров известны длины всех ребер, поэтому известны их объемы, но знаки значений объемов могут быть разными в зависимости от конфигурации пирамиды в пространстве при известных длинах ее ребер. Для того, чтобы получить многочлен объема, нужно исключить неопределенные значения ε_i. Это делается элементарными преобразованиями и мы приходим к теореме:

Теорема 1 *Для всех изометричных между собой пирамид с данным комбинаторным строением и с данными значениями длин ребер существует многочлен*

$$Q(V) = V^{2N} + a_1 V^{2N-2} + ... + a_{N-1} V^2 + a_N, \tag{2}$$

такой, что квадрат обобщенного объема любой пирамиды из рассматриваемого семейства является корнем этого многочлена $Q(V)$, коэффициенты которого в свою очередь являются многочленами от величин V_i^2 как от переменных.

Отметим, что степень $2N$ многочлена $Q(V)$ равна 2^p, где $p = k - m$, а m равно числу гиперграней, инцидентных вершине пирамиды. Например, в случае трехмерного пространства $p = n - 3 + 2g$, где n – число вершин многогранника, а g – его топологический род. Если рассматриваются пирамиды рода 0 в R^3, тогда все корни V^2 многочлена действительно являются объемами 2^{p-1} пирамид, так что тогда степень многочлена является наименьшей возможной степенью для многочлена объема. В евклидовом случае объемы V_i^2 выражаются в явном виде как многочлены от квадратов длин ребер тетраэдра, и получается известный многочлен объема многогранника как обобщение формулы Герона-Эйлера. В сферическом и гиперболическом пространствах такой формулы для объема тетраэдров нет, но тем не менее объемы тетраэдров известны по более сложным формулам и мы тоже получаем в этих пространствах многочлен объема в несколько другом виде. чем в евклидовом случае.

Список литературы

[1] И. Х. Сабитов *Алгебраические методы решения многогранников.* // Успехи математических наук, 66:3 (2011), с. 3-66.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению є 220, договор є 11.G34.31.0053 и гранта РФФИ 10-01-91000АНФ

О некоторых 4-мерных нелоренцевых многообразях, допускающих проективные движения.

Г. А. Серякин

(КФУ, Казань, Россия)

E-mail address: George.Seryakin@ksu.ru

Работа посвящена исследованию 4-мерных нелоренцевых многообразий нулевой сигнатуры, обладающеих симметриями в форме проективных движений. С каждым проективным движением связана сохраняющаяся величина, которая остается постоянной вдоль каждой 4-геодезической и определяет закон сохранения.

Для того, чтобы векторное поле X было проективным движением, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$(L_X G_{AB})_{;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A}, \tag{1}$$

здесь $A, B = [1, ..., 4]$, $L_X G_{AB}$– производная Ли метрики G_{AB} в направлении проективного движения X, φ есть 1-форма, и точка с запятой означает ковариантное дифференцирование относительно метрики G_{AB}. Уравнения (1) разбиваются на две группы: уравнения Эйзенхарта

$$h_{AB;C} = 2G_{AB}\varphi_{;C} + G_{AC}\varphi_{;B} + G_{BC}\varphi_{;A} \tag{2}$$

и обобщенные уравнения Киллинга

$$(L_X G_{AB})_{;C} = h_{AB} \tag{3}$$

Метрики, допускающие нетривиальные решения $h_{AB} \neq cG_{AB}$ уравнений Эйзенхарта, называются h-метриками, а соответствующие пространства — h-пространствами.

В работе рассматривается случай, когда сигнатура тензора G_{AB} нулевая. При помощи метода косонормального репера А. В. Аминовой [1] были получены h-метрики указанного типа и исследована их структура.

References

[1] А. В. Аминова, *Проективные преобразования псевдоримановых многообразий*, М.: "Янус-К", 2003.

О голоморфно-проективных отображениях "в целом" келеровых пространств при некоторых условиях дифференциально-алгебраического характера

Е. Н. Синюкова

(Южноукраинский национальный педагогический университет имени К.Д. Ушинского, Одесса, Украина)

E-mail address: Marbel@ukr.net

Основные уравнения теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств рассматриваются в виде линейной системы дифференциальных уравнений в ковариантных производных, первого порядка, типа Коши ([1], [2]).

С использованием известной теоремы Грина([3],[4]) с помощью ограничений на знакоопределенность алгебраических форм, коэффициенты которых содержат ковариантные производные тензоров Римана, Риччи, скалярной кривизны, выделены новые классы в целом голоморфно-проективно однозначно определенных келеровых пространств.

В частности доказаны

Теорема 1. Компактные, с положительно определенной метрикой келеровы C^r-пространства K^n $(n > 2, r > 4)$, в которых квадратичная относительно симметричного дважды контравариантного тензора b_{ij} форма

$\mathrm{b}_{\alpha\beta} b_{\gamma\sigma} R^{\alpha\gamma\sigma\beta}_{\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,,}$, $\mathrm{R}^{\alpha\beta\ \ \gamma}_{\cdot\ \cdot\ ,\cdot\gamma}\eta_\alpha\eta_\beta$ неположительна, в целом не допускают нетривиальных голоморфно-проективных отображений.

Теорема 2. Компактные келеровы C^r-пространства $K^n(n > 2, r > 4)$, в которых форма

$$(2R^{\gamma}_{\cdot\alpha,\beta\gamma} - 3R_{\alpha\beta,\cdot\gamma}^{\ \ \ \ \gamma})\eta^\alpha\eta^\beta$$

строго знакоопределена, в целом не допускают нетривиальных голоморфно-проективных отображений.

Приведены примеры келеровых пространств, удовлетворяющих условиям данных теорем.

References

[1] Домашев В.В. Микеш Й. К теории голоморфно-проективных отображений келеровых пространств, Матем. заметки, 1978, 28, №2, с.297-303.

[2] Синюков Н.С. Геодезические отображения римановых пространств, М., Наука, 1979.

[3] Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии, т.I, М., Наука, 1981.

[4] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти, М.: ИЛ, 1957.

Связность Картана в обобщенном лагранжевом пространстве со специальной метрикой

О. П. Сурина

(ПГПУ имени В.Г. Белинского, Пенза, Россия)

E-mail address: `geometry@spu-penza.ru`.

Пусть M - гладкое n - мерное многообразие, TM - касательное расслоение над M, $\pi : TM \to M$ - каноническая проекция, $x \to (x^i)$ - локальные координаты на M, $z = (x, y) \to (x^i, y^i)$ - естественные локальные координаты на TM $(i, j, ... = \overline{1, n})$.

Многообразие M называют обобщенным лагранжевым пространством L^n, если на M задано симметрическое невырожденное тензорное поле g финслерова типа - метрический тензор пространства. Компоненты $g_{ij}(x, y)$ этого поля являются гладкими функциями локальных координат касательного расслоения TM.

Исследуется обобщенное лагранжево пространство L^n с метрическим тензором [1]

$$g_{ij} = \varphi \cdot e^{2\sigma} \gamma_{ij} \tag{1}$$

где $\varphi = \varphi(x)$ - функция на M, $\sigma = \sigma(u)$ - функция аргумента $u = \frac{1}{2}\gamma_{ps} y^p y^s$, $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}(x)$ - компоненты риманова метрического тензора. Естественно возникает задача вычисления коэффициентов связности Картана для обобщенного лагранжева пространства с метрикой (1). Анализируя условие ковариантного постоянства метрического тензора (1) в связности ∇^* находим явное выражение коэффициентов связности Γ^{*k}_{ij} и ее тензорной части C^k_{ij} [1]:

$$\Gamma^{*k}_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{\gamma^{pk}}{2\varphi(1 + 2\sigma' u)} \{\partial_i \varphi \gamma_{pj} + \partial_j \varphi \gamma_{ip} - \partial_p \varphi \gamma_{ij}\}$$

$$C^k_{ij} = \sigma' \cdot (\delta^k_j \gamma_{pi} y^p + \delta^k_i \gamma_{pj} y^p - y^k \gamma_{ij})$$

References

[1] Сурина О.П. *Связность Картана в обобщенном лагранжевом пространстве со специальной метрикой.*,- // Известия ПГПУ имени В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. Раздел математика. - Пенза, (2011),N26 С. 213-216.

О собственных (в смысле Аренса-Дугунджи) и секвенциально собственных топологиях на множестве отображений.

В. Л. Тимохович, Д. С. Фролова

(БГУ, Минск, Беларусь)

E-mail address: frolova@mail.by

Пусть X, Y — некоторые топологические пространства, $C_\tau(X,Y)$ — множество всех непрерывных отображений X в Y с некоторой топологией τ, $\mathcal{A}$ — некоторый класс топологических пространств. Топология τ называется собственной [1] ($\mathcal{A}$-собственной [2]), если для любых пространства Z ($Z \in \mathcal{A}$) и отображения $F \in C(X \times Z, Y)$ оказывается $F^* \in C(Z, C_\tau(X,Y))$ (см. также обзорную статью [3]). В [2] показано, что максимальная по включению $\mathcal{A}$-собственная топология существует для любого класса $\mathcal{A}$.

Нами рассматривается класс $\mathcal{S}$ всех секвенциальных топологических пространств и соответствующее семейство всех $\mathcal{S}$-собственных топологий на $C(X,Y)$. Решается вопрос о положении максимальной $\mathcal{S}$-собственной топологии τ_s^* в частично упорядоченном по включению семействе T всех топологий на $C(X,Y)$ и ее взаимосвязь с максимальной собственной топологией τ^*. Основные из полученных результатов уточняют соотношение $\tau_s^* \supset \tau^*$.

Теорема 1. *Если пространство Y измельчается, то достаточным, а если X паралинделефово и пара (X,Y) удовлетворяет условию T_{**}, то и необходимым условием совпадения $\tau_s^* = \tau^*$ является линделефовость пространства X.*

Теорема 2. *Если пространство Y измельчается и пространство X линделефово, то достаточным, а если пара (X,Y) удовлетворяет условию T_{**}, то и необходимым условием совпадения $\tau_s^* = \tau^*$ является выполнение для пространства X условия (LFCCC).*

Поясним некоторые из упомянутых понятий. Пространство X называется линделефовым [4, с.182], если из любого его покрытия можно выбрать не более чем счетное подпокрытие; паралинделефовым [4, с.200], если в любое его покрытие можно вписать локально счетное покрытие; удовлетворяющим условию (LFCCC) [5] (Locally Finite Countable Chain Condition), если любое локально конечное в X семейство непустых открытых множеств не более чем счетно. Мы говорим, что упорядоченная пара пространств (X,Y) удовлетворяет условию T_{**}, если найдутся точки $y_0 \in Y$ и $z \in Y \setminus \{y_0\}$ такие, что для любого открытого в X непустого множества U можно подобрать отображение $h \in C(X,Y)$ так, чтобы $z \in h(U)$ и $h(x) = y_0$ при $x \in X \setminus U$. Отметим, что условию T_{**} удовлетворяет любая пара (X,Y), где X вполне регулярно, а Y содержит нетривиальную кривую (т.е. неодноточечный непрерывный образ отрезка).

References

[1] Arens R., Dugundji J. *Topologies for function spaces*,- Pacific J. Math. (1951), V.1, P.5-31.

[2] Георгиу Д. Н., Илиадис С. Д., Пападопулос Б. К. *Топологии пространств функций*,- Записки научных семинаров ПОМИ, (1993), Т.208. С.82-97.

[3] Georgiou D. N., Iliadis S. D., Mynard F. *Function space topologies*,- Open Problems in Topology 2, Elsevier, (2007), P.15-23.

[4] Hart K. P., Nagata J., Vaughan J. E. *Encyclopedia of General Topology*,- Elsevier, (2004).

[5] Mcintyre D. W. *Compact-calibres of regular and monotonically normal spaces*,- International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, (2002), V.29. no.4. P.209-216.

О симметрической связности, индуцируемой сердцевиной левой ткани Бола

Г. А. Толстихина

(Тверской госуниверситет, Тверь, Россия)

E-mail address: `science@tversu.ru`

Известно [1], [2], что любая левая три-ткань Бола $B_l \equiv B_l(r,r,r)$ индуцирует на базе первого слоения локальную гладкую квазигруппу, называемую сердцевиной ткани B_l. Отметим, что сердцевина ткани B_l не изотопна, вообще говоря, локальной координатной квазигруппе ткани. Согласно [3] сердцевина ткани B_l (и только такой ткани) порождает локально симметрическую связность, обозначим ее $\tilde{\Gamma}$. Эта связность определяется формами $\underset{1}{\omega}^i$ и $\tilde{\omega}^i_j$, удовлетворяющими структурным уравнениям:

$$
\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^i &= \underset{1}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j,\\
d\underset{2}{\omega}^i &= \underset{2}{\omega}^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - a^i_{jk}\underset{2}{\omega}^j \wedge \underset{3}{\omega}^k,\\
d\tilde{\omega}^i_j &= \tilde{\omega}^k_j \wedge \tilde{\omega}^i_k + \tilde{R}^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k \wedge \underset{1}{\omega}^l,
\end{aligned}
$$

$$\tilde{\nabla} a^i_{jk} = \frac{1}{2} b^i_{jkl}(\underset{3}{\omega}^l + \underset{2}{\omega}^l),$$

$$\tilde{\nabla} b^i_{jkl} = (a^i_{pl}b^p_{jkm} + a^p_{jk}b^i_{plm})(\underset{3}{\omega}^m + \underset{2}{\omega}^m),$$

где $\underset{1}{\omega}^i$ и $\underset{2}{\omega}^i$ – базисные формы на многообразии $\mathcal{M}$, несущем ткань B_l, a^i_{jk} и b^i_{jkl} – тензоры кручения и кривизны ткани, $\tilde{\nabla}$ – оператор ковариантного дифференцирования в связности $\tilde{\Gamma}$. Напомним [1], что слоения ткани задаются уравнениями:

$$\lambda_1 :\ \underset{1}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_2 :\ \underset{2}{\omega}^i = 0, \quad \lambda_3 :\ \underset{3}{\omega}^i \overset{def}{\equiv} \underset{1}{\omega}^i + \underset{2}{\omega}^i = 0,$$

а ткань B_l характеризуется условиями $b^i_{(jk)l} = 0$. Связность $\tilde{\Gamma}$ не имеет кручения, а ее тензор кривизны (он обозначен $\tilde{R}^i_{jkl}$) выражается через тензоры a^i_{jk} и b^i_{jkl}, а именно:

$$\tilde{R}^i_{jkl} = \frac{1}{4}(b^i_{klj} - 2a^i_{mj}a^m_{kl}),$$

при этом $\tilde{\nabla}\tilde{R}^i_{jkl} = 0$.

В частности, связность $\tilde{\Gamma}$ может быть локально плоской, то есть $\tilde{R}^i_{jkl} = 0$. Справедлива

Теорема 1. *Локально симметрическая связность $\tilde{\Gamma}$, индуцируемая левой тканью Бола B_l на базе ее первого слоения, является локально плоской в том и только в том случае, если сердцевина ткани B_l изотопна абелевой группе.*

References

[1] Акивис М. А., Шелехов А. М. *Многомерные три-ткани и их приложения*//монография/ Тверь, ТвГУ, 2010, 308 с.

[2] Толстихина Г. А. *О локально симметрической структуре, связанной с обобщенной левой три-тканью Бола $B_l(p,q,q)$*// Геометрія, топологія та їх застосування/ Зб. праць Ін-ту математики НАН України, 2009, **т. 6**, № 2, с. 247–255.

[3] Толстихина Г. А. *Обобщенная левая три-ткань Бола $B_l(\rho,r,r)$ как фактор-ткань левой ткани Бола $B_l(r,r,r)$*// Вестник Тверского гос. ун-та/ Серия: прикладная математика, выпуск 2(21), № 21, 2011, с. 117–134.

Геометрический синтез

А.Ф. Турбин

(Институт математики НАН Украины, НПУ им. М. Драгоманова, г.Киев, Украина)

E-mail address: turbin@imath.kiev.ua

Ю.Д. Жданова

(Государственный университет информационно-коммуникационных технологий, г.Киев)

E-mail address: yuzhdanova@yandex.ru

Великий И. Кеплер в своих «Размышлениях о снежинках» называл ромбододекаэдр (14, 24, 12) «наиболее правильной фигурой, которая подобно треугольникам, квадратам и шестиугольникам заполняет все пространство». Ромбододекаэдр – результат геометрического синтеза двух правильных двойственных друг другу многогранников: куба (8=14 - 6, 12, 6) и октаэдра (6=14 – 8, 12, 8).

Результат геометрического синтеза двух правильных двойственных друг другу многогранников: икосаэдра (12=32-20, 30, 20) и додекаэдра (20=32–12, 30, 12) – регулярный выпуклый 32–вершинник, двумерные грани которого ромбы.

Какие многогранники в аффинно–евклидовых пространствах $E^n(R), n \geq 4$, являются аналогами ромбододекаэдра И. Кеплера?

В $E^4(R)$ мегаоктаэдр Л. Шлефли (24, 96, 96, 24) – результат геометрического синтеза двух правильных двойственных друг другу многогранников: гиперкуба (16=24-8, 32, 24, 8) и двойственного ему мегатетраэдра (8=24–16, 24, 32,16).

$14 = 2^3 + 2 \cdot 3$, $2^3 = 8$ — число вершин куба (8, 12, 6),

$2 \cdot 3 = 6$ -– число вершин двойственного кубу октаэдра (6, 12, 8).

$24 = 2^4 + 2 \cdot 4$, $2^4 = 16$ -– число вершин гиперкуба (16, 32, 24, 8),

$2 \cdot 4 = 8$ — число вершин двойственного гиперкубу мегатетраэдра (8=24–16, 24,32,16).

В пространствах $E^n(R), n \geq 5$, результат геометрического синтеза двух правильных двойственных друг другу многогранников: гиперкуба (число вершин равно 2^n) и двойственного гиперкубу мегатетраэдра (число вершин равно $2 \cdot n$) -– правильный самодвойственный $(2^n + 2 \cdot n)$–вершинник, трёхмерные грани которого октаэдры.

Супероктаэдры $Superoct_n(2^n + 2 \cdot n)$ заполняют $E^n(R), n \geq 5$, и также совершенны, как мегаоктаэдр Л. Шлефли (24, 96, 96, 24). В докладе демонстрируются супеоктаэдры $Superoct_5\left(2^5 + 2 \cdot 5 = 42\right)$ и $Superoct_6\left(2^6 + 2 \cdot 6 = 76\right)$.

Решение двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа в клиновидно-слоистой среде с применением в теории упругости и стационарной теплопроводности

Н.Д. Вайсфельд, А.П. Мойсеенок, Г.Я. Попов

(Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова, ИМЕМ, Одесса, Украина)

E-mail address: vaysfeld@onu.edu.ua

Под клиновидно-слоистой средой $(0 \leq r \leq \infty, \quad \omega_0 < \theta < \omega_n)$ понимается клин, модуль сдвига G которого меняется скачкообразно на поверхностях $\theta = \omega_i, \ i = 0, 1, ..., n.$ В каждой из клиновидных областей разыскивается неизвестная функция $W_i(r, \theta), \ i = 1, ..., n-$ решение двумерного уравнения Лапласа, удовлетворяющее условиям сопряжения на поверхностях $\theta = \omega_i, \ i = 1, ..., n-1:$

1) условию равенства значений функции на линии $\theta = \omega_i: \ W_i(r, \omega_{i-1}) = W_{i-1}(r, \omega_{i-1});$

2) условию равенства нормальных производных $W_i^{\bullet}(r, \omega_{i-1}) = \frac{G_{i-1}}{G_i} W_{i-1}^{\bullet}(r, \omega_{i-1}), \ i = 2, 3, ..., n.$

На внешних гранях клина считаются заданными нормальные производные

$$W_1^{\bullet}(r, \omega_0) = \frac{1}{G_1} r q(r), \quad W_1^{\bullet}(r, \omega_n) = \frac{1}{G_n} r \tilde{q}(r)$$

Требуется определить напряженное состояние бесконечного слоистого клина.

С помощью интегрального преобразования Меллина задача сведена к одномерной, явное решение которой найдено на основе рекуррентной схемы для произвольного количества слоёв [1]. Обратное преобразование Меллина с последующим применением теоремы о вычетах позволяет получить окончательное решение поставленной задачи. Предложенный метод решения задачи проиллюстрирован подробно для случая двухслойного клина. Напряженное состояние области исследовано в зависимости от геометрических и механических параметров слоев.

Литература

1. Попов Г.Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* Наука, 1982.

Изобилие классов топологической сопряженности на блуждающем множестве внутреннего отображения сферы

И. Ю. Власенко

(Институт Математики, Киев, Украина)

E-mail address: vlasenko@imath.kiev.ua

В случае гомеоморфизмов, динамика на множестве блуждающих точек устроена относительно просто. Например, для гомеоморфизмов сферы, у которых неблуждающее множество состоит из двух точек — стока и источника, ограничения этих гомеоморфизмов на блуждающее множество принадлежат одному классу топологической сопряженности.

Однако уже в случае разветвленного накрывающего внутреннего отображения сферы, у которого неблуждающее множество состоит из двух точек — стока и источника, на блуждающем множестве существует бесконечное множество классов топологической сопряженности.

Для иллюстрации различных специфических для внутренних отображений механизмов порождения различных классов топологической сопряженности построены два примера семейств отображений, порождающих бесконечное число классов топологической сопряженности.

References

[1] С. Стоилов *О топологических принципах теории аналитических функций.*,- М., Мир. – 1964.

[2] Ю. Ю. Трохимчук *Дифференцирование, внутренние отображения и критерии аналитичности.*,- Институт математики НАН Украины. Киев. – 2008.

[3] И. Ю. Власенко *Динамика внутренних отображений.*,- Нелінійні Коливання. 2011. Т.14 № 2. –С. 181–186.

Топологические свойства функций на трехмерных телах

Е. Н. Вятчанинова

(Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев, Украина)

E-mail address: qucly_yalta2004@mail.ru

Исследуются топологические свойства гладких функций без критических точек на ограниченных трехмерных телах. Для их изучения строится полный топологический инвариант функций, ограничения которых на край имеют один локальный минимум, один локальный максимум и конечное число седловых критических точек.

Если y – критическое значение функции, тогда окрестность критического уровня $f^{-1}([y-\epsilon, y+\epsilon])$ гомеоморфна цилиндрам $f^{-1}(y-\epsilon)\times[0,1]$ с приклееными $2n-$угольниками по непарным сторонам. Обозначим компоненты уровня $f^{-1}(y-\epsilon)$ как $a^1, a^2, ..., a^m$. Для каждой окружности a^i выберем направление обхода (если многообразие ориентировано, то согласно ориентации). Тогда пронумеруем последовательно все середины непарных сторон $2n$-угольников, которые приклеиваются к этой окружности, обозначив их середины буквами $a_1^i, a_2^i, ..., a_n^i$.

Окружности, которые образовались после приклейки $2n-$угольников, как компоненты границы, обозначим как $b^1, b^2, ..., b^l$. Они соответствуют компонентам уровня $f^{-1}(y+\epsilon)$. Выберем на них ориентацию и обозначим соответствующие середины парных сторон $2n-$угольников как b_j^i.

Для каждого $2n-$угольника выпишем слово, которое состоит из букв a_j^i и b_j^i, обходя последовательно середины его сторон. Тогда эти слова будут задавать окрестность критического уровня и, с точностью до топологической эквивалентности, функцию в ней. Эти слова имеют такие свойства: 1) буквы a_j^i и b_j^i чередуются; 2) каждая буква содержится только в одном слове; 3) если в словах содержаться фрагменты $a_k^i b_r^j$ и $b_q^p a_{k+1}^i$, то $p=j$ и а) $q=r-1$ либо б) $q=r+1$. Случай а) выполняется, если ориентации рёбер, которые содержат a_k^i и b_r^j, согласованы, иначе выполняется б).

Теорема 1. *Две функции на телах топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их графы изоморфны.*

Теорема 2. *Пусть G – ориентированный граф, для каждой вершины которого записан набор слов из рёбер, инциндентных этой вершине, который удовлетворяет условиям 1)-3), и кроме этого, для каждого регулярного значения (которое равно полусумме двух соседних критических значений) множество рёбер, которые покрывают это регулярное значение, разбито на группы и каждой группе приписано целое число (род группы). Граф G является графом функции тогда и только тогда, когда для каждого критического уровня выполняется условие: если критические точки являются положительными, то при возрастании значения функции все подмножества, в которых есть элементы соответствующие рёбрам, которые входят в вершину v^j, после её прохождения объединяются в одно подмножество. Пусть $g_1, ..., g_m$ – роды начальных подмножеств, а $k_1, ..., k_m$ – число элементов в них. Тогда род образованного подмножества*

$$g=\sum_{i=1}^{m} g_i+\frac{1}{2}(ind(v^j)+\sum_{i=1}^{m} k_i-k-m).$$

Если точки являются отрицательными, то при убывании значения функции выполняются те же условия. При этом подмножествам, которые объединяются, будут соответствовать те рёбра, которые выходят из соответствующей вершины.

Об одном обобщении теоремы А.Д. Александрова [1]

В. Т. Фоменко

(ФГБОУ ВПО «ТГПИ имени А.П. Чехова», Таганрог, Россия)

E-mail address: `VTFomenko@rambler.ru`

Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве овалоид S положительной гауссовой кривизны и некоторую точку O на нем. Пусть L – замкнутая гладкая кривая на овалоиде S, не проходящая через точку O. Обозначим через $S(L)$ кусок овалоида S, ограниченный кривой L и не содержащий точку O.

Известно, что поверхность $S(L)$ допускает непрерывные изгибания. Однако, если на край поверхности $S(L)$ при ее изгибании наложить внешнюю связь, то поверхность $S(L)$ может стать неизгибаемой и даже однозначно определенной. Так А.Д. Александров доказал, что поверхность $S(L)$ не допускает нетривиальных изометрических преобразований при условии закрепления края поверхности относительно точки O. В настоящем сообщении приводятся результаты, связанные с изометрическими преобразованиями поверхности $S(L)$, закрепленной относительно точки O вдоль участка ее границы. В частности, если часть края положительной линейной меры освобождена от внешней связи закрепления относительно точки O, то поверхность $S(L)$ допускает непрерывные изгибания.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке государственного задания Министерства образования и науки РФ ФГБОУ ВПО "ТГПИ имени А.П. Чехова" (проект № 1.423.2011), «Реализация метрик положительной кривизны в виде поверхностей с заданной опорой», научный руководитель - Фоменко В.Т.

Принцип максимума для стратегической оптимальности процессов, линейных по фазовым переменным

Н. П. Худеннко

(ОНАПТ, Одесса, Украина)

E-mail address: khudenkon@mail.ru

Рассмотрим необходимые условия стратегической оптимальности процессов в векторной задаче Больца [1]. Будем рассматривать задачу стратегической оптимальности процессов, в которую величины, связанные с фазовой траекторией входят линейно.

Функция *u(t)*: $[\tau_0, \tau_1] \to U$ называется управлением, если она измерима. Функция *x(t)*: $[\tau_0, \tau_1] \to R^n$ называется фазовой траекторией, если она абсолютно-непрерывная вектор-функция.

Управляемым процессом называется кортеж *<x(t), u(t)>*, если *x(t)* – фазовая траектория, *u(t)* - управление.

Допустимый управляемый процесс $< \hat{x}(t), \hat{u}(t) >$ называется оптимальным, если существует $\varepsilon>0$, такое что для любого допустимого процесса *<x(t), u(t)>* удовлетворяющего условию $\|x(t) - \hat{x}(t)\| < \varepsilon$ выполнено условие $I_{v0}(x(t), u(t) \geq I_{v0}(\hat{x}(t), \hat{u}(t))$.

Допустимый управляемый процесс *<x(t), u(t)>* называется локально оптимальным на промежутке $[t_{j-1}, t_j] \subset [\tau_0, \tau_1]$, если для любого $t \in [t_{j-1}, t_j]$ его значение определяется решением следующей задачи векторной оптимизации

$$I_{v_0^j}(x(t), u(t) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_0(t)x(t) + f_0(t, u(t))dt + \gamma_{00}\, x(t_{j-1}) + \gamma_{10}\, x(t_j) \to inf; \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = A(t)x + F(t, u(t)), \qquad u(t) \in U \tag{2}$$

$$I_{v_\nu^j}(x(t), u(t) = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (a_\nu(t)x(t) + f_\nu(t, u(t))dt + + \gamma_{00}\, x(t_{j-1}) + \gamma_{10}\, x(t_j) \leq A_j \qquad \nu = 1, ..., m \tag{3}$$

Линейная структура позволяет преобразовать задачу 1 – 3 к такому виду, где *x(t), u(t)* в некотором виде разделены и привести к задаче ляпуновского типа.

References

[1] Довнарович Л.А., Худенко Н.П. Метод определения оптимальных функций, заданных в векторной форме.// Науково-технічний збірник ОІСВ. – Одеса, 2000. – Вип. 2. – С. 137 – 140.

Число Хьюитта - Нахбина пространства замкнутых подмножеств

A. A. Khujaev

(Uzbekistan, Tashkent)

E-mail address: alijon1983@mail.ru

В работе исследуется число Хьюитта-Нахбина пространства $exp_\omega X$. Отображение $f : X \to Y$ называется τ – непрерывным (где τ – фикси-рованный кардинал), если для всякого подпространства $A \subset X$, мощность которого не превосходит τ, сужение $f\ |_A$: $A \to Y$ отображения f на A непрерывна.

Отображение $f : X \to Y$ назовем строго τ – непрерывным, если для каждого множества $A \subset X$, такого, что $|A| \leq \tau$, найдется непрерывное отображение $g : X \to Y$, для которого $g\ |_A = f\ |_A$ (т.е. $f(x) = g(x)$ при $x \in A$).

Множество $A \subseteq X$ называется *τ-расположенныммм в* X, если для любой точки $x \in X \setminus A$ найдется такое множество $P \subset X$ типа G_τ, что $x \in P \subseteq X \setminus A$. Для тихоновского пространства X наименьший кардинал τ, такой что X является τ-расположеннным в βX, называется числом Хьюитта-Нахбина пространства X. Пространсво с $q(X) \leq \omega$ называется вещественно полным или полным по Хьюитта.

Числом Хьюитта-Нахбина пространства X называется следующий кар-динал:

$q(X) = min\{\tau \geq \omega : X\ \ \tau$ - расположено в $\beta X\}$

Ясно, что если X – бикомпакт, то $q(X) \leq \omega$.

Итак, имеем, что если X – бикомпакт, то всегда имеем, что

$$q(exp_c X) = q(expX) \leq \omega.$$

Рассмотрим число Хьюитта - Нахбина пространства $exp_\omega X$.

Имеет место следующаю

Теорема. Пусть X – бикомпакт, тогда

$$q(exp_\omega X) \leq d(X).$$

Следствие. Пусть X – сепарабельный бикомпакт, то $q(exp_\omega X) \leq \omega$.

References

1. В.В.Федорчук, В.В.Филиппов. Общая топология. Основные конструкции // М.: 2006.

2. А.В.Архангельский. Топологические пространства функций // М.: Изд-во МГУ. 1989.

О замкнутых относительно диффеоморфизмов классах пространств

Е. Е. Чепурная

(ОДЕУ, Одеса, Україна)

E-mail address: `kulechova@ukr.net`

При моделировании динамических систем с помощью диффеоморфизмов псевдоримановых пространств значительную роль играют замкнутые классы пространств, то есть типы пространств, свойства которых сохраняются при отображениях. Разработан метод построения таких классов с помощью инвариантных объектов.

Пусть f — некоторый диффеоморфизм между точками псевдоримановых пространств V_n и $\bar{V}_n$. Тензор $A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ называют инвариантным объектом диффеоморфизма f, если

$$A^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_k} = \bar{A}^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_k}.$$

Чертой отмечен объект, который принадлежит $\bar{V}_n$. Пусть $\underset{\alpha}{A}{}^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ — семейство инвариантных объектов относительно данного диффеоморфизма.

Построим тензор В следующим образом :

$$B = \underset{\alpha}{A}{}^{l_1 l_2 \dots t \dots l_m}_{i_1\, i_2\, \dots\, i_k} \underset{\beta}{A}{}^{h_1\, h_2\, \dots\, h_m}_{j_1 j_2 \dots t \dots j_k}.$$

Тензор B также будет инвариантным объектом диффеоморфизма f. При требовании равенства нулю B, мы получим классы пространств замкнутых относительно диффеоморфизма f, для которых задана тензорная характеристика, что позволяет эффективно исследовать их свойства.

Разработанные методы применены для изучения конформных и геодезических отображений псевдоримановых пространств [3], [4], а также голоморфно-проективных отображений келеровых пространств [1], [2].

Список литературы

[1] В.А. Киосак, Е.Е.Чепурная *Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна.* LAP LAMBERT Academie Publishing, 2012, 104с. ISBN (978 - 3 - 8484 - 2832 - 8)

[2] В.А. Киосак, Е.Е. Чепурная *Голоморфно-проективные отображения келеровых пространств с сохранением тензора Ейнштейна*// Proceedings international geometry center, №(4), 2010, С. 52-57

[3] В.А. Киосак, Е.Е. Чепурная *Инвариантные преобразования с сохранением геодезических*// Proceedings international geometry center, т.4, №(2), 2011, С. 43-50

[4] А.В. Лесечко, Е.Е. Чепурная *Инвариантные объекты и моделирование с использованием специальных диффеоморфизмов псевдоримановых пространств*// Інформатика та математичні методи в моделюванні, т.1, №(1), 2011, С. 75-91

Векторна оболонка відносно тензора конциркулярної кривини у псевдоримановому просторі

В. А. Кіосак

(ОНПУ, Одеса, Україна)

E-mail address: vkiosak@ukr.net

Є. В. Черевко

(ОНЕУ, Одеса, Україна)

E-mail address: cherevko@usa.com

У роботах ([1], [2]) було визначено поняття векторної оболонки простору V_n:
Означення. *У псевдоримановому просторі V_n існує векторна оболонка відносно тензору A_{hijk} якщо у ньому є таке векторне поле τ_i таке, що*

$$\tau_l A_{hijk} + \tau_j A_{hikl} + \tau_k A_{hilj} = 0. \tag{1}$$

Тензор

$$Z_{hijk} \stackrel{\text{def}}{=} R_{hijk} - \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}), \tag{2}$$

має назву тензора конциркулярної кривини ([5], [3]). Нами доведено таку теорему:
Теорема. *У псевдоримановому просторі V_n, відмінному від простору сталої кривини, не може існувати двох, або більше, лінійно-незалежних неізотропних векторних полів $\overset{\alpha}{\tau}_i$, що утворюють оболонку відносно тензора конциркулярної кривини Z_{hijk}:*

$$\overset{\alpha}{\tau}_l Z_{hijk} + \overset{\alpha}{\tau}_j Z_{hikl} + \overset{\alpha}{\tau}_k Z_{hilj} = 0. \tag{3}$$

.

Псевдоримановий простір V_n є простором сталої кривини, якщо його тензор риманової кривини має вигляд [4]:

$$R_{hijk} = \frac{R}{n(n-1)}(g_{ij}g_{hk} - g_{ik}g_{hj}). \tag{4}$$

References

[1] В. Р. Кайгородов *Структура кривизны пространства-времени* .,- Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., 14, ВИНИТИ, М., 1983, 177–204.

[2] В. А. Кіосак, Е. Е. Чепурна *Диффеоморфизмы с сохранением тензора Эйнштейна.*,- LAP LAMBERT Academic Publishing, 2012, 104 С. ISBN (978-3-8484-2832-8)

[3] Н. С. Синюков *Геодезические отображения римановых пространств.*,- Наука. 1979. 257 с.

[4] Л. П. Эйзенхарт *Риманова геометрия.*,- М.: ИЛ, 1948.

[5] K. Jano *Concirqular geometry I-IV.*, - Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1940, 16. PP.195-200, 354-360, 442-448, 505-511.

Восстановления выпуклой поверхности по заданным условным внешним кривизнам

А. С. Шарипов

(Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан)

E-mail address: `asharipov@inbox.ru`

В классической дифференциальной геометрии выделяются два направления. Одно из них, называемое геометрией "в малом", изучает локальные свойства геометрических объектов, а второе – исследует геометрические объекты на всем их протяжении и называется геометрий "в целом". Многие задачи геометрии "в целом" связаны с существованием и единственностью поверхностей с заданными геометрическими характеристиками. Геометрическими характеристиками могут быть внутренняя кривизна, внешняя или гауссова кривизны и другие функции, связанные с поверхностью.

В работе рассматривается задача о существовании и единственности поверхностей с заданными геометрическими характеристиками.

В трехмерном евклидовом пространстве R^3 рассмотрим поверхность F и вектор $\vec{e}$. Поверхность F пересекаем всевозможными плоскостями π^i, перпендикулярными вектору $\vec{e}$. Множество точек сечения обозначим через γ^i. Класс поверхностей, для которых сечения γ^i гомеоморфны отрезку, прямой либо окружности обозначим через $W(\vec{e})$ [1], [2].

Пусть на плоскости XOY задано выпуклая односвязная область G с границей $\bar{\gamma}$. Внутри G фиксируем точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть γ – замкнутая кривая в пространстве, которая прямыми параллельными оси OZ однозначно проектируется в выпуклую кривую $\bar{\gamma}$ лежащую на плоскости XOY .

Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_n$– любая конечная система прямых, параллельных оси OZ, и пересекающих область G в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ соответсвенно, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$– любые положительные числа, μ– условная внешная кривизна поверхности F, обращенного выпуклостью в сторону $Z > 0$ и с вершинами A'_k на прямых g_k. Обозначим через Ω_F – совокупность поверхностей F с краем γ, однозначно проектирующихся на плоскость XOY, обращенных выпуклостью в сторону $Z > 0$ и с вершинами на прямых g_k (предпологается, что других вершин поверхность не имеет).

Теорема 1. Если в области G отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и точкам поставлены в соответствие положительные числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, тогда существует выпуклая поверхность $F \in \Omega_F$ с условными внешными кривизнами в вершинах A'_k, равными ω_k по направлению $\vec{e}$ соответственно.

Теорема 2. Пусть F_1 и F_2 – выпуклые поверхности из класса $W(\vec{e})$ с общим краем γ, однозначно проектируются на плоскость XOY, обращены выпуклостью в сторону $Z > 0$, причем соответствующие внутренние вершины проектируются в одну и ту же точку плоскости XOY. Пусть условные кривизны принимают одинаковые значения в соответствующих вершинах этих поверхностей. Тогда поверхности F_1 и F_2 совпадают.

References

[1] Шарипов А. С. Об изометрии поверхностей, изометричных по сечениям //ДАН РУз., №3, 1998 г., с. 5-8.

[2] Шарипов А. С. О некоторых свойствах гиперповерхностей изометричных по сечениям в // Узб.мат. журнал №3, 1998 г. , с 98-103.

Расширенный объект кривизны-кручения обобщенной связности

Ю. И. Шевченко

(БФУ им. И.Канта, Калининград, Россия)

E-mail address: `arturkuleshov@yandex.ru`

Рассмотрим главное расслоение $G_M(B_N)$ со структурными уравнениями Лаптева

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J, \quad D\theta^A = C^A_{BC}\theta^B \wedge \theta^C + \omega^I \wedge \theta^A_I;$$

$$A = (a,\, \alpha), \quad I = (\alpha,\, i); \quad a, \ldots = \overline{1,\, r}; \quad \alpha, \ldots = \overline{r+1,\, r+m} \quad (r+m = M);$$

$$i,\, \ldots = \overline{M+1,\, M+n} \quad (m+n = N).$$

Пусть выполняются условия полуприклеивания нулевого порядка $\omega^\alpha = \theta^\alpha$, вызывающие наличие в группе Ли G_M подгруппы G_r и бесконечную серию условий высших порядков. Тогда главное расслоение $G_{r+m}(B_{m+n})$ назовем расслоением с полуприклеиванием и обозначим $G_{r+[m]}(B_{m+n})$. Оно обобщает главное расслоение $G_r(B_{m+n})$.

Распространим способ Лаптева – Лумисте задания связностей в главных расслоениях на обобщенное расслоение $G_{r+[m]}(B_{m+n})$. Возьмем формы $\tilde\theta^A = \theta^A - \Gamma^A_I\omega^I$, причем компоненты объекта обобщенной связности Γ^A_I удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta\Gamma^\alpha_I + \theta^\alpha_I = \Gamma^\alpha_{IJ}\omega^J, \quad \Delta\Gamma^a_I + \Gamma^\alpha_I\vartheta^a_\alpha + \theta^a_I = \Gamma^a_{IJ}\omega^J \quad (\vartheta^A_B = 2C^A_{Bc}\omega^c);$$

$$\Delta\Gamma^\alpha_I = d\Gamma^\alpha_I - \Gamma^\alpha_J\omega^J_I + \Gamma^\beta_I\vartheta^\alpha_\beta, \quad \Delta\Gamma^a_I = d\Gamma^a_I - \Gamma^a_J\omega^J_I + \Gamma^b_I\vartheta^a_b.$$

Формы обобщенной связности $\tilde\theta^A$ подчиняются структурным уравнениям

$$D\tilde\theta^\alpha = 2C^\alpha_{\beta a}\tilde\theta^\beta \wedge \tilde\theta^a + R^\alpha_{IJ}\omega^I \wedge \omega^J,$$

$$D\tilde\theta^a = C^a_{bc}\tilde\theta^b \wedge \tilde\theta^c + 2C^a_{b\alpha}\tilde\theta^b \wedge \tilde\theta^\alpha + R^a_{IJ}\omega^I \wedge \omega^J,$$

где компоненты объекта кривизны – кручения R^A_{IJ} имеют вид

$$R^\alpha_{IJ} = \Gamma^\alpha_{[IJ]} + C^\alpha_{\beta\gamma}\delta^\beta_I\delta^\gamma_J + 2C^\alpha_{\beta a}N^\beta_{[I}\Gamma^a_{J]},$$

$$R^a_{IJ} = \Gamma^a_{[IJ]} + C^a_{\alpha\beta}\delta^\alpha_I\delta^\beta_J - C^a_{bc}\Gamma^b_I\Gamma^c_J + 2C^a_{b\alpha}\Gamma^b_{[I}N^\alpha_{J]},$$

где $N^\alpha_I = \delta^\alpha_I - \Gamma^\alpha_I$ – тензор невырожденности обобщенной связности. Эти компоненты удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю форм ω^I

$$\Delta R^\alpha_{IJ} - 2C^\alpha_{\beta a}N^{\beta\gamma}_{IJ}\vartheta^a_\gamma \cong 0, \quad \Delta R^a_{IJ} + R^\alpha_{IJ}\vartheta^a_\alpha + 2C^a_{b\alpha}N^{\alpha\beta}_{IJ}\vartheta^b_\beta \cong 0,$$

где $N^{\alpha\beta}_{IJ} = N^\alpha_{[I}N^\beta_{J]}$.

Теорема 1. *Расширенный объект кривизны-кручения $\{R^A_{IJ},\, N^{\alpha\beta}_{IJ}\}$ обобщенной связности в расслоении с полуприклеиванием $G_{r+[m]}(B_{m+n})$ образует тензор, содержащий простой подтензор $\{R^\alpha_{IJ},\, N^{\alpha\beta}_{IJ}\}$ – расширенный объект кручения и простейший тензор $N^{\alpha\beta}_{IJ}$.*

При $N^{\alpha\beta}_{IJ} = 0$ сравнения принимают вид

$$\Delta R^\alpha_{IJ} \cong 0, \quad \Delta R^a_{IJ} + R^\alpha_{IJ}\vartheta^a_\alpha \cong 0.$$

Теорема 2. *Если дополнительный тензор $N^{\alpha\beta}_{IJ}$ обращается в нуль, то объект кривизны-кручения R^A_{IJ} становится тензором с подтензором кручения R^α_{IJ}.*

В этом случае получается непосредственное обобщение проективной связности Картана.

Решение проблемы Гронвелла об эквивалентности грассмановых тканей

А. М. Шелехов

(Тверской госуниверситет, Москва, Россия)

E-mail address: amshelekhov@rambler.ru

Три-тканью на плоскости называют совокупность трех семейств гладких кривых. Три-ткань, локально диффеоморфная (а) параллельной три-ткани, образованной семействами параллельных прямых, называется регулярной; (б) прямолинейной три-ткани, образованной тремя семействами прямых общего положения, называется спрямляемой.

В 1912 году F. H. Gronwall высказал следующую гипотезу: если нерегулярная три-ткань W спрямляема, то локальный диффеоморфизм, переводящий ткань W в прямолинейную ткань, определяется, с точностью до проективного преобразования, единственным образом.

Как писал Бляшке в [1], имея в виду данную проблему, "... проблемы номографии являются примерами вопросов, которые теоретически не сложны, но фактическому решению которых препятствуют вычислительные трудности." Вследствие указанных трудностей проблема не была решена до настоящего времени. Мы предлагаем ее полное решение, в том числе, и в многомерном случае. Оно вытекает из следующего утверждения.

Теорема. П*Пусть W и $\tilde{W}$ — две эквивалентные нерегулярные прямолинейные три-ткани и φ — локальный диффеоморфизм, переводящий слоения ткани W в слоения ткани $\tilde{W}$. Тогда φ — проективное преобразование.*

Для удобства мы рассматриваем вместо прямолинейной ткани двойственный объект — грассманову ткань, образованную тремя семействами пучков прямых, причем вершины пучков каждого семейства лежат на некоторой гладкой кривой.

Подробное доказательство см. в [2]. Доказательство проведено классическим методом внешних форм и подвижного репера Эли Картана, см. [3].

Понятие грассмановой ткани обобщается на многомерный случай: в проективном пространстве P^{n+1} размерности $n+1$ рассматриваются три гладкие гиперповерхности общего положения, а ткань образована связками прямых, вершины которых лежат на гиперповерхностях. В этом случае проблема Гронвелла формулируется аналогичным образом. Однако доказательство получается простой ссылкой на некоторые результаты теории многомерных тканей.

Все необходимые сведения из теории криволинейных тканей см. в [4], по теории многомерных тканей — в [5].

References

[1] В. Бляшке. *Введение в геометрию тканей.* М., Физматгиз, 1959, 144 с.

[2] А. М. Шелехов. *Решение проблемы Гронвелла об эквивалентности грассмановых тканей.* Известия Пензенского государственного педагогического университета им. В.Г. Белинского, 2012, вып. 4, стр. 311-320.

[3] S.Картан Э. *Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения.* МГУ, 1962.

[4] Лазарева В.Б., Шелехов А.М., Уткин А.А. *К теории криволинейных три-тканей.* Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Том 124, Москва, 2010, с. 63-114.

[5] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения.* Тверской госуниверситет, Тверь, 2010, 307 с.

Проблема регулярности для криволинейных тканей и задача о композиции гладких функций.

А.М. Шелехов

(Тверской государственный университет, Тверь, Россия)

E-mail address: amshelekhov@rambler.ru

Проблема регулярности состоит в описании подкласса регулярных тканей в заданном классе тканей. Это актуальная, но весьма непростая задача. Пример тому — проблема регулярности для тканей, образованных пучками окружностей (Бляшке, 1950), см. [1]. Наиболее широкое обобщение задачи Бляшке — проблема регулярности для тканей, заданных алгебраическим уравнением (будем называть их алгебраическими). Проблема регулярности для алгебраических тканей обсуждалась в [2], здесь мы приводит краткие доказательства утверждений, анонсированных в [2].

Пусть W — криволинейная три-ткань, заданная уравнением $F(x, y, z) = 0(1)$. Легко доказывается, что ткань W является регулярной $\Leftrightarrow$ с помощью локальных биекций вида $x = \alpha(\tilde{x}), y = \beta(\tilde{y}), z = \gamma(\tilde{z})$ уравнение этой ткани может быть приведено к виду $\tilde{F}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = 0(2)$, где функция $\tilde{F}$ — полилинейная.

Теорема 1. Уравнение (1) может быть линеаризовано по переменной x преобразованием вида $x = \alpha(\tilde{x}) \Leftrightarrow F$ есть композиция: $F(x, y, z) = F(x, \varphi(y, z))(3)$.

В самом деле, пусть подстановка $x = \alpha(\tilde{x})$ линеаризует уравнение (1), то есть уравнение $F(\alpha(\tilde{x}), y, z) = 0$ линейно относительно x. Из него находим $\tilde{x} = \varphi(y, z)$, откуда $x = \alpha(\varphi(y, z))$. Это означает, что верно (3). Обратно, если верно (3), то из равенства $F(x, \varphi(y, z)) = 0$ находим $\varphi(y, z) = f(x) = \tilde{x}$.

Следствие: если уравнение (1) можно линеаризовать по двум переменным $x = \alpha(\tilde{x}), y = \beta(\tilde{y})$, то можно и по третьей, то есть ткань W в этом случае является регулярной.

Пусть теперь F — многочлен, тогда уравнение ткани имеет вид $x^n P_0 + x^{n-1} P_1 + \ldots + P_n = 0(4)$, где P_i — многочлены от переменных y и z. Многочлены P_i определены с точностью до общего множителя — дробно-рациональной функции λ от переменных y и z. Поэтому условие линеаризации по переменной x в этом случае означает, что, с точностью до множителя, многочлены P_i являются многочленами от некоторой дробно-рациональной функции $\varphi = U/V$ от переменных y и z: $\lambda P_i = a_{i0}(U/V)^k + a_{i1}(U/V)^{k-1} + \ldots + a_{ik}$, откуда

$$P_i = a_{i0}(U)^k + a_{i1}(U)^{k-1}V + \ldots + a_{ik}V^k. \tag{5}$$

Обратно: если многочлены P_i имеют вид (5), то уравнение (4) разрешается относительно $\varphi = U/V$, причем $U/V = f(x) = \tilde{x}$. Доказана

Теорема 2. Алгебраическое уравнение (4) линеаризуемо по переменной x подстановкой $x = \alpha(\tilde{x}) \Leftrightarrow$ многочлены P_i имеют вид (5).

В пространстве переменных y, z ткань W, определяемая уравнением (4) при условиях (5), состоит из декартовой сети $y = const$, $z = const$ и семейства алгебраических кривых, определяемых уравнением (4), где x — параметр. Базисные кривые семейства определяются уравнениями $P_i = 0$. Правая часть равенства (5) раскладывается (над полем R) в произведение линейных сомножителей вида $aU + bV$ и квадратичных вида $aU^2 + bUV + cV^2$, так что каждая из базисных кривых есть объединение алгебраических кривых вида $aU + bV$, принадлежащих одному пучку с базисом U и V.

[1] Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М. *О триангуляциях плоскости пучками коник.* Матем. сб. **198** (2007), N 11, 107–134. [2] Лазарева, В.Б.; Шелехов, А.М. *Условия регулярности для тканей, заданных алгебраическими уравнениями.* Тезисы международной геометрической конференции. Астрахань, 2011.

К проблеме классификации тождеств порядка k в лупе.

В.А. Биллиг

(Тверской государственный технический университета, Москва, Россия)

E-mail address: `vladimir.billig@tversu.ru`

А. М. Шелехов

(Тверской госуниверситет, Москва, Россия)

E-mail address: `amshelekhov@rambler.ru`

Пусть $Q(\circ)$ — лупа, в которой операция $\circ$ задана формальным рядом $x \circ y = x + y + \ldots$ (1). В частности, Q может быть локальной аналитической лупой, единица которой имеет нулевые координаты. Словом от одной переменной x мы называем композиции вида $(x \circ x) \circ (x \circ (x \circ x))$ и т.д. Число вхождений переменного x называется длиной слова. С помощью ряда (1) каждое слово $S(x)$ можно записать также в виде ряда: $S(x) = nx + \ldots$, где n— длина слова $S(x)$. В [1] и [2] мы сравнивали слова по следующему отношению эквивалентности: $S_1(x) \underset{k}{\sim} S_2(x) \Leftrightarrow$ ряды $S_1(x)$ и $S_2(x)$ совпадают до членов порядка k включительно. В этом случае мы говорили, слова $S_1(x)$ и $S_2(x)$ образуют тождество $S_1(x) = S_2(x)$ порядка k.

В [1] и [2] показано, что не существует для слов порядка 4 длины меньшей 10. Для n=10 существует 6 тождеств порядка 4, и с ростом длины слова, естественно, растет и число классов эквивалентности. Результаты получены с помощью компьютера следующим образом. С каждым таким словом связывается помеченное бинарное дерево, пометки в узлах которого задают число листьев соответствующего поддерева. Для каждого слова можно вычислить некоторые характеристики — коэффициенты разложения в ряд. Число характеристик определяется порядком k. Каждая характеристика представляет функцию от пометок в узлах дерева. Чтобы вычислить характеристики слова, необходимо совершить обход дерева.

Из-за вычислительных трудностей в [1] и [2] пришлось ограничиться рассмотрением слов длины до 12. В данной работе благодаря прогрессу вычислительной техники и усовершенствованию алгоритма удалось выполнить классификацию для слов длины 16. Быстрые методы сортировки позволяют справиться с этой задачей за время O(nlog2n).

Для n = 16 на обычном настольном компьютере потребовалось чуть более 2-х часов.

В таблице представлены результаты до $n = 15$. Помимо характеристик порядка 4 вычислены некоторые (не все) характеристики порядков 5 и 6.

n/k	4	5	6
10	6	4	4
11	58	28	28
12	298	184	184
13	1425	940	940
14	6808	4751	4751
15	32624	22860	22860

References

[1] Биллиг, В.А.; Шелехов, А.М.: *О классификации тождеств с одной переменной в гладкой локальной лупе.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1987, 24–32 (РЖМат, 1987, 7А722).

[2] Биллиг, В.А.; Шелехов, А.М.: *Классификация тождеств длины 12 порядка 4 с одной переменной в локальной аналитической лупе.* Ткани и квазигруппы, Калинин, Калининский гос. ун-т, 1990, 10–18 (РЖМат, 1991, 9А244).

The Differential Geometry of Curves in de-Sitter Space

***N. Ayyıldız and **T. Turhan**

(*Süleyman Demirel University, Department of Mathematics, Isparta, Turkey)
(**Selçuk University, Seydişehir Vocational School, Konya, Turkey)

E-mail address: nihatayyildiz@sdu.edu.tr & t_turhan07@hotmail.com

It is known that the differential geometry of curves on a hypersphere in the Euclidean space reflects instantaneous properties of spherical motion. So, the initial aim of this talk is to present the Frenet reference frame, the Frenet equations, and the geodesic curvature and torsion functions which will be used to analyze and characterize curves in de-Sitter space.

References

[1] Fusho, T., and Izumiya, S., Lightlike surfaces of spacelike curves in de Sitter $3-$space, Journal of Geometry, (2008), 88, $19-29$.

[2] Kasedou, M., Singularities of lightcone Gauss images of spacelike hypersurfaces in de Sitter space, Journal of Geometry, (2009), 94, $107-121$.

[3] McCarthy, J. M., The differential geometry of curves in an image space of spherical kinematics, Mech. Mach. Theory, (1987), vol. 22, no.3, $205-211$.

[4] McCarthy, J. M., and Ravani, B., Differential kinematics of spherical and spatial motions using kinematic mapping, Trans. ASME J. Appl. Mech., (1986), 53, $15-22$.

[5] O'Neill, B., Semi-Riemann Geometry: with Applictions to Relativity.Academic Pres, New York, (1983), 469p.

[6] Ravani, B., and Roth, B., Mappings of spatial kinematics, Trans. ASME J. Mech. Transmiss. Automat. Design, (1984), 106, $341-347$.

Coarse and bi-uniform classification of homogeneous metric spaces

T. Banakh, I. Zarichnyi

(Ivan Franko National University of Lviv, Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine)

E-mail address: ihor.zarichnyj@gmail.com

In the talk we shall present a classification of countable abelian groups up to the coarse isomorphism. A bijective map $f : X \to Y$ between metric spaces is called a *coarse isomorphism* if the maps f and f^{-1} are coarse. A map $f : X \to Y$ between metric spaces is *coarse* if

$$\forall \delta < \infty \ \exists \varepsilon < \infty \ \forall A \subset X \ \ \mathrm{diam} A < \delta \Rightarrow \mathrm{diam} f(A) < \varepsilon.$$

According to [1], each countable abelian group G is coarsely isomorphic to the direct sum of cyclic groups

$$\mathbb{Z}_f = \bigoplus_{p \in \overline{\Pi}} \mathbb{Z}_p^{f(p)}$$

for a suitable function $f : \overline{\Pi} \to \omega \cup \{\infty\}$ defined on the set $\overline{\Pi} = \Pi \cup \{\infty\}$ of prime numbers with attached infinity.

The function $f : \overline{\Pi} \to \omega \cup \{\infty\}$ can be recovered from the algebraic structure of G as follows. Let $f_G(\infty)$ be the smallest cardinality $|S|$ of a subset $S \subset G$ generating a subgroup H of locally finite index in G. The latter means that H has finite index in each subgroup generated by the set $H \cup F$ where F is a finite subset of G. Fix any such a subgroup H in G and for every prime number p let

$$f_G(p) = \sup\{k \in \omega : p^k \text{ divides the index of } H \text{ is a suitable subgroup of } G\}.$$

Observe that for a locally finite group G the subgroup H is trivial, so $f_G(\infty) = 0$.

Theorem 1. *Each countable abelian group G is coarsely isomorphic to $\mathbb{Z}_{f_G}$.*

Given two function $f, g : \overline{\Pi} \to \omega \cup \{\infty\}$ we write $f =^* g$ iff one of the following conditions holds:
1) $f(\infty) = g(\infty) = 0$ and $f = g$;
2) $f(\infty) = g(\infty) = \infty$;
3) $0 < f(\infty) = g(\infty) < \infty$ and $\sum_{p \in \Pi} |f(p) - g(p)| < \infty$.

Theorem 2. *Two countable abelian groups G, H are coarsely isomorphic if and only if $f_G =^* f_H$.*

References

[1] T. Banakh, J. Higes, I. Zarichnyy, *The coarse classification of countable abelian groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010) 4755–4780.

Some cardinal properties of complete linked systems containing compact elements

R.B. Beshimov, F. G. Muhamadiyev

NUU,Tashkent,Uzbekistan

e-mails: rbeshimov@mail.ru, farhod8717@mail.ru

In the paper, we study cardinal properties of the space of complete linked systems containing compact elements.

The space $NX$of all complete linked systems (CLS) of the space X was defined by A.V. Ivanov as follows:

Definition 1 [1]. The linked system μ of closed subsets of the compact X is called the complete linked system (CLS) if for any closed subset F of the compact $X$the condition:

“Any neighborhood OF of the set F contains some subset $\Phi \in \mu$” follows $F \in \mu$.

It is obvious that every maximal linked system is CLS, consequently $\lambda X \subset NX$.

The space $NX$of the compact X is the set of all complete linked systems of the compact X with the topology generated by the open base of which consists of sets of the form

$$E = O(U_1, U_2, ..., U_n)\langle V_1, V_2, ..., V_s\rangle = \{ \ \mu \in NX : \mathit{for\ each}\ i = 1, 2, ..., n$$

$$\mathit{there}\ \ \exists\ F_i \in \mu\ \mathit{such\ that}\ F_i \subset U_i\ \mathit{and}\ F \cap V_j\ \ \mathit{for\ each}\ j = 1, 2, ..., s\ \ \mathit{and}\ \ \mathit{any}\ F \in \mu\},$$

where $U_1, U_2, ..., U_n, V_1, V_2, ..., V_s$ are open sets of X[2].

Definition 2. Let μ be a complete linked system of a T_1-space X. The CLS μ is said to be compact complete linked system if the system μ contains at least one compact element. It is denoted by CCLS

Definition 3. A compact kernel of a T_1-space X is the space

$$N_cX = \{\mu \in NX : \mu - CCLS\}.$$

Theorem 1. Let X be a T_1 space, then

1) $d(X) = d(N_cX)$;

2) $\pi w(N_cX) = \pi w(X)$;

3) $n\pi w(N_cX) = n\pi w(X)$;

4) if X is an infinite Tychonoff space then $c(N_cX) = sup\{c(X^n) : n \in N$;

5) if X is an infinite Tychonoff space then $wd(N_cX) = wd(NX) = wd(X)$.

REFERENCES

[1] A.B. Ivanov. Cardinal valued invariants and functors in the category of compacts: Doct. thesis of phys.math. sciences. Petrozavodzk, 1985.

[2] Mahmud T. Cardinal valued invariants of the space of linked systems. Ph.D. thesis of physical and mathematical sciences- Moscow State University, 1993. -83 p.

[3] Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. Basic constructions. Moscow: Phys.math.lit. 2006. 332 p.

Fractal geometry approach and wavelet analysis to temporal variations of the air pollutant concentrations

T. A. Florko, G. A. Kuzakon, V. F. Mansarliysky

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantflo@mail.ru

It is known that a chaos is alternative of randomness and occurs in very simple deterministic systems. Although chaos theory places fundamental limitations for long-rage prediction, it can be used for short-range prediction since ex facte random data can contain simple deterministic relationships with only a few degrees of freedom. The fractal geometry approach and wavelet analysis are usually used to study temporal variations of the valuables of the dynamical systems. The purpose of this paper is to apply a fractal geometry and wavelet analysis of temporal sets of ait pollutants concentration fluctuations, to establish an an existence of the low-dimensional chaos and to provide nonlineas predictions of fluctuation evilution. In order to find the corresponding multi-fractal features we have used the methodics ([1], [2]). To reconstruct an attractor, the time delay and embedding dimension are needed. The former is determined by the methods of autocorrelation function and average mutual information, and the latter is calculated by means of correlation dimension method and algorithm of false nearest neighbours. Wavelets are fundamental building block functions, analogous to the sine and cosine functions. The wavelets have advantages over the known Fourier transform when non-stationary signals are analyzed. Here, we use non-decimated wavelet transform that has temporal resolution at coarser scales and allows to isolate time series of the major components of financial sets a direct way. The dilation and translation of the mother wavelet y(t) generates the wavelet as follows: $\Psi(j;k) = 2^{j/2} \times \Psi(2^j t - k)$. The dilation parameter j controls how large the wavelet is. The corresponding wavelet expansion of a function is closely related to the discrete wavelet transform of a signal observed at discrete points in time. Usually, a length of the signal, say n, is finite and, for our study, the data are available daily, monthly, i.e. the interested function is vector $f = [f(t_1; ...; f(t_n)]$. Using a link between wavelets and fractals, we have made calculating the multi-fractal spectrum [3]. The results of analysis are presented for temporal variations of the ait pollutants concentration fluctuations in Odessa region (2001-2007).

References

[1] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, G. P. Prepelitsa et al *Non-linear prediction method in short-range forecast of atmospheric pollutants: low-dimensional chaos* .,- Dynamical Systems: Theory and Applications, (2011), P.73-38.

[2] A. V. Glushkov, V. N. Khokhlov, N. S. Loboda, Yu. Ya. Bunyakova *Short-range forecast of atmospheric pollutants using non-linear prediction method* .,- Atmospheric Environment (Elsevier), (2008), V.42, P. 7284-7292.

[3] A. V. Glushkov, V. N. Khokhlov, I. Tsenenko *Atmospheric teleconnection patterns and eddy kinetic energy content: wavelet analysis*.,- Nonlinear Processes in Geoph., (2004), V.11, P.285-293.

Fractal geometry and chaos theory methods to analysis of dynamics of the non-linear vibrational systems

A. V. Glushkov, V. M. Kuzakon, E.P.Solyanikova

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: glushkov@paco.net

(ONAFT, Odessa, Ukraine)

E-mail address: kuzakon_v@ukr.net

Chaos theory establishes that apparently complex irregular behaviour could be the outcome of a simple deterministic system with a few dominant nonlinear interdependent variables. The present study goes on our attempts to employ a variety of techniques of a chaos theory for characterizing dynamics of the non-linear vibrational systems ([1], [2]). Here the coupled auto-(quantum)-generator dynamics is examined The techniques employed range from standard statistical techniques that can provide general indications regarding the dynamics of the phenomenon to specific ones and its comprehensive characterization. The mutual information approach, multifractal and wavelet-expansion formalisms, the correlation integral analysis, the false nearest neighbour algorithm, the Lyapunov exponent's analysis, and the surrogate data method were used in the analysis ([1], [3]). The mutual information approach provided a time lag which is needed to reconstruct phase space. The correlation dimension method provided a low fractal-dimensional attractor thus suggesting a possibility of the existence of chaotic behaviour. The method of surrogate data, for detecting nonlinearity, provided significant differences in the correlation exponents between the original data series and the surrogate data sets. This finding indicates that the null hypothesis (linear stochastic process) can be rejected. Lyapunov exponents (LE) are the dynamical invariants of the nonlinear system and defined as asymptotic average rates. So, they are independent of the initial conditions, and therefore they do comprise an invariant measure of attractor. In fact, if one manages to derive the whole spectrum of Lyapunov exponents, other invariants of the system, i.e. Kolmogorov entropy and attractor's dimension can be found. The Kolmogorov entropy, K, measures the average rate at which information about the state is lost with time. An estimate of this measure is the sum of the positive Lyapunov exponents. The inverse of the Kolmogorov entropy is equal to the average predictability. Themain conclusion regarding auto-(quantum)-generator dynamics is that the system investigated exhibits a nonlinear behaviour and low-dimensional chaos. The Lyapunov exponents analysis supported this conclusion.

References

[1] A. V. Glushkov, O. Yu. Khetselius, V. M. Kuzakon' et al *Modeling of interaction of the non-linear vibrational systems on the basis of temporal series analyses* .- Dynamical Systems: Theory and Applications, (2011), P. 31-37.

[2] N. G. Serbov, V. M. Kuzakon', O. Yu. Khetselius et al *Non-linear analysis methods of signal's temporal series in modeling of interactions in the non-linear vibrational systems of the quantum generators type* .,- Photoelectronics (2011), V.20, P. 117-123; Proceedings of Int.Geometry Centre, to be published.

[3] A. Glushkov, V. Khokhlov, I. Tsenenko *Atmospheric teleconnection patterns and eddy kinetic energy content: wavelet analysis*.- Nonlinear Processes in Geoph., (2004), V.11, P.285-293.

A Bargmann type invariant reduction of the $(2|2+1)$-dimensional supersymmetric Davey-Stewartson system and its integrability

O. Ye. Hentosh

(IAPMM, NAS of Ukraine, Lviv, Ukraine)

E-mail address: `ohen@ua.fm`

The (2|2+1)-dimensional supersymmetric Davey-Stewartson system ([1]) is given by two squared eigenfunction symmetries in the forms

$$\begin{aligned}
&df_i/dy = (-M_1^1 + \delta_1^i l)f_i, \quad df_i^*/dy = (M_1^1 - \delta_1^i l)^* f_i^*,\\
&d\Phi_i/dy = (-M_1^1 + \delta_1^i l)\Phi_i, \quad d\Phi_i^*/dy = (M_1^1 - \delta_1^i l)^* \Phi_i^*,\\
&df_i/dT = (l_+^2 - M_2^1 + \delta_1^i l^2)f_i, \quad df_i^*/dT = (-l_+^2 + M_2^1 - \delta_1^i l^2)^* f_i^*,\\
&d\Phi_i/dT = (l_+^2 - M_2^1 + \delta_1^i l^2)\Phi_i, \quad d\Phi_i^*/dT = (-l_+^2 + M_2^1 - \delta_1^i l^2)^* \Phi_i^*,
\end{aligned} \tag{1}$$

where $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_1^*, f_2^*, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_1^*, \Phi_2^*)^\top \in M^{4|4} \subset L_2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \Lambda_1^2; \Lambda_0^4 \times \Lambda_1^4)$, $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ is a Grassmann algebra over $\mathbb{C} \subset \Lambda_0$, $i = 1, 2$,

$$M_1^s = \sum\nolimits_{p=0}^{s-1} \big((l^p f_1) D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} (l^{*(s-1-p)} f_1^*) + (l^p \Phi_1) D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} (l^{*(s-1-p)} \Phi_1^*)\big)\,,$$

δ_k^i, $k = 1, 2$, is a Kronecker symbol, $s = 1, 2$, the subscript "+" designates a pure differential part of the corresponding operator, and the commutability condition for the vector fields d/dy and d/dT

$$dl_+^2/dy = [l_+^2, M_1^1]_+ \tag{2}$$

where $l_+^2 = \partial^2 + w_0 + w_1 D_{\theta_1} + w_3 D_{\theta_1} + w_2 D_{\theta_1} D_{\theta_1}$, $w_0, w_2 \in L_2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \Lambda_1^2; \Lambda_0)$, $w_1, w_3 \in L_2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times \Lambda_1^2; \Lambda_1)$, for Lax type hierarchy of evolution equations on some dual space to the Lie algebra of super-integro-differential operators of two anticommuting variables $\theta_1 \in \Lambda_1$ and $\theta_2 \in \Lambda_1$, which is associated with the operator

$$l = \partial + \sum\nolimits_{i=1}^{2} (f_i D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} f_i^* + \Phi_i D_{\theta_1} D_{\theta_2}^{-1} \Phi_i^*),$$

where $\partial = \partial/\partial x$, $x \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $D_{\theta_r}^2 = \partial$, $r = 1, 2$.

The Hamiltonian forms for the vector fields d/dx, d/dy and d/dT on their common invariant finite-dimensional superspace $M_N^{4|4} \subset M^{4|4}$ of a Bargmann type

$$M_N^{4|4} = \{\mathbf{f} \in M^{4|4} :\ grad\, \mathcal{L}_N[\mathbf{f}] = 0\}, \quad \mathcal{L}_N = -\gamma_0 + \sum\nolimits_{j=1}^{N} c_j \lambda_j,$$

where $\gamma_0 = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta_1 d\theta_2 \sum_{i=1}^2 (f_i f_i^* + \Phi_i \Phi_i^*)$ is a local conservation law of the system (1) and (2), λ_j are some eigenvalues of an associated spectral problem, being invariant with respect to (1) and (2), and $c_j \in \Lambda_0$ for every $j = \overline{1, N}$, are found by use of the Gelfand-Dikii relationship for the Lagrangian $\mathcal{L}_N$. The Lax representations for the reduced vector fields are obtained by means of the properties of monodromy supermatrix supertrace for an associated spectral problem. They are shown to possess also a full set of involutive functionally independent conservation laws which provides their Liouville type integrability.

References

[1] Hentosh O. Ye. Lax integrable supersymmetric hierarchies on extended phase spaces of two anticommuting variables, in Modern Analysis and Applications, Vol. 2, Diff. Operators and Mechanics // *Operator Theory: Advances and Applications.* – Basel/Switzerland: Birkhäuser-Verlag, 2009. – 191. – P. 365-379.

Quantization of quasistationary states of Schrödinger equation for two-centre systems in DC electric field

A. V. Ignatenko

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: quantign@mail.ru

We present a new advanced approach to quantization of quasistationary states of the Schrödinger equation for two-centre systems with the strong DC electric field potential. The approach is based on the formalism of operator perturbation theory ([1], [2]). Several approaches for quantization of the states of the Schrödinger equation with different forms of the external (for example, DC electric field potential,Stark task, scattering problem etc) potentials are usually used. As a rule, in a case of a strong external field there is arisen a problem of the correct calculating the optimized sets of eigen functions and correspondingly eigen values especially. This task is very complicated for the two-centre systems, where one should realize the separtaion of the variables in the spheroidal coordinates. Generalization of the operator perturbation theory formalism in application to the two-centre systems is reduced to modification of the differential equation system. The key feature of the approach is that the zeroth order Hamiltonian, possessing only stationary states, is determined only by its spectrum without specifying its explicit form. It is proven the theorem establishing a link of quasidiscrete states with continuum. The operator perturbation theory basis is used in problem of the full diagonalization of the energy matrice. More simplified version reduces to a search for one eigen-value, which is transited to the state under switching on a field. In this case a solution of determining the maximal eigen-value and the corresponding eigen-vector is realized by usual iterative methods. The most interesting situation has a place in a case of the highly-excited states of the two-centre system (the large eigen values of energy). Then it could ba realized a possibility of quantum chaos phenomenon existence. The special numerical procedure for calculating the eigen-values and eigen functions in a case of the strong external (electric) field is developed. The results of the test numerical calculations of the simple diatomics are presented and analyzed.

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems*- Odessa: Astroprint, (2008), P.1-700.

[2] A. Glushkov, A. Ignatenko, S. Ambrosov, D. Korchevsky *Consistent quantum approach to DC strong field Stark effect for non-H systems.*- Int.J.Quant.Ch., (2004), V.99, P.936-946.

On foundations of mathematics in basic courses of analysis and geometry

T. S. Kudryk

(Lviv University, Lviv, Ukraine)

E-mail address: kudryk@mail.lviv.ua

The principal aim of our report is to draw attention to inadequate situation with elucidation of foundations of mathematics in traditional university courses of analysis and geometry. In our opinion excessive emphasis on axiomatic approach and set theory, disregarding of important points of history of analysis and geometry (especially those concerning the axiom of choice) in many textbooks prevent students from proper understanding of foundations. This situation is tolerable for applied mathematics students. However, it is unacceptable for students in pure mathematics. Meanwhile short mentions of non-archimedean number systems and geometries that are known from 1870-1890's could sharply improve the situation. We mean, for example, J. Thomae's, P. du Bois-Reimond's, O. Stolz's, and P. Veronese's studies (see [4]). In this context, the abandoned term "geometrical place of points" is often more preferable than "the set of".

Another important point that can assist to throw light upon the most important achievements of twentieth-century mathematics in set theory, category theory, nonstandard analysis etc. is J. Conway's surreal number system (s. [3]). In fact, this system explains the meaning of the word "between" in modern mathematics. The above-mentioned system clears up interrelations between some competing theories as foundations of mathematics and their role.

It is interesting to note that the situation concerning the foundations in textbooks has altered a bit since Kagan's article [1] and Freudental's book [2] too. Unfortunately, according to E. Nelson the majority of textbooks are written to hide the essence.

References

[1] Каганъ В. *Задача обоснованія геометріи въ современной постановке*,- Одесса, (1908), 44с.

[2] Фрейденталь Г. *Математика как педагогическая задача. В 2-х кн.*,- М.: Просвещение, (1982), 208с., 192с.

[3] J. Conway, *On Numbers and Games*, Academic Press, (1976), 238p.

[4] P. Ehrlich, *The rise of non-archimedean geometry. I*, // Arch.Hist.Exact Sci. (2009), 1-121.

Conformally Flat Twisted Product Manifolds

Koji Matsumoto and Mukt Mani Tripathi

2-3-65 Nishi-Odori, Yonezawa, Yamagata, 992-0059, Japan

Department of Mathematics and DST-CIMS, Faculty of Science, Banarasi Hindu University, Baranasi 221005, India

E-mail addresses: `tokiko_matsumoto@yahoo.com` and `mmtripathi66@yahoo.com`

In this talk, we conside a toporogical product manifold $M = M_1 \times M_2$ of two Riemannian manifolds (M_1, g_1) and (M_2, g_2).

If a metric g on M is defined by

$$g(U, V) = e^{f^2} g_1(\pi_{1*}U, \pi_{1*}V) + g_2(\pi_{2*}U, \pi_{2*}V) \tag{1}$$

for any $U, V \in TM$ and for a positive differentiable function f on M, where π_1 (resp. π_2) means the projection operator of M to M_1 (resp. M_2), then the manifold M is said a *twisted product manifold* of M_1 and M_2 with an *associated function* f and it is written by $M = M_1 \times_f M_2$.

Using the following lemma;

Lemma. *An n $(n > 3)$-dimensional Riemannian manifold M is conformally flat if and only if the Riemannian curvature tensor ${R_{\omega\nu\mu}}^{\lambda}$ satisfies*

$$\begin{aligned} {R_{\omega\nu\mu}}^{\lambda} + \frac{1}{n-2}(R_{\omega\mu}{\delta_\nu}^{\lambda} - R_{\nu\mu}{\delta_\omega}^{\lambda} + {R_\nu}^{\lambda} g_{\omega\mu} - {R_\omega}^{\lambda} g_{\nu\mu}) \\ + A(g_{\nu\mu}{\delta_\omega}^{\lambda} - g_{\omega\mu}{\delta_\nu}^{\lambda}) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

for a certain function A.

A 3-dimensional Riemannian manifold M is conformally flat if and only if the Ricci tensor $R_{\mu\lambda}$ satsifies

$$\nabla_\nu R_{\mu\lambda} - \nabla_\mu R_{\nu\lambda} + T_\nu g_{\mu\lambda} - T_\mu g_{\nu\lambda} = 0 \tag{3}$$

for a certain vector field T_λ.

we prove

Theorem. *If a twisted product manifold $M = M_1 \times_f M_2$ is conformally flat, then two manifolds M_1 and M_2 are conformally flat, too.*

References

[1] Y. Agaoka and B. H. Kim *On conformally flat twisted product manifolds.*,-Mem. Fac. Integrated Arts and Sci., Hiroshima Univ., Ser. IV 23, (1997), P. 1-7.

[2] B. Y. Chen, *Totally Umbilical Submanifolds.*,- Soochow J. Math., 5, (1997), P. 9-37.

[3] T. Ikawa and J. B. Jun, *On conformally flat spaces with doubly warped product Riemannian metric.*,- J, of General Education, Nihon.Univ., 21, (1995), P. 123-129.

[4] B. O'Neil, *Semi-Riemannian Geometry.* Academic Press, New York, (1981).

[5] K. Yano *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces.*,- Pergamon Press, New York, (1965).

RECURRENT EINSTEIN-WEYL MANIFOLDS AND THEIR TOTALLY UMBILICAL HYPERSURFACES

ABDÜLKADİR ÖZDEĞER

Kadir Has University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Department of Information Technologies, Cibali-Istanbul, 34083, Turkey.

E-mail address: aozdeger@khas.edu.tr

A differentiable manifold of dimension n having a conformal class $C[g]$ of metrics and a torsion-free connection ∇ preserving $C[g]$ is called a Weyl manifold [1], denoted by $W_n(g,\omega)$ where $g \in C[g]$ and ω is a 1-form satisfying the compatibility condition $\nabla g = 2(g \bigotimes \omega)$. $W_n(g,\omega)$ is said to be an Einstein-Weyl manifold [2] if the symmetric part of the Ricci tensor is proportional to $g \in C[g]$. We define [3] the recurrency of $W_n(g,\omega)$ by $\dot{\nabla}_l W_{hijk} = \phi_l W_{hijk}$ where W_{hijk} is the covariant curvature tensor of $W_n(g,\omega)$ and $\dot{\nabla}$ denotes the prolonged covariant differentiation defined by ([1],[4])

$$\dot{\nabla}_l W_{hijk} = \nabla_l W_{hijk} - 2\omega_l W_{hijk},$$

ϕ being a non-zero, gauge invariant covector field.

Recurrent Riemannian manifolds are extensively studied by a large number of mathematician while recurrent Weyl manifold are studied to some extent.

In this paper, it is shown that a recurrent Einstein-Weyl manifold has a vanishing scalar curvature and that totaly umbilical hypersurfaces of such a manifold are totaly geodesic with a vanishing scalar curvature.

References

[1] A. Norden *Affinely Connected Spaces.*,- Moscow, Nauka(1976), (in Russian).

[2] H. Pederson, K.P. Tod *Three-dimensional Einstein-Weyl Geometry.*,- Adv.Math., 97(1993), P.74-109.

[3] E.Ö. Canfes, A. Özdeğer *Some applications of prolonged covariant differentiation in Weyl spaces.*,-J.Geom. 60(1997), P.7-16.

[4] G. Zlatanov, B. Tsareva *On the geometry of nets in the n-dimensional space of Weyl.*,- J. Geom. 38(1/2)(1990), P.182-187.

Relaxed Hyperelastic Curves in $3-$dimensional Minkowski Space

G. Özkan and A. Yücesan

(Süleyman Demirel University, Department of Mathematics, Isparta, Turkey)

E-mail address: gozdemet@gmail.com & ahmetyucesan@sdu.edu.tr

We study relaxed hyperelastic curves which are the solution of a variational problem in $3-$dimensional Minkowski space. We obtain a differential equation with two boundary condition depend on Darboux frame of the curve for relaxed hyperelastic curve. Then, we give the necessary and sufficient condition on a non-null geodesic for a relaxed hyperelastic curve in $3-$dimensional Minkowski space. Finally, we examine whether the non-null geodesics of pseudo-plane, pseudo-sphere, hyperbolic space and pseudo-cylinder are relaxed hyperelastic curve.

References

[1] A. Yücesan, G. Özkan and Y. Yay, Relaxed Hyperelastic Curves, Annales Polonici Mathematici, $102:3$, (2011), P. $223-230$.

[2] B. O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Pres, New York, (1993), 469p.

[3] G. S. Manning, Relaxed Elastic Line on a Curved Surface, Quart. Appl. Math. 45:3, (1987), p. 515-527.

[4] H. K. Nickerson and G. S. Manning, Intrinsic Equations for a Relaxed Elastic Line on an Oriented Surface, Geom. Dedicata 27:2, (1988), p. 127-136.

[5] K. Akutagawa and S. Nishikawa, S., The Gauss Map and Spacelike Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski $3-$Space, Tohoku Math. J. 42, (1990), p. 67-82.

[6] R. Lopez, *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0810/0810.3351v1.pdf, 2008.

[7] R. Weinstock, *Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering*, Dover Publications Inc. New York, (1974), 326 p.

Uniformly continuous and slowly oscillating functions on metric spaces

I. V. Protasov

(KNU, Kiev, Ukraine)

E-mail address: `i.v.protasov@gmail.com`

The metrics d, ρ on a set X is said to be *uniformly equivalent* if, for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, for all $x, y \in X$,

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(x,y) < \varepsilon, \;\; \rho(x,y) < \delta \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon.$$

A subset A of (X,d) is *uniformly discrete* if there exists $\varepsilon > 0$ such that $d(x,y) > \varepsilon$ for all distinct $x, y \in A$. We denote by $UC(X,d)$ and $UD(X,d)$ the families of all bounded uniformly continuous functions and uniformly discrete subsets of (X,d).

Theorem 1. *For the metrics d, ρ on a set X, the following statements are equivalent:*

(i) d, ρ *are uniformly equivalent;*

(ii) $UC(X,d) = UC(X,\rho)$*;*

(iii) $UD(X,d) = UD(X,\rho)$.

The metrics d, ρ on a set X are said to be *asymptotically equivalent* if, for every $\varepsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that, for all $x, y \in X$,

$$d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow \rho(x,y) < \delta, \;\; \rho(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(x,y) < \delta.$$

A subset A of (X,d) is *thin* if, for every $\varepsilon > 0$, there exists a bounded subset V of X such that $d(x,y) > \varepsilon$ for all distinct $x, y \in A \setminus V$ (V is *bounded* if it is contained in some ball). We denote by $Bound(X,d)$ and $Th(X,d)$ the families of all bounded and thin subsets of (X,d).

A function $f : (X,d) \; to \mathbb{R}$ is called *slowly oscillating* if, for all $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, there exists a bounded subset V of (X,d) such that, for all $x, y \in X \setminus V$, $d(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. We denote by $SO(X,d)$ the family of all bounded slowly oscillating functions on (X,d).

Theorem 2. *For the metrics d, ρ on a set X with $Bound(X,d) = Bound(X,\rho)$, the following statements are equivalent:*

(i) d, ρ *are asymptotically equivalent;*

(ii) $SO(X,d) = SO(X,\rho)$*;*

(iii) $Th(X,d) = Th(X,\rho)$.

Wild Cantor sets: New results, conjectures and questions

D. Repovš

(University of Ljubljana, Slovenia)

E-mail address: `dusan.repovs@guest.arnes.si`

A Cantor set is characterized as a topological space that is totally disconnected, perfect, compact and metric. Any two such spaces C_1 and C_2 are homeomorphic, but if C_1 and C_2 are subspaces of $R^n, n \geq 3$, there may not be a homeomorphism of R^n to itself taking C_1 to C_2. In this case, C_1 and C_2 are said to be *inequivalent* embeddings of the Cantor set.
There has been recent renewed attention to properties of embeddings of Cantor sets since these sets arise in the settings of dynamical systems, ergodic theory and group actions.
This talk will be a survey of conjectures and questions concerning embeddings of Cantor sets in various Euclidean spaces. The emphasis will be on geometric properties of the embeddings.

References

[1] M. L. Antoine, *Sur la possibilite d' etendre l'homeomorphie de deux figures a leur voisinages*, C.R. Acad. Sci. Paris **171** (1920), 661–663.

[2] W. A. Blankinship, *Generalization of a construction of Antoine*, Ann. of Math. (2) **53** (1951), 276–297.

[3] D. G. DeGryse and R. P. Osborne, *A wild Cantor set in E^n with simply connected complement*, Fund. Math. **86** (1974), 9–27.

[4] D. J. Garity and D. Repovš, *Cantor set problems*, Open problems in topology. II. (Elliott Pearl, ed.), Elsevier B. V., Amsterdam, 2007, pp. 676–678.

[5] D. Garity, D. Repovš, D. G. Wright, and M. Željko *Distinguishing Bing-Whitehead Cantor sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no. 2, 1007-1022.

[6] D. Garity, D. Repovš, and M. Željko, *Uncountably many Inequivalent Lipschitz Homogeneous Cantor sets in R^3*, Pacific J. Math. **222** (2005), no. 2, 287–299.

[7] D. Garity, D. Repovš, and M. Željko, *Rigid Cantor sets in R^3 with Simply Connected Complement*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 8, 2447–2456.

[8] A. Kirkor, *Wild 0-dimensional sets and the fundamental group*, Fund. Math. **45** (1958), 228–236.

[9] R. B. Sher, *Concerning wild Cantor sets in E^3*, Proc. Amer. Math. Soc. **19** (1968), 1195–1200.

[10] A. C. Shilepsky, *A rigid Cantor set in E^3*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. **22** (1974), 223–224.

[11] R. Skora, *Cantor sets in S^3 with simply connected complements*, Topology Appl. **24** (1986), no. 1-3, 181–188, Special volume in honor of R. H. Bing (1914–1986).

[12] D. G. Wright, *Bing-Whitehead Cantor sets*, Fund. Math. **132** (1989), no. 2, 105–116.

Connected linked systems

Safarova D.T.

(Tashkent)

E-mail address: beshimov@mail.ru

Let X be a topological T_1 space. The system $\xi = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ of closed subsets of a topological space X is called a linked system if every two elements of ξ have nonempty intersection. A maximal linked system (MLS) is a linked system not properly contained in another linked system. Any linked system can be filled up to a maximal linked system. We denote by λX the set of all MLS of the space$X$. The family of all the sets of the form

$O(U_1, U_2, ..., U_n)$ =$\{\xi \in \lambda X : \forall i = 1, 2, ..., n\ \exists F_i \subset U_i\}$

where $U_i, U_2, ..., U_n$ is sequence of open sets of X, generates a base of a topology on λX. The space λX is called superextension of X[1].

The topological space X is naturally embedded in λX. i.e. each point $x \in X$ is transferred into the MLS $\xi_x = \{F \in expX : x \in F\}$, where $expX$ is the space of closed subsets of the space X with the Vietoris topology.

Definition 1. Let X be a topological T_1 -space and λX its superexrension. We say that the MLS $\xi \in \lambda X$ is connected if it contains at least one connected element F. The connected MLS is denoted by CMLS.

Definition 2. A connected superkernel (or connected superextension) of the topological space X is called the space

$\lambda_s X = \{\xi \in \lambda X : \xi - CMLS\}$

Let X be a topological T_1 -space. Since $\{x\}$ is connected space for any $x \in X$ and $\{x\} \in \xi_x$ we have $\lambda_s X \neq \emptyset$. There exists a maximal linked system not containing connected element.

Example. Let $F_1 = \{1, 2, ...\}$, $F_2 = \{2, 3, ...\}$, ... , $F_n = \{n, n+1, ...\}$, ... is the sequence of closed subsets of X. We fill up the system $\mu = \{F_1, F_2, ...\}$ to a maximal linked system ξ_μ. in this case the system ξ_μ doesn't contain any connected element.

Theorem. For any infinite compact space$X$ we have

$w(X) = w(\lambda_s X) = w(\lambda X)$.

References

1. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. General topology. Basic constructions. Moscow: Phys.math.lit. 2006. 332 p.

Vector fields with impulse action

V. Sharko

(Institute of mathematics of NAS of Ukraine, Kiev, Ukraine)

E-mail address: `sharko@imath.kiev.ua`

Vector field with continuous impulse action on a smooth compact manifold M^n without boundary is called the four $(\Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{sing}, \psi, X)$, where:

a) $\Gamma^{n-1} \subset M^n$ is closed smooth submanifold of codimension 1 (in general non-connected);

b) $\Sigma^{n-1}_{sing} \subset M^n$ is closed smooth submanifold with singularity of codimension 1 (in general non-connected), such that $\Gamma^{n-1} \bigcap \Sigma^{n-1}_{sing} = \emptyset$;

c) $\psi : \Gamma^{n-1} \to \Sigma^{n-1}_{sing}$ is continuos map;

d) X -smooth vector field on M^n, with is transversal to submanifold Γ^{n-1} and such that on submanifold Σ^{n-1}_{sing} X equal 0 only in singular points.

Definition 0.1. *Discontinuous trajectories vector field with continuous impulse action* $(\Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{sing}, \psi, X)$ *will be called those trajectories that start from* Σ^{n-1}_{sing} *and reaching submanifold* Γ^{n-1}.

Among discontinuous trajectories vector field $(\Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{sing}, \psi, X)$ may be such that after the first "meeting" with the subvariety of Γ^{n-1} and after applying the continuous mapping ψ move along the points they have "passed". We call such trajectory **quasi closed.**

We will result sufficient conditions for existence in the field $(\Gamma^{n-1}, \Sigma^{n-1}_{sing}, \psi, X)$ quasi closed trajectories. One of the conditions that the Euler characteristic $\chi(\Gamma^{n-1}_i) \neq 0$ for some connect components $\Gamma^{n-1}_i \subset \Gamma^{n-1}$.

Quantization of quasistationary states of the Klein-Gordon-Fock equation and calculation of spectra of the kaonic systems

D. E. Sukharev

(OSENU, Odessa, Ukraine)

E-mail address: nucsukh@mail.ru

We have developed an advanced procedure for quantization of the quasistationary states of the relativistic Klein-Gordon-Fock equation Within gauge-invariant relativistic many-body perturbation theory ([1], [2]). New numerical approach to calculating spectra of the kaonic systems with an account of relativistic, exchange-correlation corrections is proposed. The wave functions zeroth approximation basis is found from the Klein-Gordon-Fock equations solution. The potential includes the self-consistent mean field potential, the electric and polarization potentials of a nucleus (within the Fermi model). The radial Klein-Gordon-Fock differential equation is rewritten as a set of two first-order equations. The special procedure is realized in order to to obtain high-accuracy eigen values and wave function by an iterative procedure, checking the number of node to insure convergence toward the right eigenvalue. In the mixed Klein-Gordon-Fock-Slater scheme in order to conserve a consistence one should take into account the inter-electron correlation corrections, for example, by means using the technique of the correlation potentials of the Slater type ([1]). The radiative corrections such as Lamb shift self-energy part and vacuum polarization correction are accounted for in the Mohr and Uehling-Serber approximations ([3]). New element of the approach is connected with treating the strong interaction between the nucleus and orbiting kaon by means the generalized phenomenological optical potential of the Batty et al form. Numerical estimates are given for shifts and widths of the transitions in some systems such as the kaonic hydrogen, helium, some heavy elements, including estimating the values of the strong kaon-nuclear interaction energy levels shifts and widths. However, in a case of the low-lying states a problem of the correct fitting the Batty etal potential appears.

References

[1] A. V. Glushkov *Relativistic quantum theory. Quantum mechanics of atomic systems*- Odessa: Astroprint, (2008), P.1-700.

[2] A. Glushkov, D. Sukharev et al *Gauge-invariant QED perturbation theory approach.*- Frontiers in Quantum Systems in Chem. adn Phys. (Springer), (2008), V.18, P.504-522.

[3] A. Glushkov, D. Sukharev et al *Relativistic quantum theory of heavy ions and hadronic atomic systems: Spectra and energy shifts.*- Theory and Applications of Comput.Chem., (2009), P.131-136.

THE GEODESICS OF NON-METRIC CONNECTIONS WITH VECTORIAL TORSION IN A RIEMANNIAN MANIFOLD

E. Yasar

(Mersin University, Mersin, Turkey)

E-mail address: yerol@mersin.edu.tr

In this paper, relations between the geodesics of non-metric connections with vectorial torsion, as already described by E. Cartan in 1925, and the geodesics of the Riemannian connection in a Riemannian manifold are showed. Then it is proved that the geodesics of non-metric connections with vectorial torsion defined by gradient vector fields coincide with the Riemnnian geodesics of a conformally equivalent non-metric in a Riemannian manifold.

Some topological properties of functors of finite degree

Zhuraev T.F.

(Uzbekistan, Tashkent)

E-mail address: rbeshimov@mail.ru

In the paper we study properties in the topological and geometric character of compacts, properties as unicoherentness and sequentialness.

Let us recall some notions used below.

A connected, locally connected compact X is called unicoherent if for any its representation as the union of two closed connected subsets X_1 and X_2 the intersection $X_1 \cap X_2$ is connected [1].

A topological space X is said to be s-sequential if for any closed subset $\Phi \subset X$ and any notisolated point $x \in \Phi$ there exists a nonstationary sequence $\{x_n : n \in N\} \subset \Phi$ such that $x_n \to x$.

It is known that the product of two Freshet-Uysohn's compacts doesn't have to be Freshet-Uysohn's compact, but the product of two s-sequential spaces is always s-sequential. By the natural number k we shall denote the discrete space consisting of k points. Let the covariant, projectively quotient functor F of finite degree preserving intersections, acting in the category $Comp$ of all compact spaces and their mappings, is continuous and monomorphic.

If $F(n)$ is unicoherent compact or s-sequential space then F preserves unicoherent and s-sequential compacts. If the compact $F(n)$ has the fixed point property and $F(\emptyset)$ is either empty set or unicoherent s-sequential compact then the functor F preserves unicoherent and s-sequential compacts. We remark that the functor F preserves continuous hereditarily nonisolated mappings of compact spaces. Let us mention that s-sequential spaces and only they become the image of metrizable spaces under hereditarily nonisolated mappings.

References

1. K. Borsuk. Theory of retracts. M. "Mir", 1997.

2. D.V. Ranchin, Tightness, sequentialness and closed coverings Docl. Acad. Nauk. of SSSR, 1977, № 5, 1015-1018.

3. T.F. Zhuraev. On projectively quotient functors. Comment math. Univ. Carolinae, 42, № 3, 2001, 561-573.

Об одной субримановой геометрии

Б. У. Шергазиев

(Национальный Университет Узбекистана, Узбекистан)

E-mail address: `shergoziev@rambler.ru`

Имеется широкий класс примеров субримановых метрик, в которых класс допустимых путей определяется путем ограничений, накладываемых на вектор скорости пути в каждой точке.

Пусть M – гладкое (класса C^∞) связное многообразие размерности n, TM–его касательное расслоение и H–поле конусов на M, то есть отображение, ставящее в соответствие каждой точке $p \in M$ конус $H_p \subset T_pM$ с вершиной в нуле. Будем называть абсолютно непрерывную кривую $\gamma : [0,T] \to M$ допустимой, если $\gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}$ для всех $t \in [0,T]$, а поле конусов – неинтегрируемым, если для двух точек $p, q \in M$ существует такая допустимая кривая $\gamma : [0,T] \to M$, что $\gamma(0) = p$, $\gamma(T) = q$. Известно, что m– мерное распределение неинтегрируемо, если его "инволютивная оболочка" совпадает с касательным расслоением многообразия. Для таких распределений возможна постановка произвольной двухточечной вариационной задачи с произвольным гладким лагранжианом

$$inf \int_0^T L(\gamma, \gamma')dt : \gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}, \gamma(0) = p, \gamma(T) = q. \tag{1}$$

Пусть L есть функционал длины на римановом многообразии $L(\gamma, \gamma') = \langle \gamma', \gamma' \rangle^{\frac{1}{2}}$ тогда формула (1) определяет неголономную риманову метрику на M:

$$\rho_C(p,q) = inf \int_0^T \langle \gamma', \gamma' \rangle^{\frac{1}{2}} dt, \gamma'(t) \in H_{\gamma(t)}, \gamma(0) = p, \gamma(T) = q. \tag{2}$$

Это метрика называется субримановой метрикой.

Теорема (Рашевского-Чжоу) [1]. Пусть семейство векторных полей $V_i, i = 1,..,n$ заданы на многообразии M. Предположим, что семейство векторных полей $V_i, i = 1,..,n$ и их скобка Ли $[V_i, V_j], i,j = 1,..,n$ образуют в каждой точке $p \in M$ базис пространства T_pM. Тогда любые две точки $p, q \in M$ можно соединить допустимым путем.

Рассмотрим двумерное распределение в $M = R^3$, порожденное векторными полями $V(x,y,z) = (1,0,0)$, $W(x,y,z) = (0,1,x)$, то есть $H_(x,y,z) = span\{V(x,y,z), W(x,y,z)\}$. Скобки Ли $[V,W]$ векторных полей V и W тождественно равны $(0,0,1)$. Следовательно, выполнены условия теоремы Рашевского-Чжоу. Тем самым при любом выборе функционала длины на классе гладких кривых в R^3 распределение H_p индуцирует конечную метрику Карно-Каратеодори. Определим длины допустимых кривых $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ формулой

$$L(\gamma) = \int \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \tag{3}$$

Теорема. Каждая кратчайшая данной неголономной римановой структуры является подъемом дуги окружности относительно проекции $\pi : R^3(x,y,z) \to R^2(x,y)$.

Замечание. Для этой субримановой метрике имеет место теорема о параллелепипеде: Если P_r^c параллелепипед вида $[-cr, cr] \times [-cr, cr] \times [-cr^2, cr^2] \subset R^3$, то существуют такие постоянные $0 < c < C$, что $P_r^c \subset B_r^c \subset P_r^C$ для всех достаточно малых r, где B_r^c-шар радиуса r с центром в нуле в субриманвой метрике.

References

[1] Д.Ю.Бураго, Ю.Д.Бураго, С.В.Иванов. Курс метрической геометрии. -Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. - 2004.